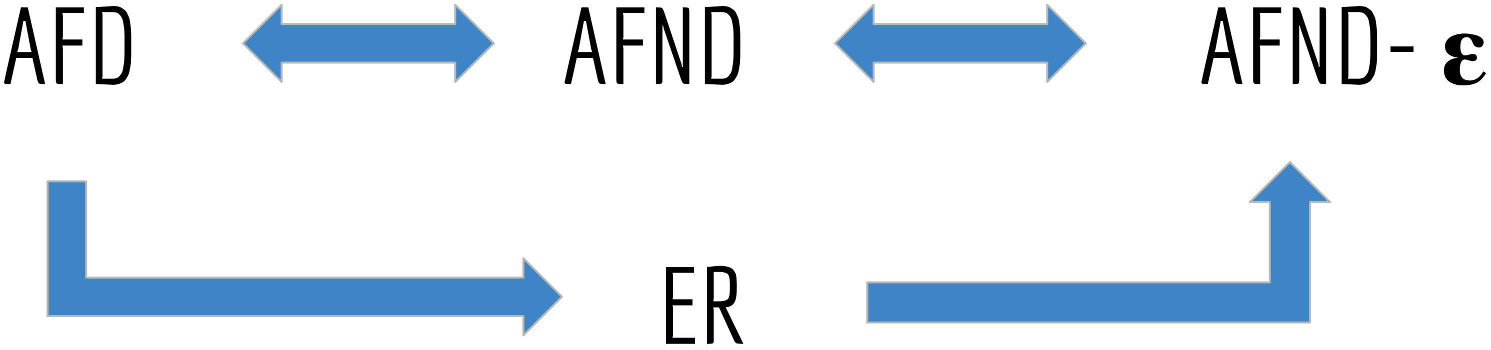
Teoría de Lenguajes

AFD $\longrightarrow$ ER

R_M

Equivalencia de AF y ER

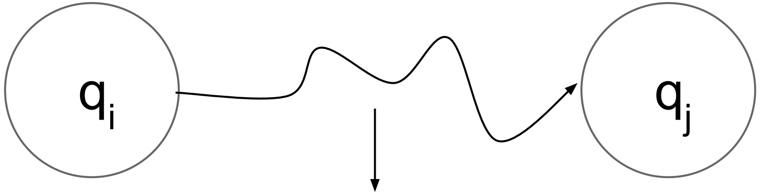


AFD $\rightarrow$ ER

Sea un AFD $M : (Q, \Sigma, \delta, q_1, F)$ con $Q = \{q_1, q_2, \dots, q_n\}$; q_1: estado inicial y $F = \{q_{f1}, q_{f2}, \dots, q_{ft}\}$

Se define R_{ij}^{k} = { conjunto de strings que van del estado q_i al estado q_j sin pasar por un estado **mayor** que q_k }

en cuanto al subíndice del estado



donde por acá puedo usar los estados $\{q_1, q_2, \dots, q_k\}$

AFD $\longrightarrow$ ER (cont.)

R_{ij}^{n} = { conjunto de strings que van del estado q_i al estado q_j}

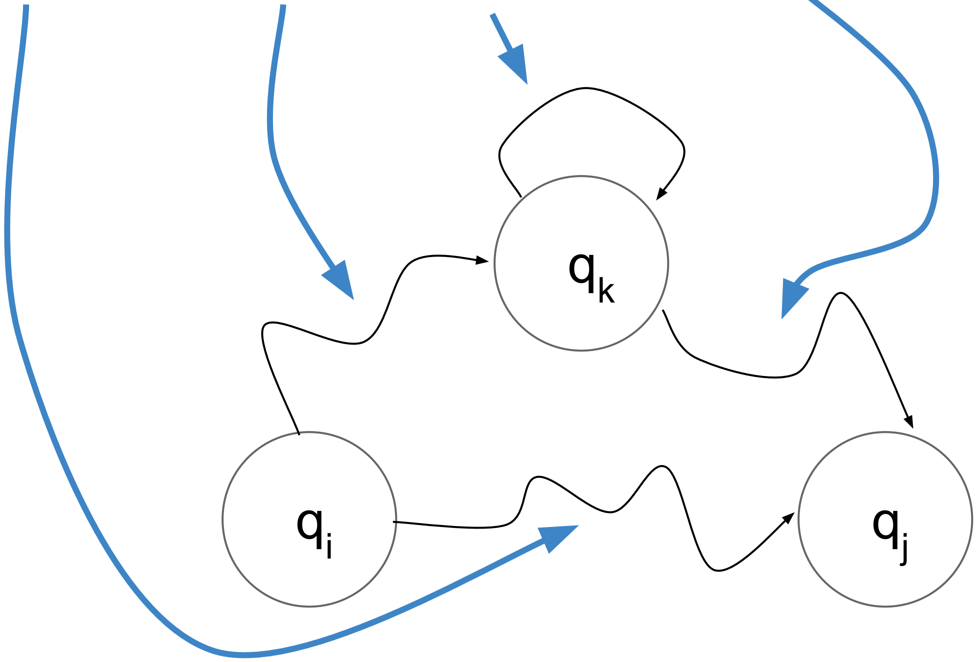
Se define R_{ij}^{k} en forma recursiva

$$R_{ij}^{0} = \left\{ \begin{array}{ll} \{ a \,/\, a \in \Sigma \ \text{ y } \ \delta(q_i,a) = q_j \} & i \neq j \\ \{ a \,/\, a \in \Sigma \ \text{ y } \ \delta(q_i,a) = q_j \} \cup \{ \varepsilon \} & i = j \end{array} \right\}$$

Luego se define R_{ij}^{k} en función de R_{ij}^{k-1}

AFD → ER (cont.)

$$R_{ij}^{k} = R_{ij}^{k-1} \cup R_{ik}^{k-1}(R_{kk}^{k-1})^{*} R_{kj}^{k-1}$$



AFD $\longrightarrow$ ER (cont.)

Lo que se prueba es que $\exists\ r_{ij}^{k}\ /\ L(r_{ij}^{k}) = R_{ij}^{k}$

Se hace a partir de la definición recursiva de R_{ij}^{k},

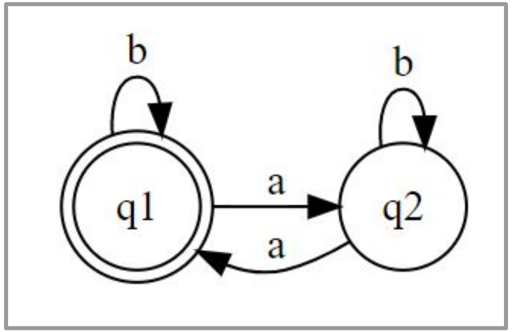
ya que ésta involucra operadores Unión, Concatenación y Clausura de Kleene

Como $F = \{q_{f1}, q_{f2}, \ldots, q_{ft}\}$

R_{1fs}^{n} es el conjunto de strings desde el estado inicial q_1 a cada estado final q_{fs} con $q_{fs} \in F$

De donde L(M) está denotado por la ER $\boxed{r_{1f1}^{n} \mid r_{1f2}^{n} \mid \ldots \mid r_{1ft}^{n}}$

Aplicación:



$r_{11}^{2} = r_{11}^{1} \mid r_{12}^{1}(r_{22}^{1})^* r_{21}^{1}$

$r_{11}^{1} = r_{11}^{0} \mid r_{11}^{0}(r_{11}^{0})^* r_{11}^{0} = (b|\varepsilon) \mid (b|\varepsilon)(b|\varepsilon)^*(b|\varepsilon) = (b|\varepsilon)^* = b^*$

$r_{12}^{1} = r_{12}^{0} \mid r_{11}^{0}(r_{11}^{0})^* r_{12}^{0} = a \mid b^*a$

$r_{22}^{1} = r_{22}^{0} \mid r_{21}^{0}(r_{11}^{0})^* r_{12}^{0} = (b|\varepsilon) \mid a(b|\varepsilon)^* a = (b|\varepsilon) \mid ab^*a$

$r_{21}^{1} = r_{21}^{0} \mid r_{21}^{0}(r_{11}^{0})^* r_{11}^{0} = a \mid a(b|\varepsilon)^*(b|\varepsilon) = a \mid ab^*$

entonces...

$$\boxed{r_{11}^{2} = b^* \mid (a|b^*a)((b|\varepsilon) \mid ab^*a)^*(a \mid ab^*)}$$

Relación R_L (repaso)

Sea un lenguaje $L \subseteq \Sigma^*$, $x, y \in \Sigma^*$

$x \, R_L \, y \iff \forall z \in \Sigma^*$ se cumple que:

$$xz \in L \land yz \in L \quad \text{o} \quad xz \notin L \land yz \notin L$$

Relación R_L (cont.)

Ejemplo

Lenguaje de las tiras de **a**'s y **b**´s con al menos dos **a**'s consecutivas

Clases:

- tiras sin a's o que no tienen dos a's consecutivas y terminan en **b**
- tiras sin a's o que no tienen dos a's consecutivas y terminan en **a**
- tiras que tienen dos a's consecutivas (o más)

Relación R_L (cont.)

Podemos incluso asociar una ER a cada clase:

- tiras sin a’s o que no tienen dos a’s consecutivas y terminan en **b**

  (b | ab)*

- tiras sin a’s o que no tienen dos a’s consecutivas y terminan en **a**

  (b | ab)* a

- tiras que tienen dos a’s consecutivas (o más)

  (a | b)* aa (a | b)*

Relación R_M

Definición:

Dado un AFD $M : (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$ y dos tiras $x, y \in \Sigma^*$ se dice que

$$x \; R_M \; y \Leftrightarrow \delta\hat{}(q_0, x) = \delta\hat{}(q_0, y)$$

R_M es una relación de equivalencia

Se va a ver que existe una relación entre R_L y R_M

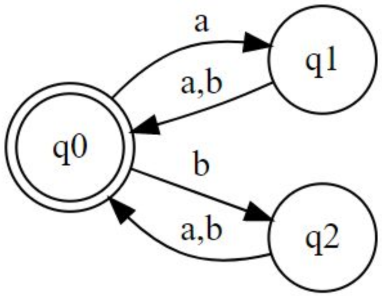
Relación R_M (cont.)

- Si $x \, R_M \, y \implies x \, R_L \, y$ √
- Si $x \, R_L \, y \implies x \, R_M \, y$ ¿?

  No necesariamente…

  Dependerá del autómata M

Relación R_M (cont.)



$a \, R_L \, b$ √

$a \, R_M \, b$ ✗

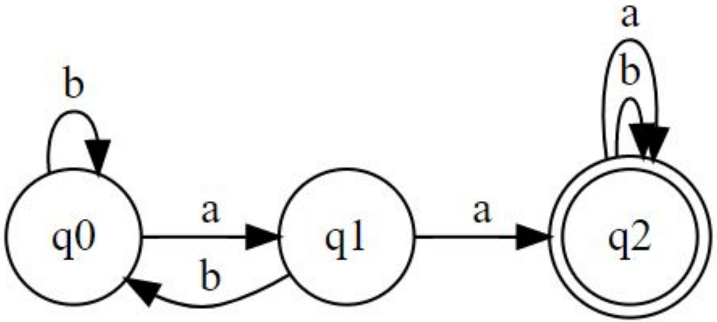
En el ejemplo, R_L tiene 2 clases R_M tiene 3

- Cada clase de R_L es una o la unión de varias clases de R_M
- La cantidad de clases de R_M ($\#R_M$) es la cantidad de estados de M
- $\#R_M \geq \#R_L$

Relación R_M (cont.)

La idea es poder asociar una ***expresión regular*** (ER) a cada estado, de aquellas tiras que llegan a él

Ejemplo:



q_0: (b|ab)* → [ε]

q_1: (b|ab)*a → [a]

q_2: (b|ab)*aa (a|b)* → [aa] o (a|b)*aa (a|b)*