Universidad de la República **Cálculo Diferencial e Integral en Varias Variables**
Facultad de Ingeniería - IMERL **Febrero 2020**

EXAMEN – Viernes 28 de febrero de 2020

SOLUCIÓN

Ejercicio 1.(10 pts.) Los $z \in \mathbb{C}$ que verifican la ecuación $e^z = i$ son:

$\{(\pi/2 + 2k\pi)i : k \in \mathbb{Z}\}$

Si $z = a + bi$, entonces la ecuación es $e^a e^{bi} = e^{i\frac{\pi}{2}}$ que se verifica sii $a = 0$, $b = \pi/2 + 2k\pi$

Ejercicio 2.(10 pts.) Sea $k \in \mathbb{R}, k > 0$. La solución general de la ecuación diferencial

$$y'' = -ky$$

es:

$y(x) = c_1 \sin(\sqrt{k}x) + c_2 \cos(\sqrt{k}x)$

Ejercicio 3.(10 pts.) Clasificar, justificando:

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2-1} dx$$

La integral **DIVERGE**. Para ver esto, basta observar que por definición se tiene que:

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2-1} dx = \int_1^{2} \frac{1}{x^2-1} dx + \int_2^{+\infty} \frac{1}{x^2-1} dx,$$

y que la integral a la izquierda de la igualdad converge si y solamente si ambos sumandos a la derecha de la igualdad convergen. Además,

$$\int_1^{2} \frac{1}{x^2-1} dx = \lim_{a\to 1} \int_a^{2} \frac{1}{x^2-1} dx$$

y $\frac{1}{x^2-1} = \frac{-1}{2(x+1)} + \frac{1}{2(x-1)}$ por lo cual basta estudiar

$$\lim_{a\to 1} \int_a^{2} \frac{-1}{2(x+1)} + \frac{1}{2(x-1)} = \lim_{a\to 1} -1/2L(3) + 1/2L|a+1| - 1/2L|a-1| = +\infty$$

Como este sumando diverge, alcanza para decir que la integral inicial $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^2-1} dx$ diverge.

Ejercicio 4.(20 pts.)

(1) Sea $X \subset \mathbb{R}^n$ un conjunto no vacío. Probar que X es cerrado si y sólo si para toda sucesión $(x_n)_{n\in I\!N} \subset X$ tal que $x_n \to x$ se tiene $x \in X$. **Ver teórico**

(2) Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función continua. Probar que el gráfico de f es un conjunto cerrado en $\mathbb{R}^2$. (Recordar que el gráfico de f es el conjunto $\{(x, f(x)) \in \mathbb{R}^2 : x \in \mathbb{R}\}$).
Utilizando el item anterior, tomamos una sucesión $(x_n, f(x_n))_{n\in I\!N} \subset Graf(f)$ tal que $(x_n, f(x_n)) \to (x, y)$ y queremos probar $(x, y) \in Graf(f)$. Primero observar que $(x_n, f(x_n)) \to (x, y)$ si y solamente si $x_n \to x$ y $f(x_n) \to y$. Por otro lado, como f es continua, se tiene que $x_n \to x$ implica $f(x_n) \to f(x)$. Por unicidad del límite tenemos entonces $y = f(x)$, y por lo tanto el límite de la sucesión $(x_n, f(x_n))$ es $(x, f(x)) \in Graf(f)$, como se quería probar.

Ejercicio 5.(15 pts.) Consideremos $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ tal que:

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2+y^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

Estudiar la continuidad de f.

En todo punto $(x, y) \neq (0, 0)$, la función f es continua por ser cociente de funciones continuas con el denominador que no se anula. Para estudiar la continuidad en el punto $(0, 0)$, estudiamos el límite $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy}{x^2+y^2}$. Considerando las rectas por el origen de la forma $y = mx$, vemos que $\lim_{x\to 0} \frac{mx^2}{x^2+m^2x^2} = \frac{m}{1+m^2}$. Como este resultado depende del valor de m, podemos asegurar que **no existe** $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy}{x^2+y^2}$ y por lo tanto que f no es continua en $(0, 0)$.

Ejercicio 6.(30 pts.) Se considera $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f(x, y) = \sin(x) + \sin(y)$.

(1) Demostrar que el plano $z = 2$ es tangente al gráfico de f en el punto $(\pi/2, \pi/2, 2)$.
(2) Hallar todos los puntos de tangencia del plano $z = 2$ con el gráfico de f.
(3) Sea $g(x, y) = (h(x, y), f(x, y))$, donde $h : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ es de clase C^∞. Demostrar que si $h(0, \pi) = \pi/2$, entonces

$$\nabla_{(0,\pi)}(f \circ g) = (1, -1)$$

Nota: $\nabla_{(0,\pi)}(f \circ g)$ denota el gradiente de la función $f \circ g$ en el punto $(0, \pi)$.

(1) El plano tangente al gráfico de f en un punto $(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$ tiene ecuación $z = f(x_0, y_0) + \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)(x - x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)(y - y_0)$. En este caso: $\frac{\partial f}{\partial x}(\pi/2, \pi/2) = \cos(\pi/2) = 0$, $\frac{\partial f}{\partial y}(\pi/2, \pi/2) = \cos(\pi/2) = 0$ y $f(\pi/2, \pi/2) = 2$. Por lo tanto $z = 2$ es tangente al gráfico de f en el punto $(\pi/2, \pi/2, 2)$.

(2) Utilizando la ecuación del plano tangente como en el item anterior, debemos hallar los puntos (x, y) tales que $\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = 0$ y tales que $f(x, y) = 2$. Como $\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = \cos(x)$ y $\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = \cos(y)$, obtenemos $x = \pi/2 + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$, $y = \pi/2 + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$.

(3) Sea $g(x, y) = (h(x, y), f(x, y))$, donde $h : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ es de clase C^∞. Demostrar que si $h(0, \pi) = \pi/2$, entonces

$$\bigtriangledown_{(0,\pi)}(f \circ g) = (1, -1).$$

Aplicando la regla de la cadena, sabemos que

$$\bigtriangledown_{(0,\pi)}(f \circ g) = \bigtriangledown_{g(0,\pi)} f D_{(0,\pi)} g.$$

Como $g(0, \pi) = (h(0, \pi), f(0, \pi)) = (\pi/2, 0)$, $\bigtriangledown_{g(0,\pi)}(f) = \bigtriangledown_{(\pi/2,0)}(f) = (0, 1)$. Por otro lado

$$D_{(0,\pi)} g = \begin{pmatrix} \frac{\partial h}{\partial x}(0, \pi) & \frac{\partial h}{\partial y}(0, \pi) \\ \frac{\partial f}{\partial x}(0, \pi) & \frac{\partial f}{\partial y}(0, \pi) \end{pmatrix}$$

Así que, $\bigtriangledown_{g(0,\pi)} f D_{(0,\pi)} g = (0, 1) \begin{pmatrix} \frac{\partial h}{\partial x}(0, \pi) & \frac{\partial h}{\partial y}(0, \pi) \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = (1, -1)$

Ejercicio 7.(10 pts.) Calcular, justificando:

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy - \sin(x)\sin(y)}{x^2 + y^2}$$

Usando el desarrollo de Taylor de orden 2 de la función $f(x, y) = \sin(x)\sin(y)$ en el punto $(0, 0)$ tenemos la igualdad $f(x, y) = xy + R_2(x, y)$ con $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{R_2(x,y)}{x^2+y^2} = 0$ válida en un entorno de $(0, 0)$. Por lo tanto

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy - \sin(x)\sin(y)}{x^2 + y^2} = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy - xy - R_2(x, y)}{x^2 + y^2} == \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{-R_2(x, y)}{x^2 + y^2} = 0$$

Ejercicio 8.(20 pts.)

(1) Sea $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ una función continua. Se sabe que:

$$\int_0^1 \left[\int_{x^2}^{x} f(x, y)dy\right] dx = 1/2, \int_0^1 \left[\int_{y}^{1} f(x, y)dx\right] dy = 1$$

Calcular, justificando:

$$\int_0^1 \left[\int_{\sqrt{y}}^{1} f(x, y)dx\right] dy$$

Bosquejando las regiones de integración podemos observar que:

$$\int_0^1 \left[\int_{y}^{1} f(x, y)dx\right] dy = \int_0^1 \left[\int_{x^2}^{x} f(x, y)dy\right] dx + \int_0^1 \left[\int_{\sqrt{y}}^{1} f(x, y)dx\right] dy$$

y por lo tanto despejando, obtenemos:

$$\int_0^1 \left[\int_{\sqrt{y}}^{1} f(x, y)dx\right] dy = 1/2$$

(2) Sea R la región acotada entre los gráficos de $y = \sin(x)$ y el eje x en el intervalo $[0, 3\pi/2]$. Calcular

$$\iint_R 2y \; dxdy$$

La integral doble a calcular es:

$$\int_0^{\pi} \int_0^{\sin(x)} 2y \; dydx + \int_{\pi}^{3\pi/2} \int_{\sin(x)}^{0} 2y \; dydx$$

Observar que $\int_0^{\sin(x)} 2y \; dy = (\sin(x))^2$ y que una primitiva de $(\sin(x))^2$ es $\frac{1}{2}(-\cos(x)\sin(x) + x)$. Por lo tanto $\int_0^{\pi} \int_0^{\sin(x)} 2y \; dydx = \pi/2$. De la misma forma se obtiene $\int_{\pi}^{3\pi/2} \int_{\sin(x)}^{0} 2y \; dydx = -\pi/4$. Y en consecuencia

$$\iint_R 2y \; dxdy = \pi/4$$