

Solución Práctico 9 - Desarrollo de Taylor

Ejercicio 2

- (a) El polinomio de Taylor de grado 3 centrado en $a = (0, 0)$ de la función $g(x, y) = \text{sen}(x) + y$ es:

$$P_{g,3,a}(x, y) = x - \frac{x^3}{6} + y$$

- (b) Consideremos la función $h(t) = e^t$ y entonces podemos ver a f como una composición $f(x, y) = h(g(x, y))$. Luego podemos hallar el polinomio de Taylor de f de grado 3 desarrollando la composición los polinomios de Taylor de grado 3 de g y h y restringirnos a los términos de orden menor o igual a 3.

El polinomio de Taylor de grado 3 centrado en 0 de h es $P_{h,3,0}(t) = 1 + t + \frac{t^2}{2} + \frac{t^3}{6}$. Luego la composición de ambos polinomios de Taylor es:

$$P_{h,3,0}(P_{g,3,a}(x, y)) = 1 + \left(x - \frac{x^3}{6} + y\right) + \frac{\left(x - \frac{x^3}{6} + y\right)^2}{2} + \frac{\left(x - \frac{x^3}{6} + y\right)^3}{6}$$

Finalmente, desarrollando todos los términos de grado menor o igual a 3 de la expresión anterior y reordenando obtenemos:

$$P_{f,3,a}(x, y) = 1 + x + y + \frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{2} + xy - \frac{x^3}{6} + \frac{y^3}{6} + \frac{x^2y}{2} + \frac{xy^2}{2}$$

Ejercicio 3

- (a) $\lim_{(x,y) \rightarrow 0} \frac{xy - \text{sen}(x)\text{sen}(y)}{x^2 + y^2} = 0$. Basta considerar desarrollo de Taylor de orden 2 en $(0, 0)$.
- (b) $\lim_{(x,y) \rightarrow 0} \frac{e^{x^2 + y(y+1)} - (1 + y + y^2/2)}{x^2 + y^2} = 1$. Basta considerar desarrollo de Taylor de orden 2 en $(0, 0)$.

Veamos en detalle el caso a):

Sea $f(x, y) = xy - \text{sen}(x)\text{sen}(y)$ se tiene entonces que

$$\begin{aligned}
f_x(x, y) &= y - \cos(x) \operatorname{sen}(y) \\
f_y(x, y) &= x - \operatorname{sen}(x) \cos(y) \\
f_{xx}(x, y) &= \operatorname{sen}(x) \operatorname{sen}(y) \\
f_{xy}(x, y) &= 1 - \cos(x) \cos(y) \\
f_{yy}(x, y) &= \operatorname{sen}(x) \operatorname{sen}(y)
\end{aligned}$$

De donde se sigue que $\nabla f(0, 0) = (0, 0)$ y que la matriz Hessiana de f en $(0, 0)$ es la matriz nula. Aplicando el teorema de Taylor tenemos que $f(x, y) = r_2(x, y)$ en un entorno del $(0, 0)$. Además, el límite que tenemos que calcular vale 0 por la propiedad del resto.

Ejercicio 4

- (a) Para $f(x, y) = \arctan\left(\frac{y}{x^2+1}\right)$, obtenemos $f(x, y) = y - x^2y - \frac{1}{3}y^3 + r_3(x, y)$
- (b) Para $f(x, y) = e^x \cos(y)$, obtenemos $f(x, y) = 1 + x + \frac{x^2}{2} - \frac{y^2}{2} + \frac{x^3}{6} - \frac{xy^2}{2} + r_3(x, y)$
- (c) Para $f(x, y) = \log(xy + 1)$ obtenemos $f(x, y) = xy + r_3(x, y)$

Veamos en detalle el caso b) :

Sea $f(x, y) = e^x \cos(y)$, entonces sus derivadas parciales hasta orden 3 son:

$$\begin{aligned}
f_x(x, y) &= e^x \cos(y), & f_y(x, y) &= -e^x \operatorname{sen}(y) \\
f_{xx}(x, y) &= e^x \cos(y), & f_{xy}(x, y) &= -e^x \operatorname{sen}(y), & f_{yy}(x, y) &= -e^x \cos(y) \\
f_{xxx}(x, y) &= e^x \cos(y), & f_{xxy}(x, y) &= -e^x \operatorname{sen}(y) \\
f_{xyy}(x, y) &= -e^x \cos(y), & f_{yyy}(x, y) &= e^x \operatorname{sen}(y)
\end{aligned}$$

De donde se sigue que $D_{(0,0)}f(x, y) = x$, $D_{(0,0)}^2f(x, y) = x^2 - y^2$, y $D_{(0,0)}^3f(x, y) = x^3 - 3xy^2$. En conclusión, tenemos que:

$$\begin{aligned}
f(x, y) &= f(0, 0) + D_{(0,0)}f(x, y) + D_{(0,0)}^2f(x, y) + D_{(0,0)}^3f(x, y) + r_3(x, y) \\
&= 1 + x + \frac{x^2}{2} - \frac{y^2}{2} + \frac{x^3}{6} - \frac{xy^2}{2} + r_3(x, y)
\end{aligned}$$

Ejercicio 5

Podemos escribir la función $f(x, y, z) = \frac{yz}{x}$ como el producto de las funciones $g(x) = \frac{1}{x}$ y $h(y, z) = yz$. Luego podemos hallar el polinomio de Taylor de f de grado 3 desarrollando el producto de los polinomios de Taylor de grado 3 de g y h y restringirnos a los términos de orden menor o igual a 3.

- El polinomio de Taylor de g de grado 3 en el punto $x = 1$ es:

$$P_{g,3,1}(x) = 1 - (x - 1) + (x - 1)^2 - (x - 1)^3$$

- El polinomio de Taylor de h de grado 3 en el punto $(0, 0)$ es:

$$P_{g,3,(0,0)}(x) = yz$$

Luego obtenemos que el polinomio de Taylor de grado 3 centrado en $a = (1, 0, 0)$ de f es

$$P_{f,3,a}(x, y, z) = yz - (x - 1)yz$$

Ejercicio 6

En este ejercicio se plantea escribir a la función $f(x, y) = xyz^2$ en potencias de $x, y - 1, z + 1$. Recordamos que $D_p^n f(x, y - 1, z + 1)$ es un polinomio de grado n en potencias de $x, y - 1, z + 1$. Por lo tanto, alcanza con escribir el desarrollo de Taylor de dicha función centrado en el punto $p = (0, 1, -1)$.

Observamos primero que la función f ya es un polinomio, por lo tanto su desarrollo de Taylor se truncará en el orden de dicho polinomio (es decir, dado cualquier polinomio de grado n , las derivadas parciales con orden mayor o igual a $n+1$ de dicho polinomio serán 0). Esto implica que el Taylor de orden 3 de dicha función tiene que coincidir con la función f , o en otras palabras, simplemente reescribiremos la función f ordenando los términos de forma distinta.

Un camino es simplemente calcular las derivadas parciales y hallar $D_p^n(x, y - 1, z + 1)$ para $n = 1, 2, 3$ y de esta forma

$$f(x, y, z) = f(p) + D_p f(x, y - 1, z + 1) + \frac{1}{2} D_p^2 f(x, y - 1, z + 1) + \frac{1}{3!} D_p^3 f(x, y - 1, z + 1)$$

Sin embargo, el camino más rápido es usar el ejercicio 1: La función $f(x, y, z)$ es el producto de las funciones de una variable $g_1(x) = x, g_2(y) = y$ y $g_3(z) = z^2$. Por lo tanto, el Taylor buscado lo conseguimos multiplicando los desarrollo de Taylor de orden 3 de cada una de estas funciones centrados en los puntos correspondientes $(x = 0, y = 1, z = -1)$. Tenemos

$$g_1(x) = x, \quad g_2(y) = 1 + (y - 1), \quad g_3(z) = (-1 + (z + 1))^2$$

Entonces

$$f(x, y, z) = x + x(y - 1) - 2x(z + 1) - 2x(y - 1)(z + 1) + x(z + 1)^2 + x(y - 1)(z + 1)^2$$