Diseño Topológico de Redes

Departamento de Investigación Operativa - UDELAR

OBLIGATORIO FINAL - Segundo Semestre de 2020

Dr. Ing. Franco Robledo Amoza

Fecha de Entrega: 27 de Diciembre de 2020

Ejercicio 1: Consideremos un grafo simple no dirigido $G = (V, E)$, una matriz de costos $C = \{c_{ij}\}_{(i,j)\in E}$ asociada a las aristas del grafo, y tres subconjuntos de nodos disjuntos entre sí y no vacios $T_i \subset V$, $i = 1..3$. Se desea contruir una topología de grafo $H \subseteq G$ de costo mínimo que satisfaga la siguientes restricciones:

i) entre los nodos de T_1 deben existir al menos 2 camino arista-disjuntos.

ii) entre los nodos de T_2 deben existir al menos 3 caminos arista-disjuntos.

iii) dado $u \in (T_1 \cup T_2)$ y $v \in T_3$ deben existir al menos dos caminos arista-disjuntos entre u y v.

iv) entre nodos de T_3 debe existir al menos un camino que los comunique.

Se pide:

a) Modelar el problema anterior como un Problema de Programación Lineal Entera.

b) Supongamos que conocemos el valor de una solución óptima global que tiene costo 1000. Demostrar que es posible encontrar una solucion factible al problema en órden polinomial y que esta no supere el costo de 4000. (sugerencia: ver [1])

c) Supongamos que se agrega la siguiente restricción: entre todo par de nodos de $T_1 \cup T_2 \cup T_3$ debe existir al menos dos caminos nodo-disjuntos con a lo sumo d aristas (hops) cada uno. Para un cierto d fijado de antemano. Modelar como un Problema de Programación Lineal Entera el problema resultante de incorporar esta nueva restricción adicional.

Ejercicio 2: Consideremos un grafo completo simple no dirigido $G = (V, E)$, una matriz de costos $C = \{c_{ij}\}_{(i,j)\in E}$ asociada a las aristas del grafo y satisfaciendo la desigualdad triangular, y un subconjunto de nodos no vacios $T \subset V$. Sabiendo que:

- $STC_{opt}(T, V)$ no tiene nodos de $V \setminus T$.
- Sea $TC_{opt}^{(\leq 3)}(T)$ la mejor solución factible del MW2ECSN respecto de T que no tiene nodos de grado mayor a 3. Sabemos que:
$$\textsc{cost}(TC_{opt}^{(\leq 3)}(T)) = \frac{9}{10}\textsc{cost}(C_{opt}(T)).$$

Probar que:

$$\frac{\textsc{cost}(C_{opt}(T))}{\textsc{cost}(STC_{opt}(T, V))} \leq \frac{10}{9}.$$

Ejercicio 3: En el contexto del Problema General de Steiner con requerimientos de arista-conectividad definido en clase (*Generalized Steiner Problem*, GSP). Dado un grafo $G = (V, E)$, un subconjunto de nodos fijos $T \subseteq V$, una matriz de costos $C = \{c_{ij}\}_{(i,j)\in E}$ asociada a las aristas del grafo, y una matriz de requerimientos de arista-conectividad entre pares de nodos fijos $R = \{r_{ij}\}_{i,j\in E}$.

i) Modelar el GSP versión arista-conectividad como Problema de Programación Lineal Entera.

ii) Existe un subconjunto $T_1 \subseteq T$ donde entre ellos se requiere al menos 2 caminos nodo-disjuntos que los conecten. Extender el modelo (i) agregando esta restricción.

Ejercicio 4: Se define "*The Ring Star Problem*" (RSP) como sigue:
Dado un conjunto de nodos V y dos matrices de costos:

- $C = \{c_{ij}\}_{(i,j)\in V\times V}$ que modela los costos de conexión directa entre pares de nodos de V si estos forman parte de un anillo (ciclo).
- $A = \{a_{ij}\}_{(i,j)\in V\times V}$ que modela el costo de conexión directa entre el nodo i (que no pertenece al anillo) y el nodo j del anillo.

El objetivo del RSP es encontrar un ciclo simple (un anillo) formado por un subconjunto de nodos $V_1 \subseteq V$ (a determinar) de forma de minimizar la suma de dos costos:

i) el costo del anillo (a través de la matriz C).

ii) las suma de los costos de conexión directa (a través de la matriz A) de los nodos de $V \setminus V_1$ (los nodos que no están en el anillo) hacia el correspondiente nodo de V_1 más cercano del anillo.

a) Diseñe un Modelo Exacto de Programación Lineal Entera para el RSP.
b) Diseñe un Modelo Exacto de Programación Lineal Entera para el RSP pero con la restricciones adicionales que para cada nodo del anillo no pueden pender de el más de k nodos colgantes y además el anillo no puede tener más de m aristas.
c) Supongamos que la mejor solución factible H óptima local del RSP con forma de anillo, es decir $V_1 = V$, satisface:

$$\frac{COST(H)}{COST\_OPT\_RSP} = \frac{11}{10},$$

(donde $COST\_OPT\_RSP$ es el costo óptimo global del RSP). Asumiendo que la matriz C satisface desigualdad triangular entre sus costos, demostrar que esto implicaría que:

$$\frac{COST\_OPT\_RSP}{COST(TC_{opt}(V))} \leq \frac{40}{33},$$

donde $TC_{opt}(V)$ es el grafo 2-nodo-conexo de costo mínimo que cubre V considerando la matriz de costos C.

Ejercicio 5: Dado un grafo completo simple no dirigido $G = (V, E)$, una matriz de costos $C = \{c_{ij}\}_{(i,j)\in E}$ asociada a las aristas del grafo y dos subconjuntos de nodos no vacios $T_1, T_2 \subset V$ tal que $T_1 \cap T_2 = \emptyset$.

a) Diseñe un Modelo Exacto de Programación Lineal Entera de manera que se satisfagan las restricciones:

i) 2-nodo-sobrevivencia respecto a T_1.

ii) 2-arista-sobrevivencia respecto a T_2.

iii) Dados dos nodos $u \in T_1$ y $v \in T_2$ éstos deben ser localmente 3-nodo-conexos en la solución.

b) Si en el punto (ii) se requiere 2-nodo-sobrevivencia respecto a T_2 en vez de 2-arista-sobrevivencia y asumiendo desigualdad triangular en los costos de la matriz C, ¿El costo óptimo de ámbos problemas es el mismo?.
c) Demuestre que si G satisface la desigualdad triangular entre sus costos, siempre existe una solución óptima global que no tiene puntos de articulación.

Ejercicio 6: Consideremos un grafo completo simple no dirigido $G = (V, E)$, una matriz de costos $C = \{c_{ij}\}_{(i,j)\in E}$ asociada a las aristas del grafo y satisfaciendo la desigualdad triangular, y tres subconjuntos de nodos no vacios $T_1, T_2, T_3 \subset V$ tal que $T_1 \cup T_2 \cup T_3 = V$ y $T_i \cap T_j = \emptyset, \forall i, j \in 1..3, i \neq j$. Sabiendo que:

- Considerando el MW2ECSN restringido al conjunto T_i (con $i \in 1..2$) tenemos que:

$$\textsc{cost}(TC_{opt}(T_i)) = \textsc{cost}(STC_{opt}(T_i, T_i \cup T_{i+1})).$$

- Existen dos nodos $t_2 \in T_2$ y $t_3 \in T_3$ tal que
  - $\textsc{cost}(SC_{opt}(T_1, T_2)) = \textsc{cost}(C_{opt}(T_1 \cup \{t_2\}))$ y
  - $\textsc{cost}(SC_{opt}(T_2, T_3)) = \textsc{cost}(C_{opt}(T_2 \cup \{t_3\}))$,

  donde $SC_{opt}(U, W)$ denota el ciclo de costo mínimo que cubre el conjunto de nodos U utilizando como nodos opcionales nodos de $W \setminus U$.

- Existe al menos una solución óptima global del STCNP$(T_1, T_1 \cup T_2)$ que tiene topología de ciclo.
- Existe al menos una solución óptima global del STCNP$(T_2, T_2 \cup T_3)$ que tiene topología de ciclo.
- $\textsc{cost}(TC_{opt}(T_3)) = \textsc{cost}(C_{opt}(T_3))$.
- $\textsc{cost}(TC_{opt}(V)) = \textsc{cost}(TC_{opt}(T_1)) + \textsc{cost}(TC_{opt}(T_2)) + \textsc{cost}(TC_{opt}(T_3))$.

Demostrar que existe una solución óptima global del MW2NCSN respecto de V con topología de ciclo.

Ejercicio 7: Consideremos un grafo completo simple no dirigido $G = (V, E)$, una matriz de costos $C = \{c_{ij}\}_{(i,j)\in E}$ asociada a las aristas del grafo y satisfaciendo la desigualdad triangular, y dos subconjuntos de nodos no vacios $T_1, T_2 \subset V$ tal que $T_1 \cup T_2 = T \subseteq V$ y $T_1 \cap T_2 = \{v\}$.
Sabiendo que:

- $STC_{opt}(T_1, V)$ y $STC_{opt}(T_2, V)$ tienen topologías de ciclo.
- una solución óptima global del STECSP(T, V) tiene a v como punto de articulación y al remover v de dicha solución surgen dos componentes conexas, una conteniendo a los nodos de $T_1 \setminus \{v\}$ y la otra a los nodos de $T_2 \setminus \{v\}$.

Demostrar que:

$$\frac{\textsc{cost}(TC_{opt}(T))}{\textsc{cost}(STC_{opt}(T, V))} = 1.$$

Donde el STECSP(T, V) (*Steiner two-edge-connected subgraph problem*) consiste en encontrar el subgrafo $H \subseteq G$ 2-arista-conexo de costo mínimo conteniendo a T.

Ejercicio 8: Consideremos un grafo completo simple no dirigido $G = (V, E)$, una matriz de costos $C = \{c_{ij}\}_{(i,j)\in E}$ asociada a las aristas del grafo y satisfaciendo la desigualdad triangular. Demostrar que los costos óptimos de las soluciones óptimas de los problemas MW2ECSN y MW2NCSN coinciden (son iguales).

Ejercicio 9: Consideremos un grafo completo simple no dirigido $G = (V, E)$, una matriz de costos $C = \{c_{ij}\}_{(i,j)\in E}$ asociada a las aristas del grafo y satisfaciendo la desigualdad triangular, y tres subconjuntos de nodos no vacios $T_1, T_2, T_3 \subset V$ tal que $T_1 \cup T_2 \cup T_3 = T$, $T_1 \cap T_2 = \{u\}$, $T_2 \cap T_3 = \{v\}$, $T_1 \cap T_3 = \{w\}$, con $u \neq v \neq w$.
Sabiendo que:

- $\sum_{i=1}^{3} \textsc{cost}(STC_{opt}(T_i, V)) = \textsc{cost}(STC_{opt}(T, V))$.
- Las soluciones $STC_{opt}(T_i, V)$, $i \in 1..3$, tienen topologías de ciclo.

Demostrar que:

i) $C_{opt}(T_1) \cup C_{opt}(T_2) \cup C_{opt}(T_3)$ es solución óptima global del problema STESNP(T, V).

ii) Existe una solución óptima global al STESNP(T, V) con topología de ciclo.

Donde el STESNP(T, V) (*Steiner two-edge-survivable network problem*) consiste en encontrar el subgrafo $H \subseteq G$ de costo mínimo conteniendo a T tal que $\forall i, j \in T$ existen en H al menos 2 caminos arista-disjuntos comunicando i con j.

Ejercicio 10: Consideremos un grafo completo simple no dirigido $G = (V, E)$, una matriz de costos $C = \{c_{ij}\}_{(i,j)\in E}$ asociada a las aristas del grafo y satisfaciendo la desigualdad triangular, y un subconjunto de nodos no vacios $T \subset V$.
Sabiendo que:

- $\textsc{cost}(STC_{opt}(T, V)) = \frac{4}{5}\textsc{cost}(TC_{opt}(T))$.
- Sea $TCe_{opt}^{(\leq 3)}(T)$ la mejor solución factible del MW2ECSN respecto de T que no tiene nodos de grado mayor a 3. Sabemos que:
$$\textsc{cost}(TCe_{opt}^{(\leq 3)}(T)) \geq \frac{5}{6}\textsc{cost}(C_{opt}(T)).$$

Probar que:

i) Necesariamente la solución $STC_{opt}(T, V)$ tiene algún nodo de Steiner (nodo de $V \setminus T$) de grado mayor a 2.

ii) Se cumple la desigualdad:
$$\frac{\textsc{cost}(C_{opt}(T))}{\textsc{cost}(STC_{opt}(T, V))} \leq \frac{3}{2}.$$

Ejercicio 11: Consideremos un grafo completo simple no dirigido $G = (V, E)$, una matriz de costos $C = \{c_{ij}\}_{(i,j)\in E}$ asociada a las aristas del grafo y satisfaciendo la desigualdad triangular, y un subconjunto de nodos no vacios $T \subset V$. Sea $TCn_{opt}^{(\leq 3)}(T)$ la mejor solución factible del MW2NCSN respecto de T que no tiene nodos de grado mayor a 3. Se sabe que dicha solución factible tiene forma de ciclo. Demostrar que:

$$\frac{\textsc{cost}(C_{opt}(T))}{\textsc{cost}(STC_{opt}(T, V))} \leq \frac{4}{3}.$$

Ejercicio 12: Para $k = 3$:

i) Dar un ejemplo donde la solución óptima del problema MW3ECSN tenga costo estrictamente menor al costo de la solución óptima del MW3NCSN.

ii) Dar un ejemplo donde la solución óptima del problema MW3NCSN tenga nodos de grado 3 o 4 y cuya cantidad de nodos sea menor a 6 ($|V| < 2 * 3 = 6$). ¿Se cumple el Teorema de Bienstock?.

iii) Dar un ejemplo donde la solución óptima del problema MW3ECSN sea igual al costo de la solución óptima del MW3NCSN.

Ejercicio 13: Dado un grafo completo simple no dirigido $G = (V, E)$, una matriz de costos $C = \{c_{ij}\}_{(i,j)\in E}$ asociada a las aristas del grafo y dos subconjuntos de nodos no vacios $T_1, T_2 \subset V$ tal que $T_1 \cap T_2 = \emptyset$.

a) Diseñe un modelo exacto de Programación Lineal Entera de manera que satisfagan las restricciones:

i) 2-arista-sobrevivencia respecto a T_1.

ii) 3-nodo-sobrevivencia respecto a T_2.

iii) Dados dos nodos $u \in T_1$ y $v \in T_2$ éstos deben estar conectados en la solución por al menos dos caminos arista-disjuntos.

b) Si la restricción (iii) en vez de exigir dos caminos arista-disjuntos se exige al menos 2 caminos nodo-disjuntos, ¿esto cambia el óptimo global del problema?. De ser así muestre un ejemplo.
c) Que pasa si al punto anterior le agregamos el dato que el grafo G satisface desigualdad triangular en los costos de sus aristas.

Ejercicio 14: Sean $G_1 = (V_1, E_1)$, $G_2 = (V_2, E_2)$, $G_3 = (V_3, E_3)$ tres grafos euclideanos, tal que tienen un único nodo en común $\hat{v}$. Se desea como objetivo encontrar una topología $H \subseteq (G_1 \cup G_2 \cup G_3)$ de costo mínimo tal que H cubre $V_1 \cup V_2 \cup V_3$ y además $H(V_1)$, $H(V_2)$, y $H(V_3)$ son 2-nodo-conexos.
Sabiendo que $TC^{(\leq 3)}_{opt}(V_i)$, $i \in 1..3$, tienen topología de ciclo, demostrar que:

i) Existe una solución factible $\hat{H}$ computable en orden polinomial tal que: $\frac{d(\hat{H})}{d(H_{opt})} \leq \frac{3}{2}$, donde H_{opt} es el óptimo global al problema.

ii) Dado $\varepsilon > 0$ existe una solución factible $\tilde{H}$ al problema, computable en orden polinomial, tal que $\frac{d(\tilde{H})}{d(H_{opt})} \leq (1+\varepsilon)$. Sugerencia: aplicar el Teorema de Sanjeev Arora [7].

Ejercicio 15: Sea $G_1 = (V_1, E_1)$ un grafo no-dirigido con costos uniformes asociados a sus aristas. Sea $G_2 = (V_2, E_2)$ un grafo no-dirigido "copia de G_1" tal que $V_1 \cap V_2 = \{w\}$ y con matriz de costos no negativos con desigualdad triangular $C = \{c_{ij}\}_{(i,j)\in E_2}$. Se desea como objetivo encontrar una topológía $H \subseteq G_1 \cup G_2$ de costo mínimo tal que $H(V_1)$ es 2-arista-conexo y $H(V_2)$ es 3-nodo-conexo.
Demostrar que existe una solución factible al problema $\hat{H}$ computable en orden polinomial, tal que se satisface: $\frac{d(\hat{H})}{d(H_{opt})} \leq 2$, donde H_{opt} es la solución óptima global al problema. Sugerencia: ver [8, 9].

Ejercicio 16: Dado un grafo completo simple no dirigido $G = (V, E)$, una matriz de costos $C = \{c_{ij}\}_{(i,j)\in E}$ asociada a las aristas del grafo y dos subconjuntos de nodos no vacios $T_1, T_2 \subset V$ tal que $T_1 \cap T_2 = \emptyset$.
Diseñe un modelo exacto de Programación Lineal Entera que construya topologías de la forma $H = \mathcal{H}_1 \cup \mathcal{T}_2 \cup \mathcal{G}$ donde:

- $\mathcal{H}_1$ es un grafo 2-nodo-conexo que contiene el conjunto T_1.
- $\mathcal{T}_2$ es un árbol que cubre el conjunto T_2.
- $\mathcal{H}_1 \cap \mathcal{T}_2 = \emptyset$.
- $\mathcal{G}$ es tal que: $\forall v \in T_2$ de grado 1 en $\mathcal{T}_2$, existe una arista de v a algún nodo de $\mathcal{H}_1$ en H.

- En la solución H, todo nodo de T_1 no puede tener grado mayor a un cierto m dado.

Las soluciones construidas deben ser minimales.

Ejercicio 17: Consideremos un grafo completo simple no dirigido $G = (V, E)$, una matriz de costos $C = \{c_{ij}\}_{(i,j)\in E}$ asociada a las aristas del grafo y satisfaciendo la desigualdad triangular, y dos subconjuntos de nodos no vacios $T_1, T_2 \subset V$ tal que $T_1 \cup T_2 = T \subseteq V$ y $T_1 \cap T_2 = \{v\}$.
Sabiendo que:

- $TC_{opt}(T_1)$ y $TC_{opt}(T_2)$ tienen topologías de ciclo.
- una solución óptima global del MW2ECSN tiene a v como punto de articulación y al remover v de dicha solución surgen dos componentes conexas, una conteniendo a los nodos de $T_1 \setminus \{v\}$ y la otra a los nodos de $T_2 \setminus \{v\}$.

Demostrar que:

$$\frac{\textsc{cost}(C_{opt}(T))}{\textsc{cost}(STC_{opt}(T, V))} \leq \frac{4}{3}.$$

Ejercicio 18: Consideremos un grafo completo simple no dirigido $G = (V, E)$, una matriz de costos $C = \{c_{ij}\}_{(i,j)\in E}$ asociada a las aristas del grafo y satisfaciendo la desigualdad triangular, y dos subconjuntos de nodos no vacios $T_1, T_2 \subset V$ tal que $T_1 \cup T_2 = T \subseteq V$ y $T_1 \cap T_2 = \{v\}$. Sabiendo que una solución óptima global del MW2ECSN tiene a v como punto de articulación y al remover v de dicha solución surgen dos componentes conexas, una conteniendo a los nodos de $T_1 \setminus \{v\}$ y la otra a los nodos de $T_2 \setminus \{v\}$; demostrar que existe una solución $\mathcal{H}$ óptima global del MW2ECSN donde todos los nodos tienen grado 2 o 3 salvo el nodo v que tiene grado 4, 5 o 6 en $\mathcal{H}$.

Ejercicio 19: Consideremos un grafo completo simple no dirigido $G = (V, E)$, una matriz de costos $C = \{c_{ij}\}_{(i,j)\in E}$ asociada a las aristas del grafo y satisfaciendo la desigualdad triangular, y m subconjuntos $V_i \subseteq V$, $i \in 1..m$, tal que:

- $\forall i \in 1..m$ existe $j \in 1..m$, $j \neq i$, tal que $|V_i \cap V_j| = 1$.
- $\textsc{cost}(TC_{opt}(V)) = \sum_{i=1}^{m} \textsc{cost}(TC_{opt}(V_i))$.

Demostrar que $\bigcup_{i\in 1..m} TC_{opt}(V_i)$ es óptimo global del MW2ECSN con al menos $m - 1$ nodos de grado mayor a 3. ¿Esto contradice el Teorema de Monma et al. (Teo. 15) visto en clase?.

Ejercicio 20: Consideremos un grafo completo simple no dirigido $G = (V, E)$, una matriz de costos $C = \{c_{ij}\}_{(i,j)\in E}$ asociada a las aristas del grafo y satisfaciendo la desigualdad triangular, y tres subconjuntos de nodos no vacios $T_1, T_2, T_3 \subset V$ tal que $T_1 \cup T_2 \cup T_3 = T$, $T_1 \cap T_2 \cap T_3 = \{u\}$.
Sabiendo que:

- $\sum_{i=1}^{3} \textsc{cost}(STC_{opt}(T_i, V)) = \frac{3}{4}\textsc{cost}(TC_{opt}(T))$.
- Los nodos de Steiner de $STC_{opt}(T_i, V)$, $i \in 1..3$, tienen grado 2.

Demostrar que:

i) $TC_{opt}(T_1) \cup TC_{opt}(T_2) \cup TC_{opt}(T_3)$ es solución óptima global del problema STESNP(T, V).

ii) Existe un óptimo global del STESNP(T, V) donde el nodo u tiene grado 2.

Nota: el STESNP(T, V) (*Steiner two-edge-survivable network problem*) consiste en encontrar el subgrafo $H \subseteq G$ de costo mínimo conteniendo a T tal que $\forall i, j \in T$ existen en H al menos 2 caminos arista-disjuntos comunicando i con j.

Ejercicio 21: Consideremos un grafo completo simple no dirigido $G = (V, E)$, una matriz de costos $C = \{c_{ij}\}_{(i,j)\in E}$ asociada a las aristas del grafo y satisfaciendo la desigualdad triangular, y dos subconjuntos de nodos no vacios $T_1, T_2 \subset V$ tal que $T_1 \cup T_2 = T \subseteq V$ y $T_1 \cap T_2 = \emptyset$. Sabiendo que:

- $\textsc{cost}(TC_{opt}(T_2 \cup \{t\})) \leq \textsc{cost}(TC_{opt}(T_1)), \forall t \in T_1$.
- $\textsc{cost}(STC_{opt}(T, V)) = \textsc{cost}(STC_{opt}(T_1, V)) + \textsc{cost}(STC_{opt}(T_2, V))$.
- $\textsc{cost}(STC_{opt}(T_2, V)) \geq \frac{3}{2}\textsc{cost}(STC_{opt}(T_1, V))$.

Demostrar que:

$$\frac{\textsc{cost}(TC_{opt}(T))}{\textsc{cost}(STC_{opt}(T, V))} \leq \frac{16}{15}.$$

Ejercicio 22: Sean $G_1 = (V_1, E_1)$, $G_2 = (V_2, E_2)$, $G_3 = (V_3, E_3)$ tres grafos completos con desigualdad triangular en los costos de sus aristas, y tal que $V_1 \cap V_2 \cap V_3 = \{w\}$, $V_i \cap V_j = \{w\}$, $i \neq j$; $i, j \in 1..3$. Sabiendo que:

- El *sobtour polytope* del TSP asociado a G_1, $S_{opt}(V_1)$, tiene variables enteras asociadas a su solución. Además, $d(S_{opt}(V_1)) = d(TC_{opt}^{(\leq 3)}(V_1))$, siendo $TC_{opt}^{(\leq 3)}(V_1)$ la mejor solución factible al MW2NCSN asociado a G_1 donde todos sus nodos tienen grado menor o igual a 3.
- Se conoce una solución factible óptima del MW2NCSN asociado a G_2, denotada $\mathcal{G}_{opt}$, que tiene el mismo costo que un cierto ciclo hamiltoneano $\hat{C} \subseteq G_2$ que cubre V_2.
- El *sobtour polytope* del TSP asociado a G_3, $S_{opt}(V_3)$, cumple que $d(S_{opt}(V_3)) = d(C_{opt}(V_3))$.

Demostrar que existe una solución óptima al MW2ECSN asociado a

$$G' = (V_1 \cup V_2 \cup V_3, E_1 \cup E_2 \cup E_3),$$

que consiste de tres ciclos que tienen en común solo el nodo w.

Ejercicio 23: Sabido es que si G es un grafo simple completo ponderado, C un ciclo hamiltoniano obtenido por el Algoritmo de Christofides [4] y C^* un ciclo hamiltoniano de peso mínimo, entonces:

$$\frac{\text{cost}(C)}{\text{cost}(C^*)} \leq \frac{3}{2}.$$

Sean $G_1 = (V_1, E_1)$ y $G_2 = (V_2, E_2)$ dos grafos completos con desigualdad triangular en los costos de sus aristas, y tal que $V_1 \cap V_2 = \{u, v\}$. Sabiendo que:

- $d(TC_{opt}(V_1)) = 100$, con $TC_{opt}(V_1)$ la solución óptima del MW2NCSN asociado a G_1.
- La topología de $TC_{opt}^{(\leq 3)}(V_2)$ es de ciclo y con costo $d(TC_{opt}^{(\leq 3)}(V_2)) = 60$.

Demostrar que existe una solución factible $\mathcal{H}$ correspondiente al MW2NCSN asociado a $H = (V_1 \cup V_2, E_1 \cup E_2)$, tal que: $\text{cost}(\mathcal{H}) \leq 290$ y además $\mathcal{H}$ tiene topología de ciclo.

Ejercicio 24: Sea $G = (V, E)$ un grafo completo con desigualdad triangular en los costos de sus aristas. Sea $D \subseteq V$ un subconjunto de nodos distinguidos de V. Sabiendo que:

- $d(STC_{opt}(D, V)) = 90$.
- En el *sobtour polytope* del TSP asociado a G, $S_{opt}(D)$, sus variables tienen valores enteros.

Demostrar que el ciclo hamiltoneano que cubre D resultante de aplicar el Algoritmo de Christofides sobre $G(D)$ tiene costo menor o igual a 180.

Ejercicio 25: Sean $G_1 = (V_1, E_1)$ y $G_2 = (V_2, E_2)$ dos grafos completos con desigualdad triangular en los costos de sus aristas, y tal que $V_1 \cap V_2 = D \neq \emptyset$. Sabiendo que:

- $STC_{opt}((V_1 \cup V_2) \setminus D, V_1 \cup V_2)$ tiene un único nodo $\hat{w} \in D$ que es además punto de articulación tal que al eliminarlo surgen dos componentes conexas, una que contiene los nodos de $V_1 \setminus \hat{w}$ y la otra los nodos de $V_2 \setminus \hat{w}$.
- $STC_{opt}(V_1 \setminus D, V_1)$ y $STC_{opt}(V_2 \setminus D, V_2)$ tienen ambas soluciones al nodo $\hat{w}$ como único nodo de D.
- $d(STC_{opt}(V_1 \setminus D, V_1)) = 100$ y $d(STC_{opt}(V_2 \setminus D, V_2)) = 80$.

Demostrar que:

i) $d(STC_{opt}((V_1 \cup V_2) \setminus D, V_1 \cup V_2)) = 180$.

ii) $d(TC_{opt}((V_1 \cup V_2) \setminus D)) \leq 240$.

Ejercicio 26: Sea $G = (V, E)$ un grafo completo con desigualdad triangular en los costos de sus aristas. Se define el *Ring Star Problem* (RSP) como el problema de encontrar un subgrafo $H \subseteq G$ de costo mínimo que cubre V tal que H esta compuesta por un anillo (ciclo) y los nodos de V que no están en el anillo están conectados directamente a algún nodo del anillo. Sabiendo que:

- Se conoce una solución óptima al RSP de la forma $\mathcal{H} = C \cup F$, con C un anillo que cubre un subset $D \subset V$ y F los links directos que conectan con C los nodos de $V \setminus D$, y además el costo de la solución $\mathcal{H}$ es de 100 (C cuesta 80 y F cuesta 20).

Se define el *Two Connected Star Problem* (TCSP) como el problema de encontrar un subgrafo $\mathcal{G} \subseteq G$ de costo mínimo que cubre V tal que $\mathcal{G}$ esta compuesta por una componente 2-nodo-conexa y los nodos de V que no están en dicha componente están conectados directamente a algún nodo de ella.

i) Sea $\hat{\mathcal{G}} = TC_{opt}(D) \cup F$. ¿Es $\hat{\mathcal{G}}$ una solución óptima del TCSP?. Justifique.

ii) Demuestre que: $\text{cost}(\hat{\mathcal{G}}) \geq 80$.

iii) Se conoce otra solución óptima del RSP, denotada $\hat{C}$, con topología de ciclo (no tiene nodos de grado 1). Demuestre que: $\text{cost}(TC_{opt}(V)) \geq 75$.

Ejercicio 27: Dado un grafo simple no dirigido $G = (V, E)$, $C = \{c_{ij}\}_{(i,j) \in E}$ una matriz de costos positivos asociada a las aristas del grafo, $D = \{d_{ij}\}_{(i,j) \in E}$ otra matriz de costos asociada a las aristas del grafo y vinculados a un parámetro de "diametro" $\hat{d}$ que se asume conocido, y $T \subseteq V$ un conjunto de nodos que denominaremos nodos terminales.
OBJETIVO: Encontar un subgrafo $H \subseteq G$ de costo mínimo cubriendo a los nodos de T tal que $\forall i, j \in T$ en H existen al menos 2 caminos nodo-disjuntos conectando i con j y además en H existe al menos un camino de longitud en arcos menor o igual que $\hat{d}$. Se pide:
SE PIDE: Modelar el problema propuesto mediante un modelo de Programación Lineal Entera.

Ejercicio 28: Dado un grafo simple no dirigido $G = (V, E)$, $C = \{c_{ij}\}_{(i,j) \in E}$ una matriz de costos positivos asociada a las aristas del grafo, $D = \{d_{ij}\}_{(i,j) \in E}$ otra matriz de costos asociada a las aristas del grafo y vinculados a un parámetro de "diametro" $\hat{d}$ que se asume conocido, $T \subseteq V$ un conjunto de nodos que denominaremos nodos terminales, y dos conjuntos $T_1, T_2 \subseteq T$ tal que $T_1 \cap T_2 = \emptyset$.
OBJETIVO: Encontar un subgrafo $H \subseteq G$ de costo mínimo cubriendo a los nodos de T tal que:

- $\forall i, j \in T_1$ en H existen al menos 2 caminos arista-disjuntos conectando i con j.
- $\forall i, j \in T_2$ en H existen al menos 3 caminos arista-disjuntos conectando i con j.
- Los nodos de T_1 deben estar conectados entre sí en H por al menos un camino de largo (en aristas) menor o igual a $\hat{d}$.
- Los nodos de T_2 deben estar conectados entre sí en H por al menos un camino de largo (en aristas) menor o igual a $\hat{d}/2$.
- Dado un nodo de $i \in T_1$ y un nodo $j \in T_2$ en H deben existir al menos 3 caminos arista-disjuntos que los comunican o bien dos caminos arista-disjuntos de longitud menor o igual a $\frac{3}{2}\hat{d}$ que los comunican.

SE PIDE:
Modelar el problema propuesto mediante un modelo de Programación Lineal Entera.

Ejercicio 29: Consideremos un grafo completo simple no dirigido $G = (V, E)$, una matriz de costos $C = \{c_{ij}\}_{(i,j)\in E}$ asociada a las aristas del grafo y satisfaciendo la desigualdad triangular, y dos subconjuntos de nodos no vacios $T_1, T_2 \subset V$ tal que $T_1 \cup T_2 = T \subseteq V$ y $T_1 \cap T_2 = \{v\}$.
Sabiendo que:

- $STC_{opt}(T_1, V)$ y $STC_{opt}(T_2, V)$ son grafos de Monma cada uno con exactamente dos nodos de grado 3 y en cada uno de ellos existe un *key-path*.
- una solución óptima global del STECSP(T, V) tiene a v como punto de articulación y al remover v de dicha solución surgen dos componentes conexas, una conteniendo a los nodos de $T_1 \setminus \{v\}$ y la otra a los nodos de $T_2 \setminus \{v\}$.

Demostrar que:

$$\frac{\text{COST}(TC_{opt}(T))}{\text{COST}(STC_{opt}(T, V))} = 1.$$

Donde el STECSP(T, V) (*Steiner two-edge-connected subgraph problem*) consiste en encontrar el subgrafo $H \subseteq G$ 2-arista-conexo de costo mínimo conteniendo a T.

References

[1] A. Agrawal, P. Klein, and R. Ravi. When trees collide: an approximation algorithm for the generalized Steiner problem on networks. SIAM Journal on Computing, 24(3):440456, 1995.

[2] M. Baïou, Le problème du sous-graphe Seiner 2-arête connexe: approache polyédrale. PhD thesis, Université de Rennes I, France, 1996.

[3] M. Bienstock, E. F. Brickell, and C. L. Monma, On the structure of minimum-weight k-connected spanning networks, SIAM Journal on Discrete Mathematics, Vol. 3, num 3, pp. 320-329, Aug. 1990.

[4] N. Christofides, Worst-case analysis of a new heuristic for the Travelling Salesman Problem, Report 388, Graduate School of Industrial Administration, Carnegie Mellon University, 1976.

[5] M. Didi Biha, Graphes k-arête connexes et polyèdres, PhD thesis, Université de Rennes I, France, 1998.

[6] F. Robledo, GRASP heuristics for Wide Area Network design, PhD. thesis, Université de Rennes I, France, 2005.

[7] S. Arora, Approximation schemes for NP-hard geometric optimization problems: A survey. Mathematical Programming, vol. 97, num. 1-2, pp. 43-69, 2003.

[8] R. Jothi, B. Raghavachari, and S. Varadarajan, A 5/4-approximation algorithm for minimum 2-edge-connectivity. Proceedings of the fourteenth annual ACM-SIAM Symposium on Discrete Algorithms, Baltimore, Maryland, pp. 725-734, 2003, ISBN:0-89871-538-5.

[9] V. Aulettaa, Y. Dinitzb, Z. Nutovc, and D. Parented, A 2-Approximation Algorithm for Finding an Optimum 3-Vertex-Connected Spanning Subgraph. Journal of Algorithms, vol. 32, num. 1, july 1999, pp. 21-30.