Práctico 9 – Desarrollo de Taylor.

Ejercicio de repaso

Calcular el límite cuando $x \to 0$:

a) $\dfrac{1-\cos(x)}{x^2}$

b) $\dfrac{(e^x-1)\operatorname{sen}(x)-x^2}{x^3}$

c) $\dfrac{\operatorname{sen}(x^2)-x^2}{x^6}$

d) $\dfrac{1-\cos(1-\cos x)}{x^4}$

Taylor en varias variables

1. Sean $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ y $h:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ definidas como $g(x)=e^x$ y $h(x)=sen(x)$.

   a) Hallar el polinomio de Taylor de orden 2 de g y h en $x=0$.

   b) Considere ahora $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ definida como $f(x,y)=g(x)h(y)$

   c) Calcular df y df^2 de f en $(0,0)$ y escribir el desarrollo de Taylor de orden 2 de f en $(0,0)$.

   Observar que $T_2 f$ en $(0,0)$ puede obtenerse multiplicando los polinomios de Taylor de orden 2 de g y h, y luego removiendo los terminos de orden mayor a 2. Este procedimiento es válido para cualquier orden, cualquier par de funciones g y h, y pueden utilizarlo para realizar cálculos de manera más eficiente.

2. Sea $f(x,y)=e^{(sen(x)+y)}$ y $g(x,y)=sen(x)+y$

   a) Calcular el desarrollo de Taylor de orden 3 de g en $(0,0)$.

   b) Calcular el desarrollo de Taylor de orden 3 de f en $(0,0)$.

   Observar que $T_3(f)$ puede obtenerse componiendo $T_3 h\circ T_3 g$ donde $h(x)=e^x$, y luego removiendo los terminos de orden mayor a 3. Este procedimiento es válido para cualquier orden, cualquier par de funciones f y g, y pueden utilizarlo para realizar cálculos de manera más eficiente.

3. Calcular los siguientes límites:

   a) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{xy-\sin(x)\sin(y)}{x^2+y^2}$

   b) $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{e^{x^2+y(y+1)}-(1+y+\frac{y^2}{2})}{x^2+y^2}$

4. Hallar el polinomio de Taylor de grado 3 en $(0,0)$ de las siguientes funciones:

   $$\text{(a) } f(x,y)=\arctan\left(\frac{y}{x^2+1}\right)\quad \text{(b) } f(x,y)=e^x\cos y\quad \text{(c) } f(x,y)=\log(xy+1)$$

5. Calcular el polinomio de Taylor de grado 3 de la función $f(x,y,z)=\frac{yz}{x}$ en el punto $(1,0,0)$.

6. Desarrollar xyz^2 en potencias de x, $y-1$ y $z+1$.
7. Calcular el polinomio de Taylor de grado n de las siguientes funciones:
   a) $f(x,y,z) = e^{x+y+z}$, en el origen.
   b) $f(x,y) = \sin(y)\cos(x)$, en el origen.
   c) $f(x,y) = \frac{1}{xy}$, en el punto (1,1).
   d) $f(x,y) = \frac{x}{y}$, en el punto (1,1)
8. El polinomio de Taylor de grado 3 de $f(x,y) = \sin(x+y^2) + e^{x^2}$ en un entorno de $(0,0)$ es:
   a) $1 + x + x^2 + y^2 + x^3$.
   b) $x + x^2 + y^2 + x^3$.
   c) $1 + x + x^2 + y^2 + x^3/3$.
   d) $1 + x + x^2 + y^2 - x^3/6$.
   e) $x + x^2 + y^2 - x^3/3$.
9. El polinomio de Taylor de grado 3 de $f(x,y) = \log(1+x+3y)$ en un entorno de $(0,0)$ es:
   a) $x + 3y - (1/2)(x+3y)^2 + (1/3)(x+3y)^3$.
   b) $x + 3y + (1/2)(x+3y)^2 + (1/3)(x+3y)^3$.
   c) $x + 3y + (1/2)(x+3y)^2 + (1/6)(x+3y)^3$.
   d) $x + 3y - (1/2)(x+3y)^2 + (1/6)(x+3y)^3$.
   e) $1 + x + 3y + (1/2)(x+3y)^2 + (1/3)(x+3y)^3$.

Ejercicios propuestos en evaluaciones anteriores

1. (***Segundo parcial segundo semestre 2023***) Sea $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida como $f(x,y) = e^{x^2+y} - 1 - y - x^2$. Entonces el polinomio de Taylor de orden 3 de f en el punto $(0,0)$ es:
   (A) $\frac{1}{2}y^2 + \frac{1}{6}x^3$
   (B) $2xy + \frac{1}{3}y^3$
   (C) $\frac{1}{2}y^2 + x^2y + \frac{1}{6}y^3$
   (D) $\frac{1}{2}xy$
   (E) $\frac{1}{2}x^2 + y^2 - 2xy^2$
2. (***Segundo parcial segundo semestre 2022***) El polinomio de Taylor de orden 2 de $f(x,y) = \log(x^2+y)$ en el punto $(1,0)$ es:
   (A) $p_2(x,y) = 1 + 2x - y + \frac{x^2}{2} - \frac{y^2}{2} + 3xy$
   (B) $p_2(x,y) = -3 + 4x + 3y - x^2 - \frac{y^2}{2} - 2xy$
   (C) $p_2(x,y) = 2x + y - \frac{x^2}{2} + y^2 - 2xy$

(D) $p_2(x,y) = 1 - 2x + y + x^2 + \dfrac{y^2}{2} + 2xy$

(E) $p_2(x,y) = 2(x-1) + y + (x-1)^2 + y^2 + (x-1)y$

3. (***Examen febrero 2022***) Sean $a, b, c, d, e, f \in \mathbb{R}$ tales que

$$\lim_{(x,y)\to(0,1)} \frac{xy + \ln(x^2+y) - (a + bx + cy + dx^2 + ey^2 + fxy)}{x^2 + (y-1)^2} = 0.$$

Entonces la suma $a + b + c + d + e + f$ es igual a:

(A) 2
(B) 0
(C) 1
(D) -1
(E) 3
(F) -2

4. (***Segundo parcial primer semestre 2019***) Dado $D = \{(x,y) : x + 2y + 1 > 0\}$, considere $f : D \to \mathbb{R}$ tal que:

$$f(x,y) = x\ln(1 + x + 2y).$$

Sea $p : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ el polinomio de Taylor de f de orden 2 en un entorno de $(0,0)$. Entonces:

(A) $p(2,1) = 8$
(B) $p(2,1) = 16$
(C) $p(2,1) = 6$
(D) $p(2,1) = 12$

Ejercicios complementarios

1. *a*) Calcular con un error menor que $3,2 \times 10^{-5}$ el valor de $\arctan(0,8)$.
   b) Calcular con un error menor que 10^{-4} el valor de $\sqrt{5}$.

2. ¿Cuál es el menor número de términos que hay que tomar en el desarrollo de Taylor de e^x en $x = 0$, para obtener un polinomio que aproxime, con un error menor que 10^{-4}, a e^x en el intervalo $[-1,1]$?

3. Estimar el error de reemplazar $\frac{\cos(x)}{\cos(y)}$ por $1 - \frac{1}{2}(x^2 - y^2)$ para $|x|, |y| \leq \frac{\pi}{6}$