

# Señales Aleatorias y Modulación

## Segundo Parcial

Instituto de Ingeniería Eléctrica

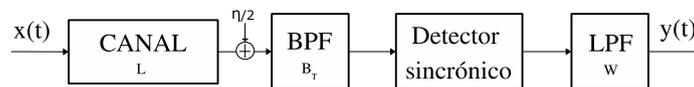
3 de diciembre de 2020

### Indicaciones:

- La prueba tiene una duración total de 3 horas.
- Cada hoja entregada debe indicar nombre, número de C.I., y número de hoja. La hoja 1 debe indicar además el total de hojas entregadas.
- Se deberá utilizar únicamente un lado de las hojas.
- Cada problema o pregunta se deberá comenzar en una hoja nueva. Se evaluará explícitamente la claridad, prolijidad y presentación de las soluciones, desarrollos y justificaciones.
- Pueden utilizarse resultados teóricos del curso sin hacer su deducción siempre que la letra no lo exija explícitamente. Se evaluará la correcta formulación y validez de hipótesis.

### Problema 1 [30 pts.]

Se considera un sistema SSB con detección sincrónica, donde el filtro pasabanda del receptor es simétrico respecto a  $f_c + \frac{B_T}{2}$ , siendo  $f_c$  la frecuencia portadora y  $B_T$  el ancho de banda del filtro ( $B_T \geq W$ ). Se supone que el canal cumple con las hipótesis habituales, con una atenuación  $L = 30$  dB e introduce ruido AWGN con densidad espectral de potencia  $\frac{\eta}{2}$ , con  $\eta = 10^{-8}$  W/Hz .



- Escribir las componentes en fase y cuadratura de la señal SSB a la salida del canal.
- Escribir la expresión del ruido después del filtro pasabanda previo al detector sincrónico (ver figura) en sus componentes en fase y cuadratura. Enunciar las principales propiedades de las mismas, en particular indicar potencia media y bosquejar la densidad espectral de potencia.
- Encontrar expresiones para las componentes de ruido y señal a la salida del receptor. Calcular la  $SNR_D$  en función de la potencia de la señal transmitida  $S_T$ .
- Repetir la parte anterior si existe un error de sincronismo  $\theta$  en la detección sincrónica, especificando para el caso en que el mensaje es un tono  $x(t) = A_m \sin(w_m t)$ .

Se desea utilizar dicho sistema para transmitir audio de alta fidelidad, con  $W = 20$  kHz y una  $SNR_D \geq 40$  dB.

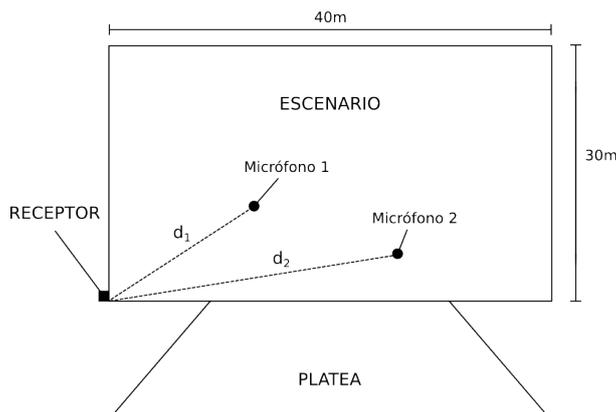
- Hallar la mínima potencia de transmisión necesaria  $S_{T_1}$  para cumplir con los requerimientos planteados, considerando que no existe error de sincronismo.
- Para trabajar con una potencia de transmisión menor, se decide introducir un repetidor. Indicar dónde lo colocaría y justificar.
- Calcular la nueva potencia de transmisión necesaria  $S_{T_2}$  correspondiente al diseño propuesto en la parte anterior. Considerar que el repetidor introducido es ideal.

## Problema 2 [20 pts.]

Se desea diseñar un micrófono inalámbrico para espectáculos con modulación FM. Debe operar en la banda de UHF en el rango [470 - 475] MHz y se debe mantener una guarda de 10 kHz entre canales. La señal de audio a transmitir tiene ancho de banda  $W = 15$  kHz y potencia  $S_x = 1/2$ . Se transmite con potencia de transmisión  $S_T$  y la desviación en frecuencia  $f_\Delta$  debe estar en el rango [15, 45] kHz. Para modelar el sistema se considera:

- Atenuación (dB):  $L(d) = L_0 + \alpha d$ , con  $\alpha = 0.25$  dB/m y  $L_0 = 50$  dB.
- Ruido AWGN con densidad espectral de potencia constante:  $G(f) = \eta/2$ , con  $\eta = 10^{-13}$  mW/Hz.

Además, el receptor tiene ganancia variable  $g = L(d)$ , siendo  $d$  la distancia entre el receptor y el transmisor (ver figura).



- (a) Diseñar  $f_\Delta$  de manera de maximizar el número de canales dentro de la banda asignada. Calcular el ancho de banda de cada canal  $B$  y el número total de canales  $n_C$ .
- (b) Hallar la potencia de ruido en recepción  $N(d)$  cuando el transmisor se encuentra a una distancia  $d$ . Indicar la relación señal a ruido en detección correspondiente  $SNR_D(d)$ .

En recepción es necesario trabajar con audio de alta fidelidad, para lo cual se debe tener una  $SNR_D$  mayor a 50 dB.

- (c) Calcular la mínima potencia de transmisión  $S_T$  para tener audio de alta fidelidad en recepción.

Al trabajar con varios micrófonos en simultáneo se usan distintos canales de frecuencia. Para combinar las señales de audio se debe tener en cuenta la  $SNR_D$  de cada uno de los micrófonos y la potencia de las señales de audio recibidas. Asumir que se trabaja con dos micrófonos como se muestra en la figura.

- (d) ¿Cuál es la máxima relación (diferencia en dB) entre las  $SNR_D$  de ambos que puede ocurrir con la misma  $S_T$ ?
- (e) ¿Existe diferencia entre las potencias de las señales de audio recibidas?

## Pregunta [10 pts.]

Se desea diseñar un receptor de FM que logre recibir y demodular FM comercial. Para ello se propone utilizar la técnica de recepción superheterodina, con frecuencia intermedia  $f_{FI} = 10.7$  MHz. En FM comercial se tiene asignado el espectro de 88 MHz a 108 MHz, se utiliza una constante de desviación de frecuencia  $f_\Delta = 75$  KHz y señales de ancho de banda  $W = 15$  KHz.

- (a) Dar un diagrama de bloques completo del receptor superheterodino para FM comercial. Indicar claramente los valores de los parámetros así como también los criterios de diseño utilizados.
- (b) ¿Qué es la frecuencia imagen y cómo se evitan sus efectos? En particular explicar cuál componente del diagrama de bloques de la parte anterior es imprescindible para esto.
- (c) Describir las características de los filtros de pre-énfasis y de-énfasis e indicar su utilidad. Explicar por qué no se utilizan dichos filtros para modulación lineal.

# Solución

## Problema 1

(a) Asumimos que  $x_T(t)$  es la señal transmitida USSB

$$\Rightarrow x_T(t) = \frac{A_c}{2} [x(t) \cos w_c t - \hat{x}(t) \sin w_c t]$$

$$\Rightarrow x_R(t) = \frac{A_c}{2\sqrt{L}} [x(t) \cos w_c t - \hat{x}(t) \sin w_c t]$$

siendo  $\hat{x}(t)$  la transformada de Hilbert de  $x(t)$ :

$$\hat{x}(t) = h_Q(t) * x(t) \quad h_Q(t) = \frac{1}{\pi t} \leftrightarrow H_Q(f) = -j \operatorname{sgn}(f)$$

(b) Aplicando el modelo de ruido pasabanda podemos descomponerlo en sus componentes en fase y cuadratura;  $n_i(t)$  y  $n_q(t)$  respectivamente:

$$\Rightarrow n(t) = n_i(t) \cos w_c t - n_q(t) \sin w_c t$$

Se cumple que estas componentes son señales gaussianas estacionarias con:

$$\bar{n}_i = \bar{n}_q = 0$$

$$S_N = \bar{n}^2 = \bar{n}_i^2 = \bar{n}_q^2 = \eta \int_{f_c}^{f_c+B_T} H_{B_T}^2(f) df = B_T \eta$$

Su correspondientes densidades espectrales serán:

$$G_{n_i}(f) = G_{n_q}(f) = G_n(f + f_c)u(f + f_c) + G_n(f - f_c)[1 - u(f - f_c)]$$

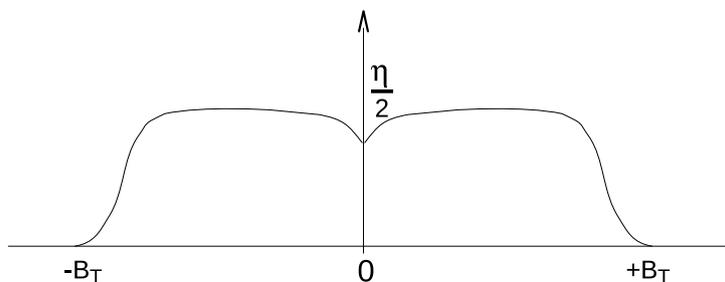


Figura 1: Bosquejo de potencia espectral  $G_{n_i}(f)$  y  $G_{n_q}(f)$  de las componentes.

(c) El receptor sincrónico se queda con las componentes en fase de la señal

$$y(t) = \frac{A_c}{2\sqrt{L}} x(t) + n_i(t)$$

El filtro de salida elimina las frecuencias mayores a  $W \Rightarrow$  podemos asumir  $B_T = W$

$$\Rightarrow \text{SNR}_D = \frac{S_D}{N_D} = \frac{A_c^2 S_x}{4LW\eta} = \frac{S_T}{LW\eta} \quad \left( S_T = \frac{A_c^2 S_x}{4} \right)$$

(d) Si hay error de sincronismo  $\Rightarrow x_o(t) = \cos(w_c t + \theta)$ . Si tenemos

$$x_R(t) = A_i(t) \cos w_c t - A_q(t) \sin w_c t$$

con

$$A_i(t) = x_i(t) + n_i(t);, \quad A_q(t) = x_q(t) + n_q(t)$$

La señal filtrada a la salida del detector será:

$$\begin{aligned} y(t) &= A_i(t) \cos \theta + A_q(t) \sin \theta \\ &= \left( \frac{A_c A_m \sin w_m t}{2\sqrt{L}} + n_i(t) \right) \cos(\theta) + \left( -\frac{A_c A_m \cos w_m t}{2\sqrt{L}} + n_q(t) \right) \sin(\theta) \end{aligned}$$

Por lo tanto:

$$\begin{aligned} x_D(t) &= \frac{A_c A_m}{2\sqrt{L}} (\sin w_m t \cos(\theta) - \cos w_m t \sin(\theta)) = \frac{A_c A_m}{2\sqrt{L}} \sin(w_m t - \theta) \\ n_D(t) &= n_i(t) \cos(\theta) + n_q(t) \sin(\theta) \end{aligned}$$

De donde resulta:

$$\Rightarrow S_D = \frac{A_c^2 A_m^2}{4L} \quad N_D = n_i^2 \cos^2(\theta) + n_q^2 \sin^2(\theta) = W\eta(\cos^2(\theta) + \sin^2(\theta))$$

$$\Rightarrow \text{SNR}_D = \frac{S_D}{N_D} = \frac{A_c^2 A_m^2}{4LW\eta} = \frac{S_T}{LW\eta}$$

(e)

$$\text{SNR}_{D_1} = \frac{S_{T_1}}{\eta L B_T} = \frac{S_{T_1}}{\eta L W} \geq \text{SNR}_D = 40dB$$

$$S_{T_1} = \text{SNR}_D \times \eta L W = 2 \text{ kWatt}$$

(f) En el punto medio, porque es el que hace que la potencia de transmisión necesaria sea lo menor posible.

(g)

$$\text{SNR}_{D_1} = \frac{S_{T_2}}{2\eta(1/2)\sqrt{L}B_T} = \frac{S_{T_2}}{2\eta(1/2)\sqrt{L}W} \geq \text{SNR}_D = 40dB$$

$$S_{T_1} = \text{SNR}_D \times 2\eta(1/2)\sqrt{L}W = 122,6 \text{ Watt}$$

## Problema 2

(a) Para los valores posibles de  $f_\Delta$  y con  $W = 15 \text{ kHz}$  se tiene  $D = \frac{f_\Delta}{W} \in [1, 3]$ . Aplicando la regla de Carson se calcula el ancho de banda de un canal:

$$B = 2(D + 2)W \in [90, 150] \text{ kHz.}$$

Para maximizar el número de canales se debe elegir el  $f_\Delta$  que resulte en el mínimo ancho de banda para cada canal. De esta forma se tiene  $f_\Delta = 15 \text{ kHz}$ ,  $D = 1$  y  $B = 90 \text{ kHz}$ .

Para encontrar el número total de canales  $n_C$ , la banda asignada debe ser:

$$B_{total} \geq n_C \cdot B + (n_C - 1) \cdot G$$

siendo  $B_{total} = 5 \text{ MHz}$  y  $G = 10 \text{ kHz}$  la guarda entre canales. Despejando se tiene:

$$n_C \leq \frac{B_{total} + G}{B + G}$$

Sustituyendo por los valores anteriores se llega a que el máximo es  $n_C = 50$ .

(b) El ruido en recepción queda:

$$N_R(d) = \int_{B_T} \frac{\eta}{2} g(d) df = \eta B_T L(d)$$

Por otro lado, el ruido en detección queda:

$$N(d) = \int_{-W}^W f^2 \frac{\eta g(d)}{2S_R} df = \frac{\eta}{3S_R} W^3 = \frac{\eta L(d)}{3S_T} W^3$$

Por lo tanto, la relación señal a ruido en detección resulta:

$$\text{SNR}_D(d) = 3D^2 S_x \frac{S_T}{\eta L(d) W}$$

(c) Se deben cumplir las condiciones de  $\text{SNR}_D$  y umbral ( $\text{SNR}_R$ ) para toda distancia  $d$ .

$$\text{SNR}_D(d) = 3D^2 S_x \frac{S_T}{\eta L(d) W} \geq 10^5$$

$$\text{SNR}_R(d) = \frac{S_T}{\eta L(d) B} \geq 10$$

En particular el peor caso corresponde a  $d = 50$  m del cual se despejan las condiciones para la potencia de transmisión:

$$S_T \geq 10^5 \frac{\eta L(50) W}{3D^2 S_x} \approx 177.8 \text{ W}$$

$$S_T \geq 10 \eta L(50) B \approx 0.16 \text{ W}$$

De esto se deduce que la mínima potencia de transmisión para estar siempre por encima de los 50 dB en recepción es  $S_T = 177.8$  W.

(d)

$$\text{SNR}_D(0) - \text{SNR}_D(50) = L(50) - L(0) = 12.5 \text{ dB}$$

(e) La potencia recibida sería  $S_D = f_{\Delta}^2 \cdot S_x$  en ambos casos, por lo que no hay diferencia entre los micrófonos. Podría ser necesario de todas formas ajustar los volúmenes según el contenido de audio particular de cada micrófono (ej: un instrumento o una voz).

## Pregunta

(a) Ver teórico.

(b) Ver teórico.

(c) Ver teórico.