Práctico 1
Inducción y recursión

Ejercicio 4 (Reglas sobre palabras)

Bosquejo de solución

a. Para cada conjunto, mostraremos que reglas satisfacen.

A. Σ. Recordemos que $\Sigma = \{a, b\}$.

1. **NO**
   No satisface regla I: $\varepsilon \notin \Sigma$.
   No satisface regla II: $a \in \Sigma$, pero $aaa \notin \Sigma$.
2. **NO**
   Satisface regla I: $a \in \Sigma$.
   Satisface regla II: $b \in \Sigma$.
   Pero no satisface regla III: $a \in \Sigma$, pero $aa \notin \Sigma$.
3. **NO**
   No satisface regla I: $a \in \Sigma$, pero $aa \notin \Sigma$.

B. B $= \{w \in \Sigma^* : w$ tiene largo par$\}$

1. **Si**
   Satisface regla I: ε tiene largo 0 que es par, por lo que pertenece a B.
   Satisface regla II: Si w tiene largo par entonces awa tiene largo par también, por lo que si w pertenece a B entonces awa pertenece a B.

2. **NO**
   No satisface regla I: a tiene largo 1 por lo que a no pertenece a B.
   No satisface regla II: b tiene largo 1 por lo que b no pertenece a B.
   Satisface regla III: Si w tiene largo par entonces ww tiene largo par también, por lo que si w pertenece a B entonces ww pertenece a B.
3. **NO**
   No satisface regla I: Si w tiene largo par n entonces aw tiene largo $n + 1$, que no es par. Por lo que si w pertenece a B entonces aw no pertenece a B.

C. C $= \{w \in \Sigma^* : w$ termina en $a\}$

1. **NO**
   No satisface regla I: ε no termina en a.
   Satisface regla II: si $w \in C$, entonces awa pertenece a C. Incluso no es necesario usar que w termina en a para saber que awa termina en a.
2. **NO**
   Satisface regla I: a termina en a.
   No satisface regla II: b no termina en a.
   Satisface regla III: Si w pertenece a C entonces w termina en a, por lo que ww también termina en a por lo que pertenece a C.

3. SI
Satisface regla I: Si w pertenece a C entonces wa también termina en a por lo que pertenece a C.

D. D $= \{w \in \Sigma^* : w$ es un palíndromo$\}$

1. SI
Satisface regla I: ε es palíndromo.
Satisface regla II: Si w es palíndromo entonces awa también lo es. Por lo que si w pertenece a D entonces awa también.

2. SI
Satisface regla I: a es palíndromo.
Satisface regla II: b es palíndromo.
Satisface regla III: Si w es palíndromo entonces ww también lo es. Por lo que si w pertenece a D entonces ww también.

3. NO
No satisface regla I: Con un contraejemplo se puede mostrar. Tomando el caso $w = b$ palíndromo por lo que pertenece a D, ba no lo es por lo que wa no pertenece a D.

E. E $= \emptyset$

1. NO
No satisface regla I: $\varepsilon \notin \emptyset$. El conjunto vacío esta vacío.
Satisface regla II: nunca se cumple la hipótesis ya que E no tiene elementos, por lo que se cumple trivialmente.

2. NO
No satisface regla I: $a \notin \emptyset$.
No satisface regla II: $b \notin \emptyset$.
Satisface regla III: nunca se cumple la hipótesis ya que E no tiene elementos, por lo que se cumple trivialmente.

3. Si
Satisface regla I: nunca se cumple la hipótesis ya que E no tiene elementos, por lo que se cumple trivialmente.

F. F $= \Sigma^*$ Recordemos que Σ^* es el conjunto de todas las tiras que se pueden construir con Σ.

1. Si
Satisface regla I: $\varepsilon \in \Sigma^*$.
Satisface regla II: si w pertenece a Σ^* entonces awa pertenece a Σ^*.

2. SI
Satisface regla I: $a \in \Sigma^*$.
Satisface regla II: $b \in \Sigma^*$.
Satisface regla III: si w pertenece a Σ^* entonces ww pertenece a Σ^*.

3. SI
Satisface regla I: si w pertenece a Σ^* entonces wa pertenece a Σ^*.

b. A continuación se indica que conjunto queda definido por cada conjunto de reglas.

1. Es el conjunto de las tiras de largo par formadas con la letra a, es decir $\{\varepsilon, aa, aaaa, ...\}$.

2. Es el conjunto de los palíndromos formados por una sola letra del alfabeto Σ y de largo potencia de 2.

3. No tiene pasos base, por lo que define el conjunto vacío.

Ejercicio 8 (Definiciones inductivas)

Bosquejo de solución

Cada ítem describe un lenguaje sobre el alfabeto $\Sigma = \{a, b\}$. Se le pide la definición inductiva de cada lenguaje.

Cabe destacar que puede haber más de una solución para los lenguajes planteados. Por ejemplo, L5 puede ser, con una estrategia similar a L4, expresado como la unión de dos conjuntos.

L1 : $\{\varepsilon, a, aa, aaa, aaaa, \ldots\}$

- I $\varepsilon \in$ L1
- II Si $w \in$ L1, entonces $wa \in$ L1

L2 : $\{\varepsilon, ab, aabb, aaabbb, aaaabbbb, \ldots\}$

- I $\varepsilon \in$ L2
- II Si $w \in$ L2, entonces $awb \in$ L2

L3 : $\{b, aba, aabaa, aaabaaa, aaaabaaaa, \ldots\}$

- I $b \in$ L3
- II Si $w \in$ L3, entonces $awa \in$ L3

L4 : $\{\varepsilon, ab, abab, ababab, abababab, \ldots, ba, baba, bababa, babababa, \ldots\}$

El conjunto L4 puede ser pensado como la unión de dos conjuntos, $L4_1$ y $L4_2$, definidos inductivamente, luego L4 queda determinado con dos cláusulas base que incluyen los elementos de los conjuntos antes definidos.

- I $\varepsilon \in L4_1$
- II Si $w \in L4_1$, entonces $abw \in L4_1$

- I $ba \in L4_2$
- II Si $w \in L4_2$, entonces $baw \in L4_2$

- I Si $w \in L4_1$, entonces $w \in$ L4
- II Si $w \in L4_2$, entonces $w \in$ L4

L5 : $\{\varepsilon, a, ab, aba, abab, ababa, ababab, \ldots\}$

- I $\varepsilon \in$ L5
- II $a \in$ L5
- III Si $w \in$ L5, entonces $abw \in$ L5

L6 : $\{\alpha \in \Sigma^* : \alpha \text{ es un palíndromo}\}$

- I $\varepsilon \in$ L6
- II Si $x \in \Sigma$, entonces $x \in$ L6
- III Si $w \in$ L6, entonces $awa \in$ L6
- IV Si $w \in$ L6, entonces $bwb \in$ L6

Ejercicio 9 (Inserción a derecha)

Bosquejo de solución

Como primer paso, reescribiremos las definiciones inductivas de los conjuntos para que posean una regla inductiva menos y sigan construyendo el mismo conjunto. El resultado es el siguiente:

I $\varepsilon \in \Gamma$ II Si $\alpha \in \Gamma$, $x \in \Sigma$ entonces $x\alpha \in \Gamma$	I $\varepsilon \in \Delta$ II Si $\alpha \in \Delta$, $y \in \Sigma$ entonces $\alpha y \in \Delta$

Durante el resto de la demostración trabajaremos con esta definición inductiva.

Se nos pide probar que $\Gamma = \Delta$, lo cual equivale a probar que $\Gamma \subseteq \Delta$ y $\Delta \subseteq \Gamma$; es decir, todos los elementos de Γ estan en Δ y todos los elementos de Δ estan en Γ.

Comenzaremos probando que $\Gamma \subseteq \Delta$. Esto equivale a probar que $(\bar{\forall}\alpha \in \Gamma)\alpha \in \Delta$. Para demostrar esto, utilizaremos el PIP sobre Γ.

Identificacion de la propiedad: $P(\alpha) := \alpha \in \Delta$.

Paso Base

T) $P(\varepsilon) : \varepsilon \in \Delta$

Demo)

Por la regla i) de la definición de Δ, tenemos que $\varepsilon \in \Delta$. Por lo tanto, se cumple la tesis.

Paso Inductivo

H) $P(\alpha) : \alpha \in \Delta$

T) $P(x\alpha) : x\alpha \in \Delta$

Demo)

Por Hipotesis Inductiva sabemos que $\alpha \in \Delta$. Tenemos que probar que $x\alpha \in \Delta$. Como no se da ninguna condición adicional sobre α, podemos reescribir la Tesis Inductiva de la siguiente forma: $(\bar{\forall}\alpha \in \Delta)x\alpha \in \Delta$. Probaremos esta propiedad utilizando el PIP sobre Δ.

Id. de la propiedad: $P'(\alpha) := x\alpha \in \Delta$.

Paso Base

T') $P'(\varepsilon) : x\varepsilon \in \Delta$

Demo)

Por regla ii) de la definición inductiva de Δ, sabemos que si $\alpha \in \Delta$, $y \in \Sigma$ entonces $\alpha y \in \Delta$. Por regla i) de la definición inductiva de Δ, sabemos que $\varepsilon \in \Delta$. Por lo tanto, tomando $y = x$ y $\alpha = \varepsilon$, tenemos que $\alpha y = \varepsilon x = x = x\varepsilon \in \Delta$. Esto prueba la tesis.

Paso Inductivo

H') $P'(\alpha) : x\alpha \in \Delta$

T') $P'(\alpha y) : x\alpha y \in \Delta$

Demo)

Por **H'** sabemos que $x\alpha \in \Delta$. Por regla ii) de la def. inductiva de Δ, tenemos que $x\alpha y \in \Delta$. Esto prueba la tesis.

Como nos encontramos bajo las hipotesis del PIP para Δ, podemos afirmar que $(\bar{\forall}\alpha \in \Delta) x\alpha \in \Delta$.

Esto prueba el Paso Inductivo del PIP sobre Γ.

Como nos encontramos bajo las hipotesis del PIP para Γ, podemos afirmar que $(\bar{\forall}\alpha \in \Gamma)\alpha \in \Delta$. Es decir, probamos que $\Gamma \subseteq \Delta$.

Para probar que $\Gamma = \Delta$, falta probar que $\Delta \subseteq \Gamma$. Esta parte de la prueba es bastante similar a la anterior.

Probar que $\Delta \subseteq \Gamma$ equivale a probar que $(\bar{\forall}\alpha \in \Delta)\alpha \in \Gamma$. Para esto, utilizaremos el PIP sobre Δ.

Id. de la propiedad: $Q(\alpha) := \alpha \in \Gamma$.

Paso Base

T) $Q(\varepsilon) : \varepsilon \in \Gamma$

Demo)

Por la regla i) de la def. de Γ, tenemos que $\varepsilon \in \Gamma$. Por lo tanto, se cumple la tesis.

Paso Inductivo

H) $Q(\alpha) : \alpha \in \Gamma$

T) $Q(\alpha y) : \alpha y \in \Gamma$

Demo)

Por Hipotesis Inductiva sabemos que $\alpha \in \Gamma$. Tenemos que probar que $\alpha y \in \Gamma$. Como no se da ninguna condición adicional sobre α, podemos reescribir la Tesis Inductiva de la siguiente forma: $(\bar{\forall}\alpha \in \Gamma)\alpha y \in \Gamma$. Probaremos esta propiedad utilizando el PIP sobre Γ.

Id. de la propiedad: $Q'(\alpha) := \alpha y \in \Gamma$.

Paso Base

T') $Q'(\varepsilon) : \varepsilon y \in \Gamma$

Demo)

Por regla ii) de la definición inductiva de Γ, sabemos que si $\alpha \in \Gamma$, $x \in \Sigma$ entonces $x\alpha \in \Gamma$. Por regla i) de la definición inductiva de Γ, sabemos que $\varepsilon \in \Gamma$. Por lo tanto, tomando $x = y$ y $\alpha = \varepsilon$, tenemos que $x\alpha = y\varepsilon = y = \varepsilon y \in \Gamma$. Esto prueba la tesis.

Paso Inductivo

H') $Q'(\alpha) : \alpha y \in \Gamma$

T') $Q'(x\alpha) : x\alpha y \in \Gamma$

Demo)

Por **H'**, sabemos que $\alpha y \in \Gamma$. Por regla ii) de la def. inductiva de Γ, tenemos que $x\alpha y \in \Gamma$. Esto prueba la tesis.

Como nos encontramos bajo las hipotesis del PIP para Γ, podemos afirmar que $(\bar{\forall}\alpha \in \Gamma)\alpha y \in \Gamma$.

Esto prueba el paso inductivo del PIP sobre Δ.

Como nos encontramos bajo las hipotesis del PIP para Δ, podemos afirmar que $(\bar{\forall}\alpha \in \Delta)\alpha \in \Gamma$. Es decir, probamos que $\Delta \subseteq \Gamma$.

Finalmente, como tenemos que $\Gamma \subseteq \Delta$ y $\Delta \subseteq \Gamma$, podemos afirmar que $\Gamma = \Delta$.

Ejercicio 10 (Relaciones inductivas)

Bosquejo de solución

a.
- $\langle 0, 0\rangle \in S$
  Demostración:
  $0 \in \mathbb{N}$ (por definición de $\mathbb{N}$)
  $\Rightarrow$ (por regla (I) de S)
  $\langle 0, 0\rangle \in S$
  $\square$
- $0 \notin S$
  Demostración:
  Por construcción, todos los elementos de S son parejas de naturales ($S \subseteq \mathbb{N} \times \mathbb{N}$)
  Como 0 no es una pareja, $0 \notin S$
- $\langle \pi, \pi\rangle \notin S$
  Demostración: (ver Nota (1))
  Por construcción, todos los elementos de S son parejas de naturales ($S \subseteq \mathbb{N} \times \mathbb{N}$).
  Como π no es un natural, la pareja $\langle \pi, \pi\rangle \notin S$
- $\langle 2, 3\rangle \in S$
  Demostración:
  $2 \in \mathbb{N}$ (propiedad conocida de los naturales)
  $\Rightarrow$ por S(I)
  $\langle 2, 2\rangle \in S$
  $\Rightarrow$ por S(II)
  $\langle 2, 3\rangle \in S$
  $\square$
- $\langle 3, 2\rangle \notin S$
  Demostración: (ver Nota (1))
  Supongamos que $\langle 3, 2\rangle \in S$. El elemento $\langle 3, 2\rangle$ se debió obtener por la regla II ya que la regla I solo produce pares con los dos componentes iguales. Para que la regla II sea aplicable debe cumplirse que $\langle 3, 1\rangle \in S$.

  Aplicando el mismo razonamiento: $\langle 3, 1\rangle$ se obtiene por la regla II y debe cumplirse que $\langle 3, 0\rangle \in S$.

  Aplicando una vez más el mismo razonamiento, se concluye que $\langle 3, -1\rangle \in S$. Esto último no se cumple ya que $S \subseteq \mathbb{N} \times \mathbb{N}$.

Nota (1) En este parte hemos dado por válido que el conjunto S está incluido en $\mathbb{N}\times\mathbb{N}$. Ese supuesto nos permitió probar de manera bastante directa los casos de no pertenencia a S. De todos modos la propiedad asumida $S \subseteq \mathbb{N}\times\mathbb{N}$ se puede probar fácilmente usando el PIP de S (que se define en la siguiente parte).

b. PIP para S:

Sea $\mathbb{P}$ una propiedad. Si se cumple:

- $(\bar{\forall} n \in \mathbb{N})\ \mathbb{P}(\langle n, n\rangle)$
- $(\bar{\forall}\, \langle n, m\rangle \in S)(\mathbb{P}(\langle n, m\rangle) \Rightarrow \mathbb{P}(\langle n, m+1\rangle))$

entonces se cumple: $(\bar{\forall}\, \langle n, m\rangle \in S)\ \mathbb{P}(\langle n, m\rangle)$.

c. Probaremos por inducción en S que $S \subseteq T$:

$$(\bar{\forall}\, \langle n, m\rangle \in S)\ \ \langle n, m\rangle \in T \tag{1}$$

Como T está definido por comprensión, la pertenencia a T equivale a la propiedad que caracteriza el conjunto. Por lo tanto, queremos probar:

$$(\bar{\forall}\, \langle n, m\rangle \in S)\ m \leq n \tag{2}$$

Haremos entonces una demostración usando PIP de S con la propiedad:

$$\mathbb{P}(\langle n, m\rangle) := n \leq m$$

Demostración:

- **Paso base:** $(\bar{\forall} n \in \mathbb{N})\ \mathbb{P}(\langle n, n\rangle) : (\bar{\forall} n \in \mathbb{N})\ n \leq n$
  Demostración: Se cumple por propiedad conocida de la relación $\leq$ en $\mathbb{N}$.
- **Paso Inductivo:**
  Para todo $\langle n, m\rangle \in S$:
  (H) $\mathbb{P}(\langle n, m\rangle)$: $n \leq m$
  (T) $\mathbb{P}(\langle n, m+1\rangle)$: $n \leq m+1$
  Demostración: Se cumple por aritmética (propiedad conocidad en $\mathbb{N}$).

Queda probado por PIP que se cumple (2).

Como se explicó más arriba, esto equivale a (1) que a su vez equivale a $S \subseteq T$.

Vamos a probar ahora que:

$$T \subseteq S \tag{3}$$

lo que se traduce como:

$$(\bar{\forall}\, \langle i, j\rangle \in T)\ \langle i, j\rangle \in S \tag{4}$$

Teniendo en cuenta que $T = \{\langle n, n+m\rangle\ / n \in \mathbb{N}, m \in \mathbb{N}\}$ obtenemos:

$$(\bar{\forall} n \in \mathbb{N})(\bar{\forall} m \in \mathbb{N})\, \langle n, n+m \rangle \in S \tag{5}$$

Para probar lo anterior, vamos a considerar $n \in \mathbb{N}$ un natural arbitrario y vamos a probar por inducción en m (natural):

$$(\bar{\forall} m \in \mathbb{N})\, \langle n, n+m \rangle \in S \tag{6}$$

Definimos entonces la propiedad $\mathbb{P}(m) := \langle n, n+m \rangle \in S$ y aplicamos el PIP de $\mathbb{N}$.

- **Paso Base:** $(\bar{\forall} n \in \mathbb{N})\mathbb{P}(0) \quad : \quad (\bar{\forall} n \in \mathbb{N})\, \langle n, n+0 \rangle \in S$
  Demostración: Se cumple por regla (I) de S.
- **Paso inductivo:**
  (H) $\mathbb{P}(m) \quad : \quad \langle n, n+m \rangle \in S$
  (T) $\mathbb{P}(m+1) \quad : \quad \langle n, n+m+1 \rangle \in S$
  Demostración: A partir de la hipótesis inductiva, aplicamos la regla II de S y obtenemos la tesis[1].

Aplicando PIP del conjunto $\mathbb{N}$, se deduce (6).

Como la prueba se hizo para un natural n arbitrario, es válida para todo natural n, con lo que queda demostrado (5) y por lo tanto $T \subseteq S$.

Queda entonces probado que $S = T$

Probaremos ahora que $Q = T$. En primer término, se probará que $Q \subseteq T$. Esta prueba se puede hacer de una forma similar a la usada para probar $S \subseteq T$, esto es por inducción en Q.

Para ilustrar una manera diferente, vamos a aplicar otro método para esta prueba. Probaremos que el conjunto T cumple con las reglas que definen a Q:

I Si $n \in \mathbb{N}$ entonces $\langle 0, n \rangle \in T$
II Si $\langle n, m \rangle \in T$ entonces $\langle n+1, m+1 \rangle \in T$

Como T se define por comprensión, podemos sustituir la pertenencia a T por la propiedad característica:

I Si $n \in \mathbb{N}$ entonces $0 \leq n$
II Si $n \leq m$ entonces $n+1 \leq m+1$

Ambas reglas se cumplen por propiedades conocidas de la relación $\leq$ en $\mathbb{N}$.

Ahora bien, como Q es el mínimo conjunto que cumple con estas reglas, se concluye que $Q \subseteq T$.

Vamos a probar ahora que:

$$T \subseteq Q \tag{7}$$

Usaremos un método análogo al que usamos para probar la inclusión de T en S.

[1] Notar que estamos usando sin mencionarlo la asociatividad de la suma de naturales

La propiedad (7) se traduce como:

$$(\bar{\forall} \langle i, j\rangle \in T) \langle i, j\rangle \in Q \tag{8}$$

Teniendo en cuenta que $T = \{\langle n, n+m\rangle / n \in \mathbb{N}, m \in \mathbb{N}\}$ obtenemos:

$$(\bar{\forall} n \in \mathbb{N})(\bar{\forall} m \in \mathbb{N}) \langle n, n+m\rangle \in Q \tag{9}$$

Para probar lo anterior, vamos a considerar $m \in \mathbb{N}$ un natural arbitrario y vamos a probar por inducción en n (natural):

$$(\bar{\forall} n \in \mathbb{N}) \langle n, n+m\rangle \in Q \tag{10}$$

Definimos entonces la propiedad $\mathbb{P}(n) := \langle n, n+m\rangle \in Q$ y aplicamos el PIP de $\mathbb{N}$.

- **Paso Base:** $(\bar{\forall} m \in \mathbb{N})\mathbb{P}(0) \quad : \quad (\bar{\forall} m \in \mathbb{N}) \langle 0, 0+m\rangle \in Q$
  Demostración: Se cumple por regla (I) de Q.
- **Paso inductivo:**
  (H) $\mathbb{P}(n) \quad : \quad \langle n, n+m\rangle \in Q$
  (T) $\mathbb{P}(n+1) \quad : \quad \langle n+1, n+1+m\rangle \in Q$
  Demostración: A partir de la hipótesis inductiva, aplicamos la regla II de Q y obtenemos la tesis[2].

Aplicando PIP del conjunto $\mathbb{N}$, se deduce (10).

Como la prueba se hizo para un natural m arbitrario, es válida para todo natural m, con lo que queda demostrado (9) y por lo tanto $T \subseteq S$.

[2]Notar que estamos usando sin mencionarlo la asociatividad y conmutatividad de la suma de naturales