

# COMPORTAMIENTO MECÁNICO DE MATERIALES

## Esfuerzos

Año 2024



**ANEP**

ADMINISTRACIÓN  
NACIONAL DE  
EDUCACIÓN PÚBLICA



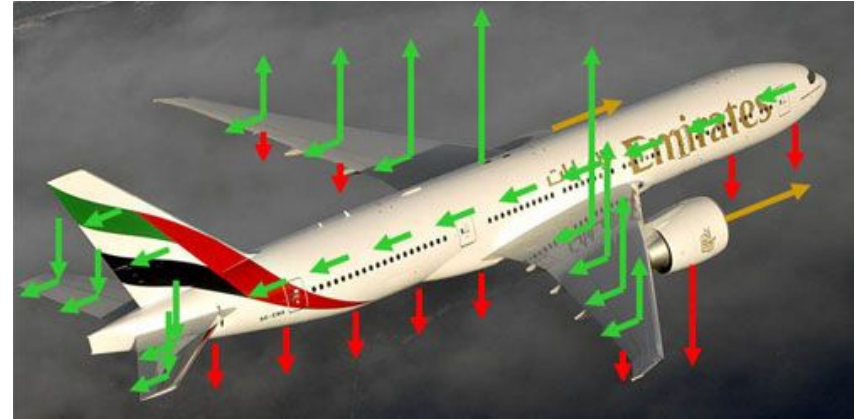
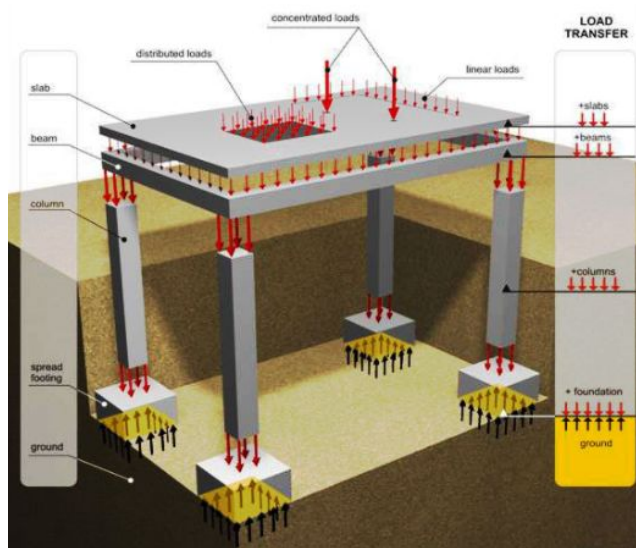
UNIVERSIDAD  
DE LA REPÚBLICA  
URUGUAY



**IIMPI**  
INSTITUTO DE  
INGENIERÍA MECÁNICA  
Y PRODUCCIÓN INDUSTRIAL

# Introducción

La geometría de todo componente de una máquina no solo debe estar pensada para que cumpla con los requisitos cinemáticos, sino que también debe haberse considerado que resista las **cargas** a las que va a ser sometido en su vida en servicio y a las **deformaciones** que estas provoca.



# Introducción

Las dos condiciones anteriores deben cumplirse con la menor cantidad de material posible, dado que no solo disminuye el costo del elemento de máquina, sino también el peso, que puede llegar a ser importante en determinadas estructuras o componentes. Por ejemplo, aquellos componentes que giran excéntricos, aquellos que se mueven a costa de algún componente energético (vehículos, ventiladores, etc)

Hasta ahora, hemos considerado los cuerpos como rígidos, sin embargo, la realidad es que todos los sólidos se deforman en mayor o menor medida, por efectos de cargas externas, que pueden llevar a la falla de cualquier pieza.

El estudio del comportamiento mecánico de los materiales es una disciplina antigua que se remonta al siglo XVII, con los primeros trabajos teóricos y experimentales de Galileo, sobre columnas a tracción y a compresión.

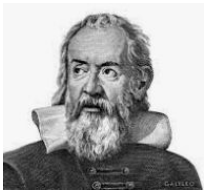
Sin embargo, cuando realmente despegó esta ciencia, fue en el siglo XIX, con el notable aporte de científicos franceses como:

Coulomb,

Poisson,

Navier,

St. Venant y Cauchy.



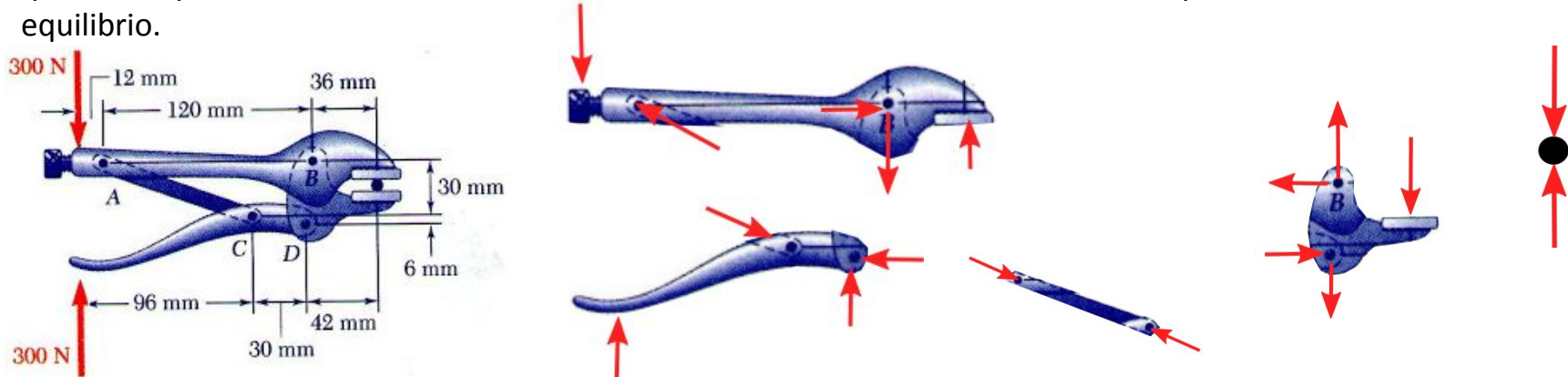
# Estabilidad - Diagrama de Cuerpo Libre (DCL)

Las tres características que se encarga de estudiar la *mecánica de sólidos* son: **Estabilidad**, **Resistencia** y **Deformación**.

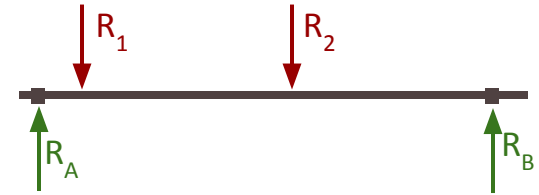
La *estabilidad* está asociado al equilibrio, todos los componentes de una estructura estática o móvil se encuentran en un equilibrio que puede ser estático o dinámico. Por lo tanto, la primer cuestión que hay que estudiar es la estabilidad, es decir, como un cuerpo se encuentra en equilibrio con su entorno.

Para tal fin, se aísla al elemento bajo investigación de todos los agentes externos, que son asimismo reemplazados por las acciones que realizan sobre la pieza de interés. Inclusive, se debe agregar, de ser considerable, el peso del propio cuerpo como una carga externa.

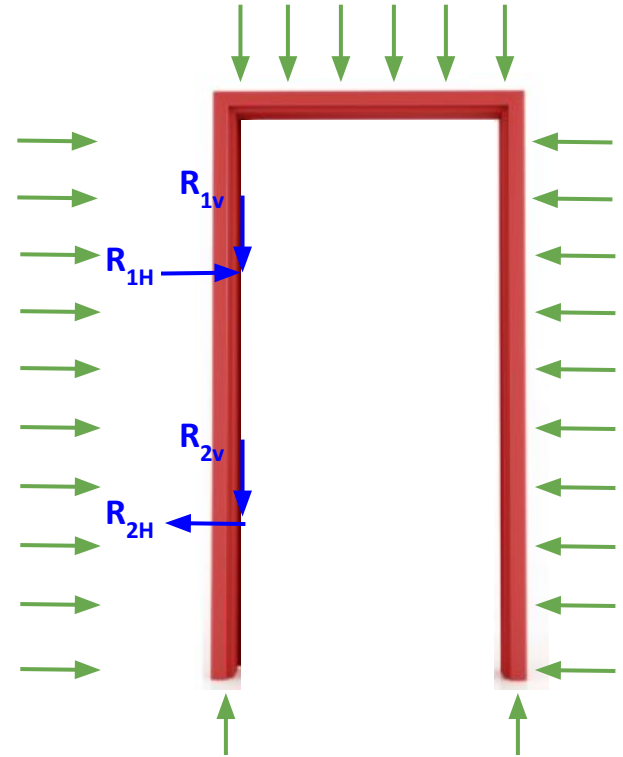
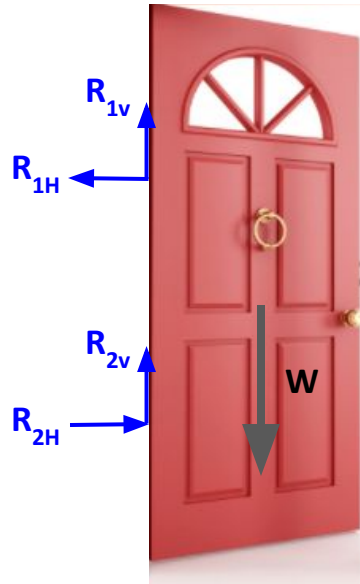
Con esta información se realiza un croquis que es conocido como **Diagrama de Cuerpo Libre (DCL)**, para el cual, dado que el cuerpo se encontraba inicialmente en equilibrio, las fuerzas y momentos cumplen con todas las ecuaciones de equilibrio.



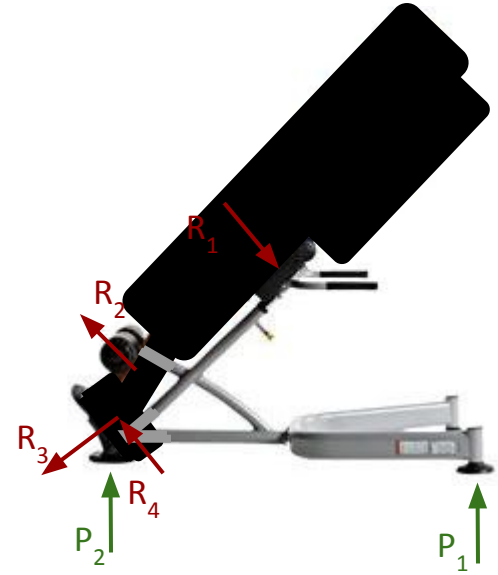
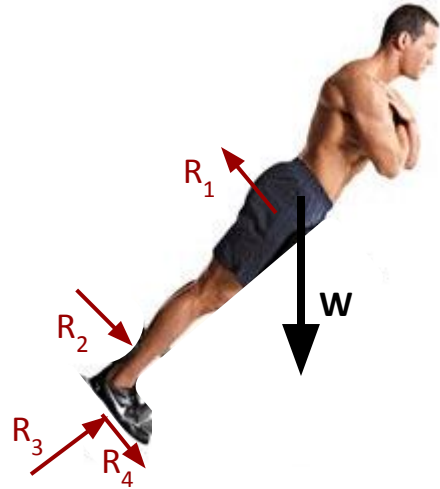
# Diagrama de Cuerpo Libre (DCL)



# Diagrama de Cuerpo Libre (DCL)



# Diagrama de Cuerpo Libre (DCL)

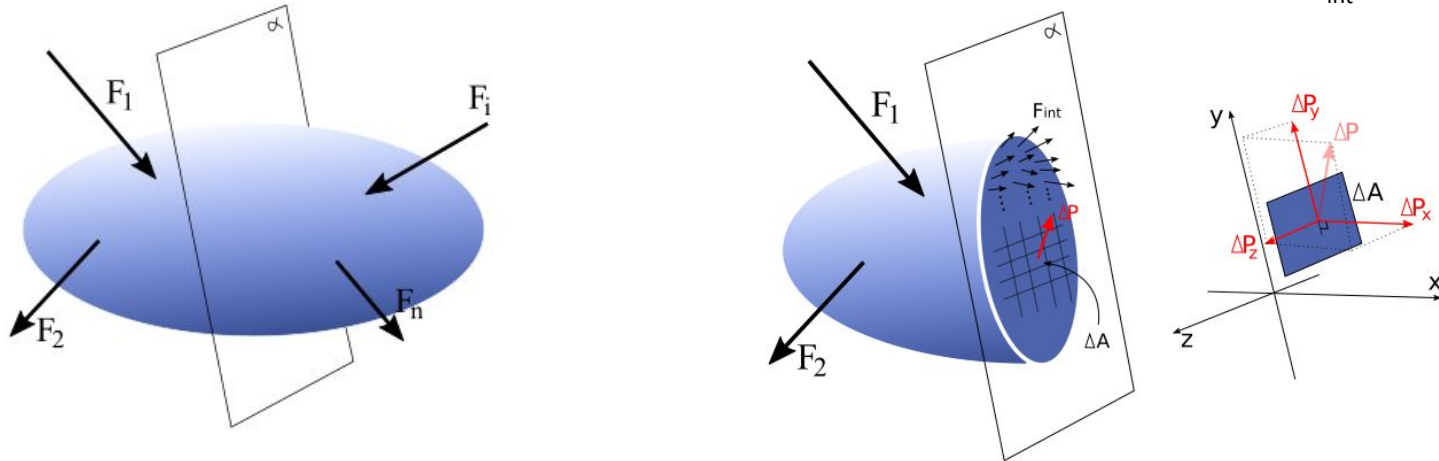


# Resistencia - Esfuerzos

Para comenzar a hablar de *resistencia*, debemos adentrarnos en el sólido y estudiar que es lo que ocurre en su interior, así determinaremos los *esfuerzos* a los que es sometido por las cargas externas y su reacción.

**RECORDEMOS: si un cuerpo está en equilibrio, entonces, cualquier parte del cuerpo que decidamos aislar deberá estar en equilibrio.**

Si tenemos un cuerpo cualquiera, en equilibrio, y bajo la acción de un conjunto de fuerzas externas ( $F_i$ ) distintas de cero, al separar una parte del mismo cortándolo con un plano  $\alpha$ , deberán aparecer necesariamente otro conjunto de fuerzas actuando sobre la sección cortada, a las que llamaremos fuerzas internas ( $F_{int}$ ).





# Esfuerzos

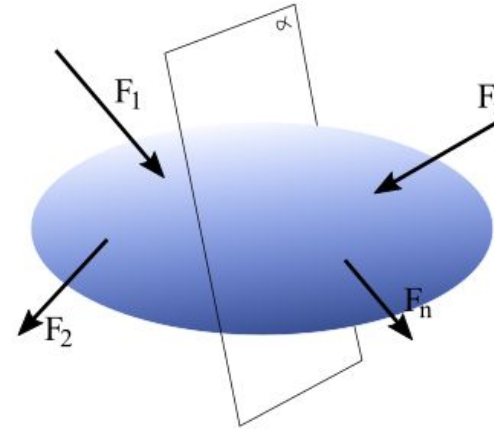
Las Fuerzas internas, son las que mantienen el equilibrio con las fuerzas externas, y como se ve en el dibujo, estas son magnitudes **vectoriales** que **dependen del punto** que se esté considerando.

Sea  $\Delta P$  la fuerza interna (con módulo, dirección y sentido) que aparece en un área  $\Delta A$  cualquiera, se define:

Esfuerzo normal: 
$$\sigma = \lim_{\Delta A \rightarrow 0} \frac{\Delta P_x}{\Delta A} \quad \left[ \frac{N}{m^2} \right] = [Pa]$$

Esfuerzos cortantes: 
$$\tau_{xy} = \lim_{\Delta A \rightarrow 0} \frac{\Delta P_y}{\Delta A} \quad \left[ \frac{N}{m^2} \right] = [Pa]$$

$$\tau_{xz} = \lim_{\Delta A \rightarrow 0} \frac{\Delta P_z}{\Delta A} \quad \left[ \frac{lb}{in^2} \right] = [psi]$$

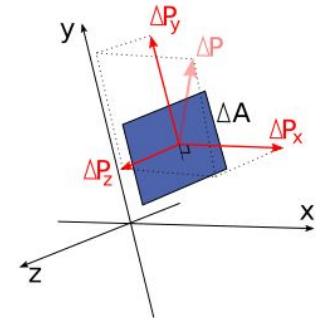
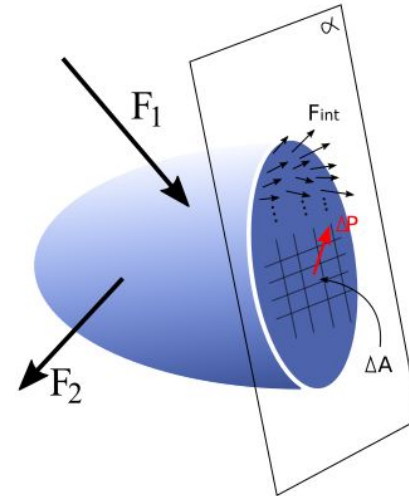


$$KPa = 10^3 Pa$$

$$MPa = 10^6 Pa$$

$$GPa = 10^9 Pa$$

$$ksi = 10^3 psi$$



# Esfuerzos

El plano  $\alpha$ , que es perpendicular a un eje  $x$ , nos da los esfuerzos normales ( $\sigma_x$ ) y cortantes ( $\tau_{xy}$ ,  $\tau_{xz}$ ) en una cara cuya normal es  $x$ .

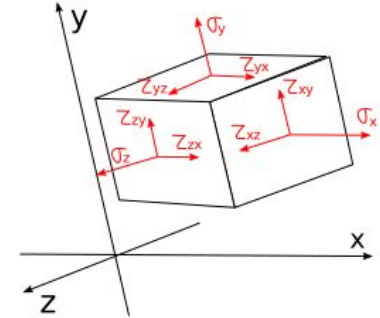
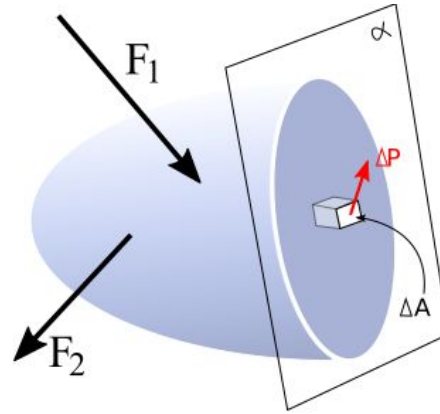
Si repetimos este procedimiento, para dos planos más, cuyas normales son  $y$  y  $z$ , obtendremos análogamente seis esfuerzos más.

Dos de ellos son nuevos esfuerzos normales ( $\sigma_y$  y  $\sigma_z$ ) y los otros cuatro son esfuerzos cortantes ( $\tau_{yx}$ ,  $\tau_{yz}$ ,  $\tau_{zx}$ ,  $\tau_{zy}$ ).

Estos nueve valores conforman una magnitud conocida como **Tensor de tensiones ( $\sigma$ )**, y se expresa como una matriz de dimensión 3x3.

De todas formas, se puede deducir aplicando equilibrio al cubo diferencial, que tan solo seis esfuerzos son independientes, puesto que se cumple que:

$$\tau_{yx} = \tau_{xy} ; \tau_{zx} = \tau_{xz} ; \tau_{zy} = \tau_{yz}$$



$$\sigma = \begin{pmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_z \end{pmatrix}$$

$$KPa = 10^3 Pa$$

$$MPa = 10^6 Pa$$

$$GPa = 10^9 Pa$$

$$ksi = 10^3 psi$$

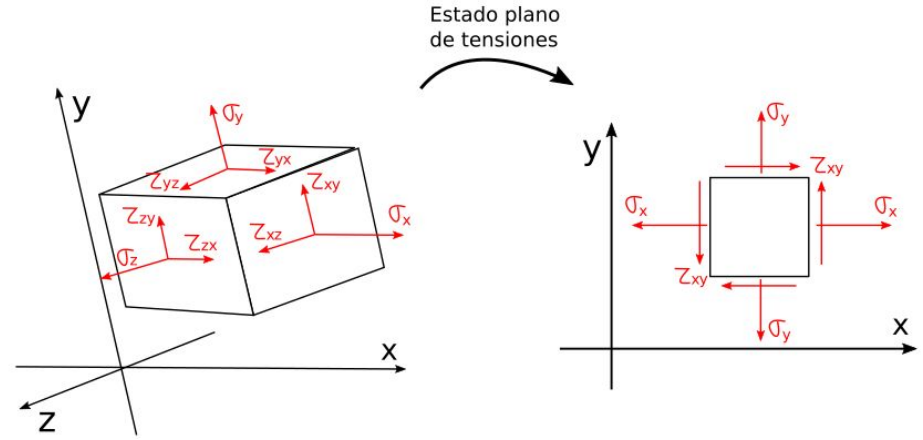
# Esfuerzos

## **Estado plano de tensiones:**

En muchas de las aplicaciones industriales, los estados de carga de los componentes estructurales pueden ser asumidos como planos.

Esto significa que las tensiones que sufre cada punto del componente de la estructura, se puede descomponer en dos esfuerzos, siendo el tercero despreciable.

De esta forma, el tensor de tensiones se simplifica, dado que solo tenemos tres esfuerzos independientes:  $\sigma_x$ ,  $\sigma_y$  y  $\tau_{xy}$ . Este último valor correspondiente al esfuerzo cortante, por ser el único de este tipo para el estado plano de tensiones se denota simplemente  $\tau$ .



$$\sigma = \begin{pmatrix} \sigma_x & \tau \\ \tau & \sigma_y \end{pmatrix}$$

$$KPa = 10^3 Pa$$

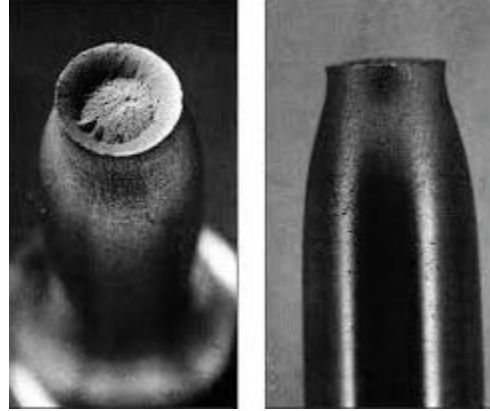
$$MPa = 10^6 Pa$$

$$GPa = 10^9 Pa$$

$$ksi = 10^3 psi$$

# Esfuerzos

- Solo tenemos estos esfuerzos internamente?
- Para qué sirve conocerlos?
- Qué pasa con los esfuerzos en otras direcciones?
- Se pueden calcular?



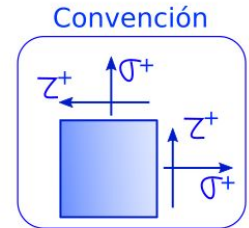
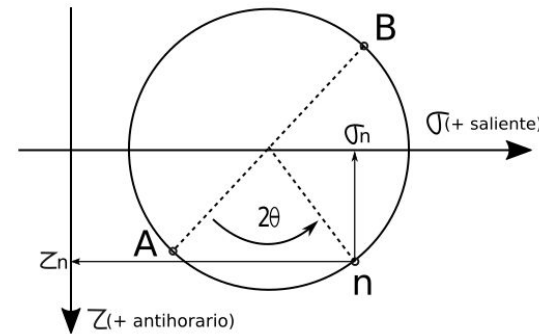
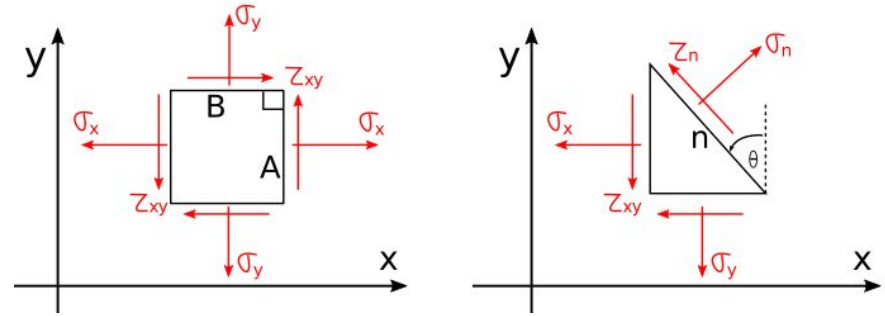
# Esfuerzos - Círculo de Mohr

## Transformación de esfuerzos:

El *Círculo de Mohr* es una construcción geométrica en un plano dado por el par de ejes  $\sigma$  y  $\tau$ , y para **un punto específico** del sólido en estudio.

Este círculo representa todos los esfuerzos a los que está sometido dicho punto, dentro del plano  $\mathbf{XY}$ , según la dirección (o plano) que deseemos considerar.

Las expresiones analíticas que ubican y definen este círculo en el plano mencionado, pueden ser obtenidas a partir de relacionar a partir de las ecuaciones de equilibrio, los esfuerzos generados sobre las superficies de un elemento diferencial, que presenta un plano  $n$  inclinado un ángulo  $\theta$  cualquiera.



# Esfuerzos - Círculo de Mohr

## Cómo construir el Círculo de Mohr?

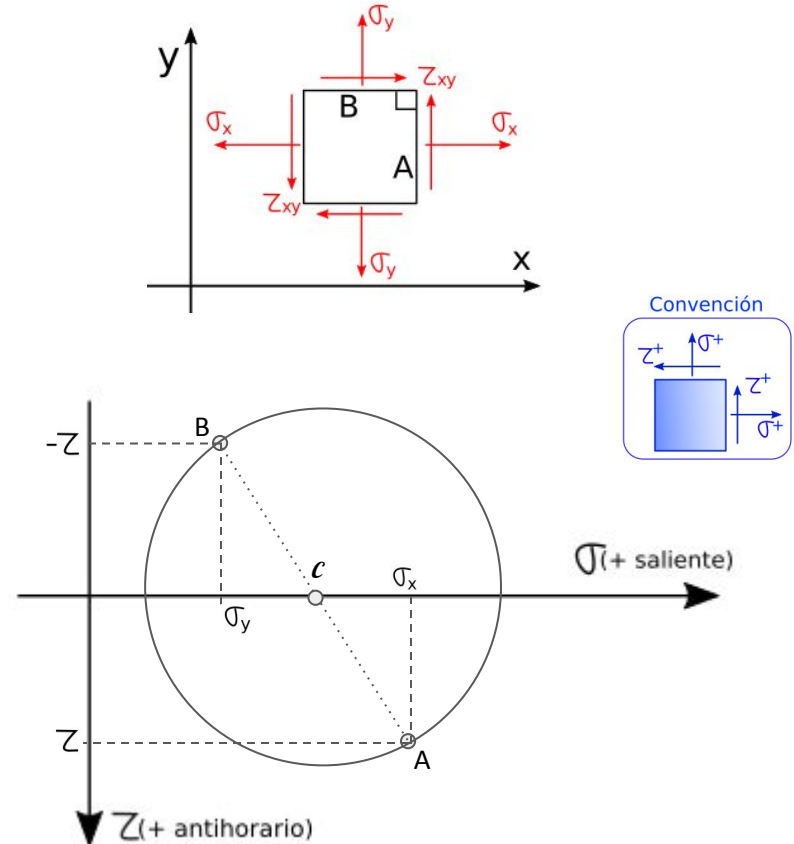
Para construir el *Círculo de Mohr* es necesario conocer los esfuerzos sobre **dos caras perpendiculares**. En el caso del ejemplo conocemos los esfuerzos  $\sigma_x$ ,  $\sigma_y$  y  $\tau_{xy}$ , sobre las caras A y B que están a 90°.

Dibujamos los ejes ( $\sigma$  y  $\tau$ ) recordando que el eje  $\tau$  crece hacia abajo!

Ubicamos los puntos que representan a las caras A y B, recordando la **convención** establecida.

El corte de la línea que une A y B, con el eje de  $\sigma$ , determina el centro del círculo.

Finalmente, creamos un círculo que pase por ambos puntos (A y B) y cuyo centro sea  $C$ .



# Esfuerzos - Círculo de Mohr

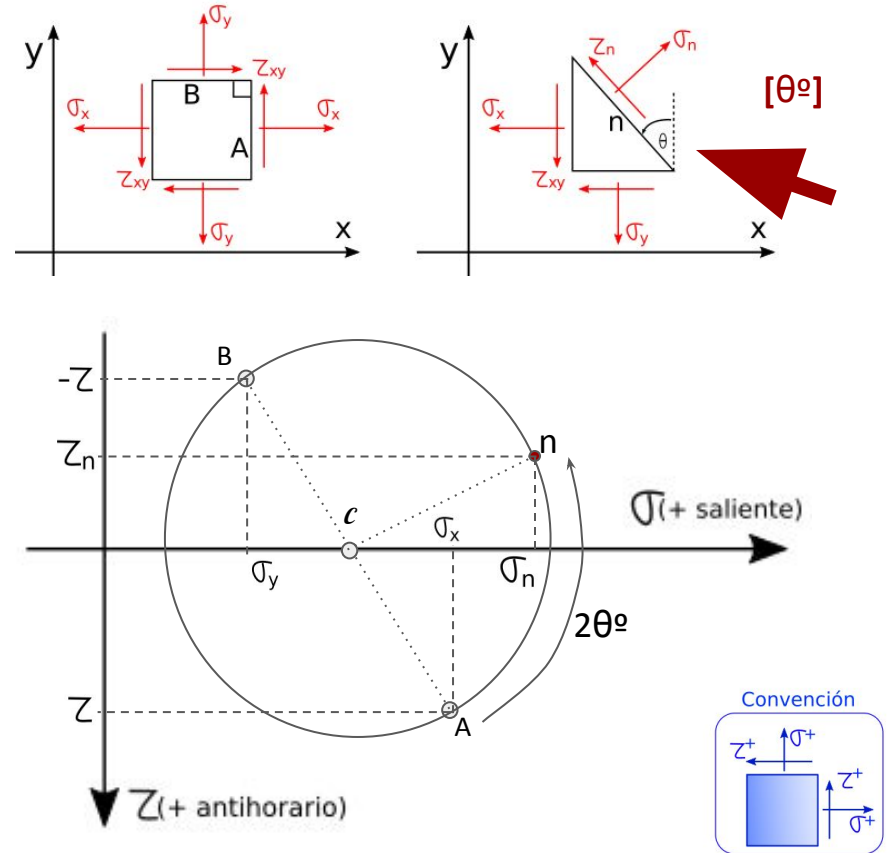
*Cómo hacemos si necesitamos los esfuerzos en otra cara o dirección?*

Primero, debemos construir el círculo de Mohr a partir de los datos que poseemos, tal y como se vió anteriormente.

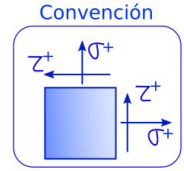
Luego debemos conocer a qué ángulo se encuentra la nueva cara  $n$ , con respecto a alguna de las caras que conocemos. En este caso, la cara  $n$  se encuentra a  $\theta^\circ$  de la cara  $A$ , en sentido antihorario.

Ahora, para ubicar el punto que se corresponde con  $n$ , debemos **girar  $2\theta^\circ$  desde el punto de referencia**, en el **mismo sentido de giro del plano**, sobre el círculo.

Finalmente, proyectando el punto sobre los ejes, obtenemos el esfuerzo normal y cortante ( $\sigma_n$  y  $\tau_n$ ) correspondientes al plano  $n$ .



# Esfuerzos - Círculo de Mohr



**Algunas magnitudes características:**

$$\text{Centro: } C = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2}$$

$$\text{Radio: } R = \sqrt{(\sigma_x - C)^2 + \tau^2} = \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau^2}$$

**Esfuerzos principales:**

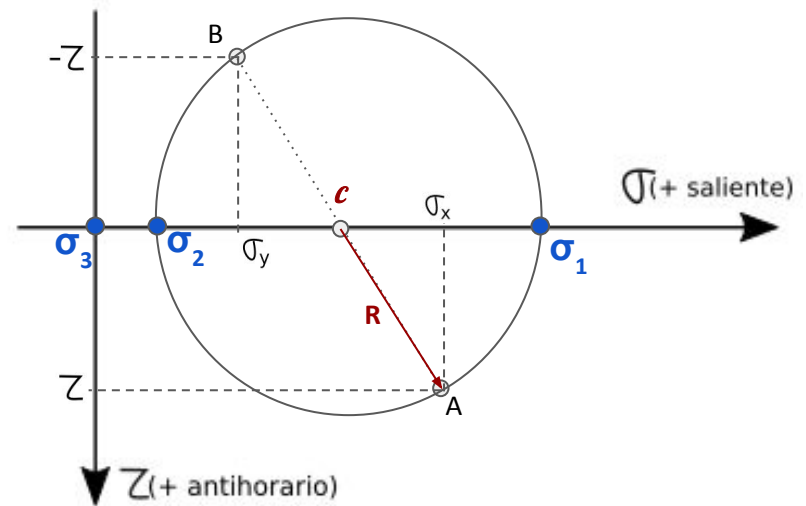
Aquellos puntos que no poseen esfuerzo cortante.  
Se enumeran desde el mayor al menor, del 1 al 3.

En este caso:

$$\sigma_1 = C + R$$

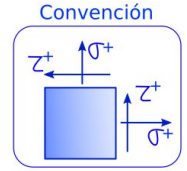
$$\sigma_2 = C - R$$

$$\sigma_3 = 0 \Leftarrow \text{Estado plano de tensiones}$$





# Esfuerzos - Tri-círculo de Mohr



El círculo de Mohr representa los valores de esfuerzo al que está sometido un punto según cualquier dirección en el plano XY.

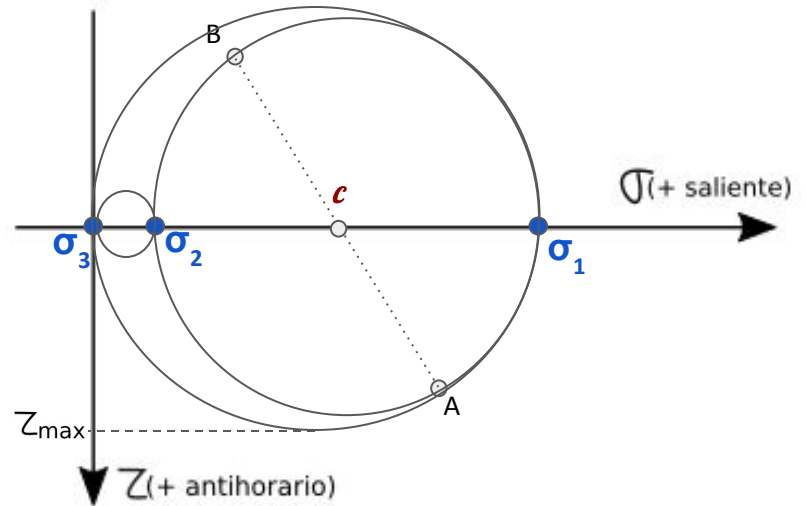
***Pero, qué pasa si nuestra orientación de interés no se encuentra en el plano XY?***

Existen dos círculos de Mohr adicionales que conforman el ***Tri-círculo de Mohr***.

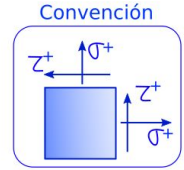
Los dos círculos restantes se obtienen al considerar el tercer esfuerzo principal (sea cero o no) y uniéndolo mediante círculos a los otros esfuerzos principales.

***Esfuerzo cortante máximo ( $\tau_{\max}$ ):***

Es el máximo esfuerzo cortante al que está sometido ese punto considerando **todas las orientaciones posibles**.



# Esfuerzos - Tri-círculo de Mohr



**Hagamos algunos ejemplos:**

