Introducción a la Teoría de la Información

Tasa de Entropía de un Proceso Estocástico.

Facultad de Ingeniería, UdelaR

Agenda

Procesos Estocásticos

Definición (Proceso estocástico)

Un *proceso estocástico* (discreto) es una secuencia indexada de variables aleatorias, $X_1, X_2, \ldots$, caracterizada por una distribución de probabilidad conjunta $p(x_1 \ldots x_n)$ para cada n, $n = 1, 2 \ldots$.

Proceso Estocástico Estacionario

Definición (Proceso estacionario)

Un proceso estocástico es *estacionario* si las distribuciones conjuntas no cambian en el tiempo, es decir

$$P(X_1 = x_1, \dots X_n = x_n) = P(X_{1+r} = x_1, \dots X_{n+r} = x_n)\,,$$

para todo r, n y todo $x_1 \dots x_n \in \mathcal{X}$.

Proceso de Markov

Definición (Proceso de Markov)

Un *proceso o cadena de Markov* es un proceso estocástico en el cual para todo $n > 0$ se cumple

$$P(X_{n+1} = x_{n+1} | X_n = x_n, \ldots X_1 = x_1) = P(X_{n+1} = x_{n+1} | X_n = x_n) \,.$$

Tenemos $p(x_1 \ldots x_n) = p(x_1)p(x_2|x_1)p(x_3|x_2) \ldots p(x_n|x_{n-1})$.

Definición (Estado)

Al valor que toma X_n se le llama *estado* de la cadena en el tiempo n.

Definición (Invariancia en el tiempo)

Asumiremos que las probabilidades condicionales no dependen de n, es decir, para todo $n > 0$ se cumple

$$P(X_{n+1} = b | X_n = a) = P(X_2 = b | X_1 = a) \,.$$

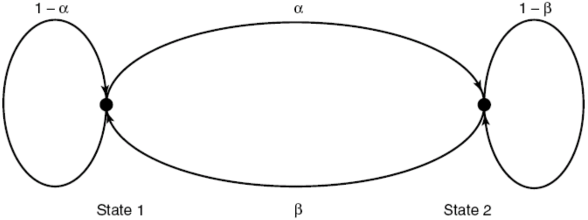
En este caso decimos que el proceso de Markov es *invariante en el tiempo*.

Proceso de Markov

Definición (Matriz de probabilidades de transición)

Definimos la *matriz de probabilidades de transición* como

$$\mathbf{P}_{ij} = P(X_{n+1} = j | X_n = i) \, .$$



Distribución de probabilidad para los estados en cada instante

Sea $\mathbf{p}^{(n)}$ el vector de probabilidades definido como $\mathbf{p}_i^{(n)} = P(X_n = i)$. Entonces, $\mathbf{p}^{(n+1)} = \mathbf{p}^{(n)} \times \mathbf{P} = \mathbf{p}^{(0)} \times \mathbf{P}^n$

Proceso de Markov Estacionario

Definición (Distribución estacionaria)

Una *distribución estacionaria* para los estados de una cadena de Markov es una distribución que se mantiene en el tiempo. Si π es una distribución estacionaria, entonces debe cumplirse

$$\pi = \pi \times \mathbf{P} \,.$$

Observación

Si el estado inicial se elige con distribución estacionaria, el proceso de Markov resulta estacionario.

Proceso de Markov Irreducible/Aperiódico

Definición (Cadena de Markov irreducible)

Una cadena de Markov es *irreducible* si es posible llegar a cualquier estado desde cualquier estado en una cantidad finita de pasos. Es decir, para todo i, j existe k tal que se verifica

$$P(X_{n+k} = j | X_n = i) > 0\,.$$

Definición (Cadena de Markov aperiódica)

Una cadena de Markov es *aperiódica* si para cada estado i existe una constante M_i tal que, para todo $n > M_i$, existe una trayectoria de probabilidad positiva que conduce de i a i en n pasos.

Distribución Límite de un Proceso de Markov

Teorema

Una cadena de Markov irreducible y aperiódica tiene una única distribución estacionaria que aparece como distribución límite cualquiera sea la distribución del estado inicial. Es decir

$$\lim_{n\to\infty} \mathbf{p}^{(0)} \times \mathbf{P}^n = \pi\,, \qquad \text{para cualquier } \mathbf{p}^{(0)}\,,$$

donde π es la única distribución estacionaria del proceso y puede encontrarse resolviendo el sistema de ecuaciones dado por

$$\begin{aligned} \pi \times (\mathbf{I} - \mathbf{P}) &= 0\,, \\ \sum \pi_i &= 1\,. \end{aligned}$$

Tasa de Entropía

Definición (Tasa de entropía: $H(\mathcal{X})$)

La *tasa de entropía* de un proceso $\{X_i\}$ es el límite

$$H(\mathcal{X}) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} H(X_1, \ldots X_n)\,.$$

Ejemplo

Si $\{X_i\}$ son i.i.d,

$$H(\mathcal{X}) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} H(X_1, \ldots X_n) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} n H(X_1) = H(X_1)\,.$$

Tasa de Entropía (alternativa)

Definición (Tasa de entropía: $H'(\mathcal{X})$)

Una definición alternativa de *tasa de entropía*, que intenta capturar un concepto similar es

$$H'(\mathcal{X}) = \lim_{n \to \infty} H(X_n | X_{n-1}, \dots X_1) \,.$$

En general $H'(\mathcal{X})$ y $H(\mathcal{X})$ no tienen por qué coincidir.

Teorema

Si $\{X_i\}$ es un proceso estocástico estacionario, $H'(\mathcal{X})$ y $H(\mathcal{X})$ existen y son iguales.

Tasa de Entropía de Procesos Estacionarios

Teorema

Si $\{X_i\}$ es un proceso estocástico estacionario, $H(X_n|X_{n-1},\ldots X_1) \searrow H'(\mathcal{X})$.

Demostración.

$$\begin{aligned} H(X_{n+1}|X_n,\ldots X_2,X_1) \leq & \quad H(X_{n+1}|X_n,\ldots X_2) \\ = & \quad H(X_n|X_{n-1},\ldots X_1) \end{aligned}$$

□

Tasa de Entropía de Procesos Estacionarios

Teorema

Si $\{X_i\}$ es un proceso estocástico estacionario, $H'(\mathcal{X})$ y $H(\mathcal{X})$ existen y son iguales.

Demostración.

$$\begin{aligned} \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} H(X_n, \ldots X_1) &= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} H(X_i | X_{i-1}, \ldots X_1) \\ &\to H'(\mathcal{X}) \quad \text{(Cesáro).} \end{aligned}$$

□

Teorema (Promedio a la Cesáro)

Si $a_n \to a$, entonces $\bar{a}_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} a_n \to a\,.$

Tasa de Entropía de Procesos de Markov

Teorema

Si $\{X_i\}$ es un proceso de Markov estacionario con distribución estacionaria π,

$$H(\mathcal{X}) = H'(\mathcal{X}) = -\sum_{ij} \pi_i \mathbf{P}_{ij} \log \mathbf{P}_{ij} \, .$$

Demostración.

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} H(X_n|X_{n-1},\ldots X_1) &= \lim_{n\to\infty} H(X_n|X_{n-1}) \\
&= H(X_2|X_1) \\
&= \sum_i \pi_i H(X_2|X_1 = i) \\
&= \sum_i \pi_i \sum_j \mathbf{P}_{ij} \log \frac{1}{\mathbf{P}_{ij}} \, .
\end{aligned}$$

$\square$