

Práctico 8 – Derivadas parciales y diferenciabilidad.

1. Calcular las derivadas parciales de cada una de las siguientes funciones $f = f(x, y)$, especificando en cuáles puntos las derivadas existen.

$$\begin{array}{cccc}
 ax^\alpha + by^\beta & \frac{3x}{y} + \frac{4y}{x} & x^2y^{3/2} & \arctan(xy) \\
 \log\left(x + \frac{y}{x^2}\right) & e^y \sin(x) & \text{máx}\{|x|, |y|\} & \text{máx}\{x^2, y^3\}
 \end{array}$$

2. Calcular las derivadas parciales de primer y segundo orden de las siguientes funciones $f = f(x, y)$.

$$(a) \ xy \quad (b) \ \log(xy) \quad (c) \ \sin(x^2 + y^2)$$

3. Verificar que la función $u(x, t) = e^{-a^2k^2t} \sin(kx)$ satisface la ecuación del calor: $u_t = a^2u_{xx}$.

4. Estudiar la continuidad de cada función y la existencia de las derivadas direccionales respectivas.

$$(a) \ f(x, y) = \begin{cases} (xy)/(\sqrt{x^2 + y^2}) & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ a & \text{si } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

$$(b) \ f(x, y) = \begin{cases} (e^{xy} - 1)/x & \text{si } x \neq 0 \\ y & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

$$(d) \ f(x, y) = \begin{cases} xy \sin \frac{1}{x} \cos \frac{1}{y} & \text{si } xy \neq 0 \\ a & \text{si } xy = 0 \end{cases}$$

$$(c) \ f(x, y) = \begin{cases} x^3/y & \text{si } y \neq 0 \\ 0 & \text{si } y = 0 \end{cases}$$

$$(e) \ f(x, y) = \begin{cases} x^3 & \text{si } y \geq 1 \\ x^3y^2 & \text{si } y < 1 \end{cases}$$

5. Consideremos $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ tal que:

$$f(x, y) = \begin{cases} 1 & \text{si } 0 < y < x^2 \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

Probar que existen todas las derivadas direccionales de f en $(0, 0)$, pero sin embargo f no es continua en $(0, 0)$. En otras palabras derivar respecto a cualquier dirección no garantiza la continuidad en el punto.

6. Representar gráficamente la siguiente función $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ bosquejando las curvas de nivel.

$$f(x, y) = \begin{cases} 0 & \text{si } y \leq x^2 \text{ o } 2x^2 \leq y \\ |x| & \text{si } x^2 < y < 2x^2 \end{cases}$$

Demostrar que f es continua y que existen todas las derivadas direccionales en $(0, 0)$ y que, sin embargo, f no es diferenciable en dicho punto.

7. Sea $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ la función dada por

$$f(x, y) = \begin{cases} (x^2 + y^2) \sin \frac{1}{x} + e^{xy} & \text{si } x \neq 0 \\ 1 & \text{si } x = 0 \end{cases}$$

Estudiar la continuidad y la diferenciabilidad de f en los puntos $(0, 0)$, $(0, 1)$ y $(1, 0)$, hallando, si existen, las derivadas parciales.

8. ¿Existe alguna función $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ de clase C^2 tal que $f_x(x, y) = e^{x+y}$ y $f_y(x, y) = \cos(xy)$?

9. Sea $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ definida como

$$f(x, y) = (x^2 + y^2) \sin \frac{1}{x^2 + y^2} \text{ si } (x, y) \neq (0, 0), \quad f(0, 0) = 0$$

- a) Probar que existen derivadas parciales en todos los puntos y calcularlas.
 b) Probar que f es diferenciable.
 c) Probar que f no es de clase C^1 .
10. Sea $f : \mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{R}$ definida como $f(x, y) = x^3y$. Sean $a = (0, 0)$ y $b = (1, 2)$. Hallar ξ en el segmento $[a, b]$ tal que $f(b) - f(a) = df(\xi)(b - a)$.
11. Sean $f : V \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ y $g : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow V$, donde f es diferenciable y g esta definida por $g(\rho, \theta) = (\rho \cos(\theta), \rho \sin(\theta))$. Calcular $\frac{\partial f \circ g}{\partial \rho}$ y $\frac{\partial f \circ g}{\partial \theta}$.
12. Se sabe que $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ verifica $f_x(0, 0) = 2$, $f_y(0, 0) = -1$ y que f es diferenciable en el origen. Calcular $\frac{\partial f}{\partial v}(0, 0)$ para $v = (h, k)$ no nulo.
13. Sea $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ tal que se sabe lo siguiente:
- $f(x, 1) = x^3 + x^2, \forall x \neq 0$
 - $f(0, y) = y^2 - 2y + 1, \forall y \in \mathbb{R}$
 - $f(x, 1 - x) = x, \forall x \neq 0$
- a) Indique en qué puntos es posible hallar la derivada parcial respecto a x o respecto a y . ¿En qué puntos es posible hallar el gradiente?
 b) Calcular la derivada direccional en $(0, 1)$ respecto a $v = (1, -1)$
 c) Indique en qué puntos se puede decir algo sobre la diferenciabilidad de f .
14. Se sabe que $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ verifica $f(x, x) = x$, que $f(0, y) = 0$ para todo $x, y \in \mathbb{R}$ y que f es diferenciable en el origen. Calcular $f_x(0, 0)$.
15. Calcular la matriz Jacobiana en el punto a y el diferencial $df(a)(\Delta x, \Delta y)$ de las siguientes funciones:
- a) $f(x, y) = e^{x+y} + 2 \sin(2x - y)$, $a = (0, 0)$
 b) $f(x, y, z) = (e^{z+x+y}, x + y + 2z)$, $a = (0, 1, 2)$
 c) $f(x, y) = (e^{x+y}, \sin(2x - y), \log(1 + y^2))$, $a = (\pi, \pi)$
 d) $f : \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}^q$, en $a \in \mathbb{R}^p$ fijo cualquiera, donde $f(\mathbf{x}) = A\mathbf{x}$, siendo A una matriz $q \times p$ y \mathbf{x} se escribe como una matriz columna $p \times 1$.
 e) $f(x, y) = \langle g(x, y), h(x, y) \rangle$ donde $g, h : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ son funciones de clase C^1
16. Hallar, en cada caso, las matrices jacobianas de f , g , $f \circ g$ y $g \circ f$.
- a) $f(u, v) = \left(\frac{12}{\log(u^2 + v^2)}, \arctan(u/v) \right)$, $g(x, y) = (e^x \cos y, e^x \sin(y))$.
 b) $f(u, v) = (u^2 - v^2, 2uv)$, $g(x, y) = (x \cos y, x \sin y)$.
 c) $f(u, v) = (e^u \cos v, e^u \sin v)$, $g(x, y) = \left(\frac{x}{x^2 + y^2}, \frac{-y}{x^2 + y^2} \right)$.
17. En cada caso hallar la ecuación del plano tangente a la gráfica de la función en el punto P .
- $3x^2 + 4y^2, P = (0, 1)$
 - $2 \cos(x - y) + 3 \sin(x), P = (\pi, \pi/2)$
 - $2xy + e^{yx}, P = (1, 1)$
18. Demostrar que todos los planos tangentes a la gráfica de la función $f(x, y) = y h(y/x)$, en donde $h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ es una función diferenciable, tienen un punto en común.

Ejercicios propuestos en evaluaciones anteriores

1. (**Examen diciembre 2022**) Sea $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ una función.

a) Definir diferenciabilidad de f en un punto $a = (x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$.

Sea ahora $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ definida como:

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^3y + xy^3}{x^2 + y^2 + \sqrt{x^2 + y^2}} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{si } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

b) Calcular las derivadas parciales de f en el $(0, 0)$.

c) Estudiar la diferenciabilidad de la función en el origen.

2. (**Segundo parcial primer semestre 2022**) De la función $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ se conoce que:

▪ f es diferenciable en $\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$.

▪ $f\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, t\right) = t^2 + 2t$

▪ $\frac{\partial f}{\partial \vec{v}}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right) = 0$ con $\vec{v} = (1, -2)$

Si $g(r, \theta) = (r \cos \theta, r \sin \theta)$, calcular $\frac{\partial(f \circ g)}{\partial \theta}\left(1, \frac{\pi}{4}\right)$.

3. (**Examen febrero 2022**) Sea $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ definida como $f(x, y) = |x + e^{y^2}|$. Indicar si cada una de las siguientes afirmaciones sobre f es verdadera o falsa.

a) f es continua en $(0, 0)$.

b) f no es continua en $(-1, 0)$.

c) f es diferenciable en $(0, 0)$ y su gradiente en ese punto es $(1, 0)$.

d) Existe la derivada parcial de f respecto a x en $(-1, 0)$ y vale 1.

e) Existe la derivada parcial de f respecto a y en $(-1, 0)$ y vale 0.

4. (**Examen febrero 2022**) Consideremos la siguiente función escalar sobre \mathbb{R}^2 :

$$f(x, y) = \begin{cases} y \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{si } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

a) Determinar si f es continua en el punto $(0, 0)$.

b) Calcular, en caso de existir, todas las derivadas direccionales de f en el punto $(0, 0)$.

c) Determinar si f es diferenciable en $(0, 0)$.

5. (**Segundo parcial segundo semestre 2021**) Sea $g : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ una función tal que $g(1, 1) = (1, 0)$ y

$$J_g(1, 2) = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Si $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ está dada por $f(x, y) = \frac{x^2 - y}{y^2 + 1}$, indicar cuánto vale $\frac{\partial f \circ g}{\partial x}(1, 1)$.

6. (**Segundo parcial primer semestre 2021**) Sea $\alpha : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$ una función diferenciable con $\alpha(0) = (0, 0)$, y $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ la función dada por $f(x, y) = (e^{x+y}, e^{x-y})$. Sabiendo que $(f \circ \alpha)'(0) = (2, 0)$, calcular el jacobiano de α en 0.

7. (**Segundo parcial primer semestre 2019**) Sea $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ la función dada por:

$$f(x, y) = \begin{cases} y - x, & \text{si } y \geq x \\ \frac{2x^3y}{x^2 + y^2} + y - x, & \text{si } y < x \end{cases}$$

- Calcular $\frac{\partial f}{\partial x}$ y $\frac{\partial f}{\partial y}$ en $(0, 0)$.
- Mostrar que la función f es diferenciable en $(0, 0)$.
- Hallar el plano tangente al gráfico de f en el punto $(0, 0)$.

Ejercicios complementarios

1. Calcular en un punto genérico los planos tangentes a:

- La Esfera
- El Cono
- El Cilindro
- El Paraboloides

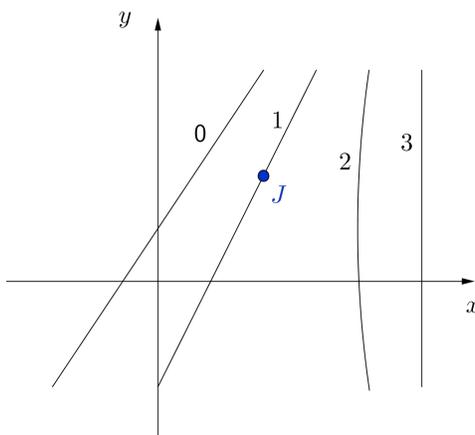
2. La ecuación de Van der Waals para n moles de un gas está dada por:

$$\left(P + \frac{n^2a}{V^2}\right)(V - nb) = nRT$$

donde R es la constante universal del gas y a y b son constantes positivas características de un gas en particular.

Calcular $\frac{\partial T}{\partial V}$, $\frac{\partial T}{\partial P}$

3. Se muestran las curvas de nivel para una función f . Determine si las derivadas parciales tienen signo negativo o positivo en el punto J , asumiendo que no se anulan.



4. Demuestre que las siguientes funciones verifican la ecuación de la onda $u_{tt} = au_{xx}$

- a) $u = \sin(kx) \cos(akt)$
- b) $u = (x - at)^6 + (x + at)^6$
- c) $u = \frac{t}{a^2 t^2 - x^2}$
5. a) Sea $T: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ una transformación lineal. Hallar $\partial_i T$ para $i = 1, \dots, n$.
- b) Sea A una matriz simétrica $n \times n$ y $Q: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ la función dada por $Q(x) = x^t A x$, esto es, $Q(x_1, \dots, x_n) = \sum_{i,j=1}^n a_{ij} x_i x_j$, si $A = (a_{ij})_{i,j=1}^n$. Hallar $\partial_i Q$ para $i = 1, \dots, n$.
- c) Sea $T: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ una transformación lineal y $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ la función $f(x) = \langle x, T(x) \rangle$. Hallar la derivada direccional $\partial f / \partial u$ para todo versor $u \in \mathbb{R}^n$.