Práctico Semana 04

Resolución ejercicio 3.5.a

Integrales polinómicas

Calcular $\int_1^3 x\,dx$ hallando sumas superiores e inferiores para particiones equispaciadas.

Recordar que $\sum\limits_{i=1}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2}$

Para determinar el valor de una integral puede ser útil tomar distintos tipos de particiones, pero en este caso nos piden que sean esquispaciadas.

Una partición $P_n = \{a = a_0, a_1, .., a_n = b\}$ del intervalo $[a,b]$ es equispaciada si cada subintervalo mide lo mismo, es decir $a_{k+1} - a_k = a_{j+1} - a_j$ para todo $j, k < n$.

Observar que una partición con $n+1$ puntos forma n intervalos, y si todos miden igual entonces cada uno deberia medir $\frac{1}{n}$ por el tamaño total. Más en concreto, tenemos que $a_{k+1} - a_k = \frac{b-a}{n}$.

A partir de esto se tiene que $a_k = \frac{k(b-a)}{n} + a$ (se puede probar formalmente por inducción).

En nuestro caso $a = 1, b = 3$ por lo que la suma inferior para P_n la partición equispaciada con $n+1$ puntos es

$$S_*(f, P_n) = \sum_{k=0}^{n-1} \left(\frac{2}{n}\right) \text{ínf}\left(f, \left[\frac{2k}{n} + 1, \frac{2(k+1)}{n} + 1\right]\right)$$

Como además $f(x) = x$ es monótona creciente en el intervalo $[1,3]$ se tiene que $\text{ínf}\left(f, \left[\frac{2k}{n} + 1, \frac{2(k+1)}{n} + 1\right]\right) = f\left(\frac{2k}{n} + 1\right) = \frac{2k}{n} + 1$.

La suma inferior entonces es

$$S_*(f, P_n) = \sum_{k=0}^{n-1} \left(\frac{2}{n}\right) \text{ínf}\left(f, \left[\frac{2k}{n} + 1, \frac{2(k+1)}{n} + 1\right]\right) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{2}{n}\left(\frac{2k}{n} + 1\right) = \left(\frac{4}{n^2}\sum_{k=0}^{n-1} k\right) + \left(\frac{2}{n}\sum_{k=0}^{n-1} 1\right)$$

$$= \frac{4}{n^2}\frac{n(n-1)}{2} + 2 = \frac{2(n-1)}{n} + 2 = 4 - \frac{2}{n}$$

Para calcular la suma superior relativa a esta partición solo falta calcular el supremos en $[a_k, a_{k+1}]$. De nuevo utilizando que la función f es monótona tenemos que

$\sup\left(f, \left[\frac{2k}{n} + 1, \frac{2(k+1)}{n} + 1\right]\right) = f\left(\frac{2(k+1)}{n} + 1\right) = \frac{2(k+1)}{n} + 1$, luego

$$S^*(f, P_n) = \sum_{k=0}^{n-1} \left(\frac{2}{n}\right) \sup\left(f, \left[\frac{2k}{n} + 1, \frac{2(k+1)}{n} + 1\right]\right) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{2}{n}\left(\frac{2(k+1)}{n} + 1\right) =$$

$$\left(\frac{4}{n^2}\sum_{k=0}^{n-1} k\right) + \left(\frac{2}{n}\sum_{k=0}^{n-1} 1 + \frac{2}{n}\right) = \frac{4}{n^2}\frac{n(n-1)}{2} + 2 + \frac{4}{n} = \frac{2(n-1)}{n} + 2 + \frac{4}{n} = 4 + \frac{2}{n}$$

Observar que

$$\sup\{S_*(f, P_n) : n \in \mathbb{N}, n > 1\} \leq I_*(f) \leq I^*(f) \leq \text{ínf}\{S^*(f, P_n) : n \in \mathbb{N}, n > 1\}$$

por lo que si probamos que $\sup\{S_*(f, P_n) : n \in \mathbb{N}, n > 1\} = \text{ínf}\{S^*(f, P_n) : n \in \mathbb{N}, n > 1\}$ Entonces la función $f(x) = x$ sera integrable en $[1,3]$ y además $\int_1^3 x,\ dx = \sup\{S_*(f, P_n) : n \in \mathbb{N}, n > 1\}$.

En realidad se podía probar por otros argumentos que la función f era integrable, pero de este modo podremos calcular explicitamente la integral.

$\{S_*(f,P_n) : n \in \mathbb{N}, n > 1\} = \{4 - \frac{2}{n} : n \in \mathbb{N}, n > 1\}$

Para caluclar el supremo de dicho conjunto se pude adaptar el resultado del ejercicio 1.6 del práctico 3. O repetir los argumentos a partir de la propiedad arquimediana de $\mathbb{N}$. En cualquier caso podemos concluir que $\sup\{4 - \frac{2}{n} : n \in \mathbb{N}, n > 1\} = 4$.

De forma análoga se puede probar que $\inf\{4 + \frac{2}{n} : n \in \mathbb{N}, n > 1\} = 4$.

Podemos concluir así que $\int_1^3 x\,dx = 4$.