Universidad de la República **Cálculo diferencial e integral en varias variables**
Facultad de Ingeniería - IMERL **Segundo Semestre 2020**

Solución Práctico 7 - Funciones de varias variables: representaciones gráficas, límites y continuidad

En este documento se presentan las soluciones a los ejercicios del práctico, algunos de ellos con desarrollo a modo de guía para resolver el resto.

Ejercicio 1

a) Si $a < 0$, $C_a = \emptyset$.
Si $a \geq 0$, $C_a = \{(x,y) : \ ||(x,y)|| = \sqrt{a}\}$

b) Si $a = 0$, $C_a = \{(x,y) : x = \pm y\}$.
Si $a > 0$, $C_a = \{(x,y) : \ y = \pm\sqrt{x^2 - a}\}$.
Si $a < 0$, $C_a = \{(x,y) : \ x = \pm\sqrt{y^2 + a}\}$.

c) Si $a < 0$, $C_a = \emptyset$.
Si $a \geq 0$, $C_a = \{(x,y) : \ x = \pm\sqrt{a}\}$

d) Si $a \in \mathbb{R}$, $C_a = \{(x,y) : x \neq 0, \ y = ax\}$.

e) Si $a = 0$, $C_a = \{(x,y) : \ x = 0\} \cup \{(x,y) : \ y = 0\}$.
Si $a \neq 0$, $C_a = \{(x,y) : \ y = \frac{a}{x}\}$

f) Si $a < 0$, $C_a = \emptyset$.
Si $a = 0$, $C_a = \{(x,y) : \ x = 0, \ y \leq 0\}$.
Si $a > 0$, $C_a = \{(x,y) : \ y \geq x^{2/3}, \ y = a^{1/3}\} \cup \{(x,y) : \ y \leq x^{2/3}, \ x = \pm\sqrt{a}\}$.

g) Si $a < 0$, $C_a = \emptyset$.
Si $a = 0$, $C_0 = \{(x,y) : \ x = 0, \ y \leq 0\}$.
Si $a > 0$, $C_a = \{(x,y) : \ y \geq x^2 - x, \ y = a - x\} \cup \{(x,y) : \ y \leq x^2 - x, \ x = \pm\sqrt{a}\}$.

Veamos en detalle el ejercicio **1g)**:
Estudiaremos los conjuntos de nivel de la función $f(x,y) = \text{máx}\{x^2, x + y\}$.
Lo primero a observar es que la función devuelve valores no negativos. Esto implica inmediatamente que si $a < 0$ entonces $C_a = \emptyset$.
Luego, veamos en qué región del plano $f(x,y) = x^2$ y en qué región $f(x,y) = x + y$:

$$x^2 \geq x + y \Longleftrightarrow x^2 - x \geq y$$

Por lo tanto podemos escribir a la función f como

$$f(x,y) = \begin{cases} x^2 & \text{si } y \leq x^2 - x \\ x + y & \text{si } y \geq x^2 - x \end{cases}$$

Luego, dado $a \geq 0$ y (x,y) tal que $f(x,y) = a$, tenemos:
-Si $y \leq x^2 - x$, $f(x,y) = a \Longleftrightarrow x^2 = a \Longleftrightarrow x = \pm\sqrt{a}$
-Si $y \geq x^2 - x$, $f(x,y) = a \Longleftrightarrow x + y = a \Longleftrightarrow y = a - x$
Concluímos que $C_a = \{(x,y) : \ y \geq x^2 - x, \ y = a - x\} \cup \{(x,y) : \ y \leq x^2 - x, \ x = \pm\sqrt{a}\}$
Observar que en el caso $a = 0$ se tiene que:
$\{(x,y) : \ y \geq x^2 - x, \ y = -x\} = \emptyset$, $\{(x,y) : \ y \leq x^2 - x, \ x = \pm\sqrt{0}\} = \{(x,y) : \ x = 0, \ y \leq 0\}$

Ejercicio 2

a) Dominio $D = \{(x, y, z) :\ x - y - z \neq 0\}$. Es decir, $\mathbb{R}^3$ menos un plano.

$C_a = \{(x, y, z) :\ \langle (x, y, z), (a-1, -a, -a)\rangle = 0\}$. Esto es un plano con normal $(a-1, -a, -a)$ que pasa por el $(0, 0, 0)$

b) Dominio $D = \mathbb{R}^3$

Si $a \in [0, 1]$, $C_a = \{(x, y, z) :\ ||(x, y, z)||^2 \in sen^{-1}(a)\}$

Si $a \notin [0, 1]$, $C_a = \emptyset$

c) Dominio $D = \{(x, y, z) :\ ||(x, y, z|| \neq 1\}$

Si $a = 0$, $C_0 = \{(x, y, z) :\ ||(x, y, z|| \neq 1,\ \langle (x, y, z), (1, 1, 1)\rangle = 0\}$.

Si $a \neq 0$, $C_a = \Big\{(x, y, z) :\ ||(x, y, z|| \neq 1,\ d\big((x, y, z), (\frac{-1}{2a}, \frac{-1}{2a}, \frac{-1}{2a})\big) = \sqrt{\frac{4a^2+3}{4a^2}}\Big\}$. Escrito de forma más compacta $C_a = D \cap \partial B\big((\frac{-1}{2a}, \frac{-1}{2a}, \frac{-1}{2a}), \sqrt{\frac{4a^2+3}{4a^2}}\big)$

d) Dominio $D = \mathbb{R}^2 \setminus \Big(\{(x, y) :\ x = 0, y \geq 0\} \cup \{(x, y) :\ y = 0, x \geq 0\}\Big)$

Si $a = 1$, $C_1 = \{(x, y) \in D :\ y = 0, x < 0\} \cup \{(x, y) \in D :\ x = 0, y < 0\}$

Si $a \neq 1$, $C_a = \{(x, y) \in D :\ y \geq x,\ y = (a-1)x\} \cup \{(x, y) \in D :\ x \geq y,\ y = \frac{x}{a-1}\}$

Veamos en detalle el ejercicio **2c)**
Estudiaremos dominio y conjuntos de nivel de la función: $f(x, y, z) = \frac{x+y+z}{1-(x^2+y^2+z^2)}$
Primero vemos que la función está definida en todo $\mathbb{R}^3$ salvo donde el denominador se anula.
Es decir, $D = \{(x, y, z) :\ ||(x, y, z|| \neq 1\}$.

Ahora buscamos los puntos tales que van a parar a 0 por f:
$f(x, y, z) = 0 \Longleftrightarrow x + y + z = 0 \Longleftrightarrow \langle (x, y, z), (1, 1, 1)\rangle = 0$
Por lo tanto $C_0 = \{(x, y, z) :\ ||(x, y, z|| \neq 1,\ \langle (x, y, z), (1, 1, 1)\rangle = 0\}$.

Por último buscamos los puntos tales que van a parar a a por f con $a \neq 0$:

$$f(x, y, z) = a \Longleftrightarrow \frac{x + y + z}{1 - (x^2 + y^2 + z^2)} = a \Longleftrightarrow x + y + z + ax^2 + ay^2 + az^2 - a = 0$$

$$\Longleftrightarrow x^2 + x/a + y^2 + y/a + z^2 + z/a = 1$$

$$\Longleftrightarrow \big(x + \frac{1}{2a}\big)^2 + \big(y + \frac{1}{2a}\big)^2 + \big(z + \frac{1}{2a}\big)^2 = 1 + \frac{3}{4}\frac{1}{a^2}$$

$$\Longleftrightarrow \Big|\Big|(x, y, z) - \Big(-\frac{1}{2a}, -\frac{1}{2a}, -\frac{1}{2a}\Big)\Big|\Big|^2 = \frac{4a^2 + 3}{4a^2}$$

$$\Longleftrightarrow d\big((x, y, z), (-1/2a, -1/2a, -1/2a)\big) = \sqrt{\frac{4a^2 + 3}{4a^2}}$$

Concluímos que si $a \neq 0$,

$$C_a = \Big\{(x, y, z) :\ ||(x, y, z)|| \neq 1,\ d\big((x, y, z), (\frac{-1}{2a}, \frac{-1}{2a}, \frac{-1}{2a})\big) = \sqrt{\frac{4a^2 + 3}{4a^2}}\Big\}$$

Ejercicio 3

a) Dominio $D = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$

Si $a \leq 0$, $C_a = \emptyset$

Si $a > 0$, $C_a = \{(x,y) \in D : \ ||(x,y)|| = \frac{1}{a}\}$

b) Dominio $D = \{(x,y) : \ (x,y) \neq (0,0), \ ||(x,y)|| < 1\}$

Si $a \in \mathbb{R}$, $C_a = \{(x,y) \in D : \ ||(x,y)||^2 = \frac{1}{1+e^a}\}$

c) Dominio $D = \mathbb{R}^2$

Si $a < 1$, $C_a = \emptyset$

Si $a \geq 1$, y definimos $\pm b = \pm \log(a + \sqrt{a^2-1}) = \pm \cosh^{-1}(a)$, entonces

$C_a = \{(x,y) : \ x = \pm\sqrt{y^2+b}\} \cup \{(x,y) : \ y = \pm\sqrt{x^2+b}\}$

d) Dominio $D = \{(x,y) : y \neq 0, \ y \neq \frac{x^2}{n\pi + (\pi/2)} \text{ con } n \in \mathbb{Z}\}$

Si $\operatorname{arc\,tg} : \mathbb{R} \to (-\pi/2, \pi/2)$. Entonces

Si $a = 0$, $C_0 = \{(x,y) \in D : x = 0\} \cup \{(x,y) \in D : y = \frac{x^2}{n\pi}, \ n \neq 0, \ n \in \mathbb{Z}\}$

Si $a \neq 0$, $C_a = \{(x,y) \in D : y = \frac{x^2}{\operatorname{arc\,tg}(a) + n\pi}\}$

e) Dominio $D = \{(x,y) : \ y \neq 0, \ 0 \leq x \leq y\} \cup \{(x,y) : \ y \neq 0, \ y \leq x \leq 0\}$

Si $\arccos : [-1,1] \to [0,\pi]$, entonces:

Si $a \in [0, \pi/2]$, $C_a = \{(x,y) \in D : \ x = y\cos(a)^2\}$

Si $a \notin [0,\pi/2]$, $C_a = \emptyset$

f) Si $\operatorname{arc\,tg} : \mathbb{R} \to (-\pi/2, \pi/2)$, el dominio de f es $D = \{(x,y) : y \neq 0\}$

Si $a = 0$, $C_0 = \{(x,y) \in D : \ x = 0\}$

Si $a \neq 0$, $a \in (\pi/2, \pi/2)$, $C_a = \{(x,y) \in D : \ y = \frac{x^2}{\operatorname{tg}(a)}\}$

Si $a \notin (\pi/2, \pi/2)$, $C_a = \emptyset$

g) Se define a^b como $e^{b\log(a)}$ para $a > 0$, $b \in \mathbb{R}$. Luego el dominio de f es $D = \{(x,y) : \ x > 0\}$

Si $a \leq 0$, $C_a = \emptyset$

Si $a = 1$, $C_1 = \{(x,y) \in D : \ y = 0\} \cup \{(x,y) \in D : \ x = 1\}$

Si $0 < a < 1$, $C_a = \left\{(x,y) \in D : x < 1, \ y = \pm\sqrt{\frac{log(a)}{log(x)}}\right\}$

Si $1 < a$, $C_a = \left\{(x,y) \in D : x > 1, \ y = \pm\sqrt{\frac{log(a)}{log(x)}}\right\}$

Ejercicio 4

Sea $f : U \to \mathbb{R}$ con $U = B_R^*\big((0,0)\big) \subseteq \mathbb{R}^2$. Definimos $g : V \to \mathbb{R}$ para $V = (0, R) \times [0, 2\pi)$ como $g(r, \theta) = f(r\cos(\theta), r\,\mathrm{sen}(\theta))$

a) Probemos lo siguiente:

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = L \iff \forall\, \epsilon > 0\ \exists \delta > 0 \text{ tal que } \forall\, (r,\theta) \in (0,\delta)\times[0,2\pi) \text{ se tiene } |g(r,\theta)-L| < \epsilon$$

Demostración. Veamos que simplemente la conclusión es la traducción de la definición de límite de f para las nuevas variables:

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = L \iff \forall\, \epsilon > 0\ \exists \delta > 0 \text{ tal que } \forall\, (x,y) \in B((0,0),\delta), \text{ se tiene } |f(x,y)-L| < \epsilon$$

Observando que si $(x, y) = (r\cos(\theta), r\,\mathrm{sen}(\theta))$, se tiene

$$(x,y) \in B_\delta((0,0)) \iff (r,\theta) \in (0,\delta) \times [0,2\pi)$$

Vemos que escribiendo las variables con su escritura en polares y sustituyendo la condición de cercanía al $(0,0)$ por su equivalente en términos de (r,θ) se concluye la tesis.

□

b) Veamos que, si definimos para $\theta \in [0, 2\pi)$ $g_\theta(r) = g(r,\theta)$, se tiene

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = L \Rightarrow \forall\ \theta \in [0,2\pi)\ \lim_{r\to 0^+} g_\theta(r) = L$$

Demostración. Fijamos $\hat{\theta} \in [0, 2\pi)$. Por parte a) sabemos que
$\forall\ \epsilon > 0\ \exists \delta > 0$ tal que $\forall\ (r,\theta) \in (0,\delta) \times [0,2\pi)$ se tiene $|g(r,\theta) - L| < \epsilon$. En particular, para el ángulo $\hat{\theta}$ obtenemos que, dado $\epsilon > 0$ y tomando dicho $\delta > 0$, se cumple

$$\forall\ r \in (0,\delta)\ |g_{\hat{\theta}}(r) - L| < \epsilon$$

Esto es exactamente la definicion de límite para $g_{\hat{\theta}}$ con $r \to 0$. □

Observación: Al dejar fijo un ángulo $\hat{\theta}$ y dejar variar r, lo que estamos haciendo es movernos por una recta cuyo ángulo con el eje y es $\hat{\theta}$. Al calcular el límite cuando $r \to 0$ simplemente estamos calculando un limite direccional, cuya dirección es justamente la definida por el ángulo fijo. En otras palabras, este ejercicio prueba que si el límite de f existe en $(0,0)$ este coincide con todos sus límites direccionales en $(0,0)$.

c) i) Si $f(x,y) = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}$, $g(r,\theta) = cos(\theta)$

Observamos que $\lim_{r\to 0^+} g_\theta(r) = cos(\theta)$. Por lo tanto, por ejercicio b), no puede existir un límite L para f en $(0,0)$.

ii) Si $f(x,y) = \begin{cases} y/x & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$, entonces $g_\theta(r) = \begin{cases} \mathrm{sen}(\theta)/\cos(\theta) & \text{si } r\cos(\theta) \neq 0 \\ 0 & \text{si } r\cos(\theta) = 0 \end{cases}$

Fijado θ tenemos que $\lim_{r\to 0^+} g_\theta(r) = \begin{cases} \mathrm{sen}(\theta)/\cos(\theta) & \text{si } \theta \neq \pi/2 \text{ y } \theta \neq 3\pi/2 \\ 0 & \text{si } \theta = \pi/2 \text{o } \theta = 3\pi/2 \end{cases}$

De nuevo, como dicho límite depende del ángulo θ, por parte b) concluímos que no existe el límite de f en $(0,0)$.

iii) Si $f(x,y) = \begin{cases} 1 & \text{si } 0 < y < x^2 \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$, entonces $g_\theta(r) = \begin{cases} 1 & \text{si } 0 < \operatorname{sen}(\theta) < r\cos^2(\theta) \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$

Fijado θ tal que $\operatorname{sen}(\theta) > 0$, existe R tal que $\forall r \in (0,R)$ se tiene que $r\cos^2(\theta) < \operatorname{sen}(\theta)$ y por lo tanto para esos r $g_\theta(r) = 0$ (basta tomar $R = \operatorname{sen}(\theta)/2$). Esto implica que

$$\forall\ \theta \in [0,2\pi)\ \lim_{r\to 0^+} g_\theta(r) = 0$$

Es decir, todos los límites direccionales existen y dan 0. Sin embargo, veremos que no existe el límite de f en $(0,0)$.

Consideramos puntos de la forma $(x, \frac{x^2}{2})$ con $x > 0$. Dichos puntos están arbitrariamente cerca del punto $(0,0)$ y caen sobre la curva $y = \frac{x^2}{2} < x^2$. Esto último implica que $f(x, \frac{x^2}{2}) = 1$ para $x > 0$. Luego:

$$\lim_{x\to 0^+} f(x, x^2/2) = 1$$

Por otro lado si consideramos puntos de la forma $(x,0)$ se tiene $f(x,0) = 0$ y

$$\lim_{x\to 0^+} f(x,0) = 0$$

Es decir, hay puntos tan cercanos de $(0,0)$ como queramos que valgan 1 o 0. Por lo tanto no puede existir el límite de f en $(0,0)$.

d) La prueba es el contraejemplo trabajado en c)iii).

e) Si $f(r\cos(\theta), r\operatorname{sen}(\theta)) = g(r,\theta) = h(r)k(\theta)$ donde k es una función acotada y $h(r) \xrightarrow{r\to 0} 0$, probemos que $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = 0$.

Demostración. Sea $\epsilon >$ y sea $M > 0$ cota superior de $|k(\theta)|$. Como $h(r) \xrightarrow{r\to 0} 0$ tenemos que, dado ϵ' existe $\delta > 0$ tal que $\forall r \in (0,\delta)$ $|h(r)| < \epsilon'$.

Tomando $\epsilon' = \epsilon/M$ obtenemos que

$$\forall (r,\theta) \in (0,\delta)\times[0,2\pi) \text{ se tiene } |h(r)k(\theta)| \leq |h(r)|M < M(\epsilon/M) = \epsilon$$

Por parte a) de este ejercicio se cocluye que $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = 0$.

$\square$

f) i) Si $f(x,y) = \frac{x^2y}{x^2+y^2}$, $g(r,\theta) = r\cos^2(\theta)sen(\theta)$. Por parte e) $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = 0$.

ii) Si $f(x,y) = \frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}$, $g(r,\theta) = r\cos(\theta)\operatorname{sen}(\theta)$. De nuevo por parte e) se concluye $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = 0$.

Ejercicio 5

a) Basta observar que $\lim_{x\to 0} f(x,0) = 1$ y $\lim_{y\to 0} f(0,y) = -1$

b) Pasando a polares observamos que el límite direccional depende del ángulo θ.
Concretamente $\lim_{r\to 0^+} g_\theta(r) = 2\cos^3(\theta)\operatorname{sen}(\theta)$.

c) Basta observar que $\lim_{x\to 0} f(x,0) = 0$ y $\lim_{x\to 0} f(x, x^2 - x) = -1$

Ejercicio 6

a) Sean $f, g : U \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$. Sea $p \in U$. Supongamos g acotada en $B(p, R) \subseteq U$ y $\lim_{x\to p} f(x) = 0$. Entonces $\lim_{x\to p} f(x)g(x) = 0$

Demostración. Sea $\epsilon > 0$ y sea $M > 0$ tal que $\forall x \in B(p, R)\ |g(x)| < M$.
Por definición de límite $\forall \epsilon' > 0\ \exists \delta > 0\ \forall x \in B(p, \delta)\ |f(x)| < \epsilon'$.
Tomando $\epsilon' = \epsilon/M$ tenemos que

$$\forall x \in B(p, \delta)\ |f(x)g(x)| \leq |f(x)|M < M\epsilon/M = \epsilon$$

Es decir, $\lim_{x\to p} f(x)g(x) = 0$ □

b) i) $f(x, y) = x \operatorname{sen}(\frac{1}{x^2+y^2})$. Como $h(x, y) = x \xrightarrow{(x,y)\to 0} 0$ y la función $\operatorname{sen}(t)$ está acotada, se deduce que $\lim_{(x,y)\to 0} f(x, y) = 0$

ii) $f(x, y) = \frac{xy^2}{x^2+y^2}$. La función $g(x, y) = \frac{y^2}{x^2+y^2}$ cumple $0 \leq g(x, y) \leq 1$ (es decir, está acotada). Como $x \to 0$, se deduce $\lim_{(x,y)\to 0} f(x, y) = 0$.

iii) $f(x, y) = \frac{xy^3}{x^2+y^4}$.
Observar que $x^2/2 + y^4/2 - \frac{1}{2}(x - y^2)^2 = xy^2$. Por lo que

$$-x^2/2 - y^4/2 \leq xy^2 \leq x^2/2 + y^4/2$$

Esto implica que $\left|\frac{xy^2}{x^2+y^4}\right| \leq 1/2$. Luego por parte a) $\lim_{(x,y)\to 0} f(x, y) = 0$

Ejercicio 7

a) El límite existe y es $\frac{1}{2}$

b) El límite existe y es $\frac{\operatorname{sen}(1)}{1+\operatorname{tg}(1)}$

c) El límite no existe (basta acercarse por $(x, 0, 0)$ y por $(0, 0, z)$)

Ejercicio 8

a) El límite es -2

b) El límite es 0 (recordar que $1 - \frac{1}{x} \leq log(x) \leq x$).

c) El límite es $\frac{3}{2}$ (dividir numerador y denominador por $(x - y)$)

d) El límite es 0 (pasar a polares)

e) El límite no existe (recordar $e^u - 1 \sim u$ cuando $u \to 0$)

f) El límite es 1 (recordar $\log(1 + u) \sim u$ cuando $u \to 0$)

Ejercicio 9

Consideramos $f(x,y) = \frac{ax+y+by^2}{\operatorname{sen}(y)+\log(1+x)}$ con $a, b \in \mathbb{R}$.

a) Buscamos a y b para que todos los límites direccionales coincidan en $(0,0)$. Primero observamos que si nos acercamos por la dirección de la recta $y = mx$, obtenemos que

$$\lim_{x\to 0} f(x,mx) = \lim_{x\to 0} \frac{(bm^2)x^2 + (a+m)x}{\operatorname{sen}(mx) + \log(1+x)} = \lim_{x\to 0} \frac{2(bm^2)x + (a+m)}{m\cos(mx) + \big(1/(1+x)\big)}$$

Si $m \neq -1$, el límite anterior vale $\frac{a+m}{1+m}$. Como esto no debe depender de m para que todos los límites direccionales coincidan, necesariamente $a = 1$.

Si $m = -1$, el límite solo existe si $a = -m = 1$. Como vimos a tiene que ser 1 y por lo tanto existe el límite. La fundamentación de esta existencia y su cálculo se debe a la regla de L'Hopital:

$$\lim_{x\to 0} \frac{2(bm^2)}{-m^2\operatorname{sen}(mx) - \big(1/(1+x)^2\big)} = -2b$$

Si nos acercamos por la recta $x = 0$ obtenemos

$$\lim_{y\to 0} f(0,y) = \lim_{y\to 0} \frac{by^2+y}{\operatorname{sen}(y)} = 1$$

Necesitamos que todos estos límites coincidan. Por lo tanto los límites direccionales coinciden si y solo si $a = 1$ y $b = -\frac{1}{2}$.

b) Tenemos que $f(x,y) = \frac{x+y-\frac{y^2}{2}}{\operatorname{sen}(y)+\log(1+x)}$. Como vimos, cualquier límite direccional de f en $(0,0)$ vale 1.

Consideramos la curva $x = -y + \frac{y^2}{2}$ (que pasa por el $(0,0)$). Entonces

$$\lim_{y\to 0} f(-y + y^2/2, y) = 0$$

Esto implica que no existe el límite de f en $(0,0)$ pues existen límites por caminos (curvas) que difieren.

Ejercicio 10

Estudiaremos según α y β la existencia del siguiente límite:

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^\alpha x^\beta}{x^2+xy+y^2}$$

Traduciendo la funcion f a coordenadas polares obtenemos

$$g(r,\theta) = \Big(r^{(\alpha+\beta)-2}\Big)\left(\frac{\cos^\alpha(\theta)\operatorname{sen}^\beta(\theta)}{1+\cos(\theta)\operatorname{sen}(\theta)}\right)$$

Observamos lo siguiente:

- Si $\alpha + \beta \leq 2$ entonces $\nexists \lim_{(x,y)\to(0,0)}$:

  Esto es consecuencia del ejercicio 4, pues no puede existir $L \in \mathbb{R}$ que cumpla la definición de límite traducida a polares: $\forall \epsilon > 0\ \exists \delta > 0$ tal que $\forall (r,\theta) \in (0,\delta) \times [0, 2\pi)\ |g(r,\theta) - L| < \epsilon$.

  Si $\alpha + \beta < 2$ existe θ tal que $\lim_{r\to 0} g_\theta(r) = +\infty$, y si $\alpha + \beta = 2$ $\lim_{r\to 0} g_\theta(r)$ depende de θ.

- Si $\alpha+\beta>2$, $\alpha\geq 0$ y $\beta\geq 0$ entonces $\lim_{(x,y)\to(0,0)}=0$:

  Basta con observar que $h(r)=r^{(\alpha+\beta)-2}$ tiende a 0 y $k(\theta)=\frac{\cos^\alpha(\theta)\operatorname{sen}^\beta(\theta)}{1+\cos(\theta)\operatorname{sen}(\theta)}$ está acotada.

- Si $\alpha+\beta>2$ pero alguno de estos valores es negativo, entonces $\nexists\lim_{(x,y)\to(0,0)}$:

  Supongamos $\beta<0<2<\alpha$ (el otro caso es análogo).

  Consideramos la curva $y=x^{\frac{\alpha}{-\beta}}$ que pasa por $(0,0)$. Si calculamos el límite de f sobre este camino cuando x tiende a 0 obtenemos

  $$\lim_{x\to 0^+} f(x,x^{\frac{\alpha}{-\beta}})=\frac{1}{x^2+x^{\frac{\alpha}{-\beta}+1}+x^{\frac{2\alpha}{-\beta}}}=+\infty$$

  Por otro lado si consideramos la curva $y=x$, obtenemos

  $$\lim_{x\to 0^+} f(x,x)=\left(x^{\alpha+\beta-2}\right)\frac{x^2}{x^2+x^2+x^2}=0$$

  Pues $x^{\alpha+\beta-2}$ tiende a 0.

Concluímos que el límite de f en $(0,0)$ existe si y solo si $\alpha\geq 0$, $\beta\geq 0$ y $(\alpha+\beta)>2$

Ejercicio 11

a) La función f es continua en $\mathbb{R}^2$ (observar que $\frac{4x^2}{4x^2+y^6}$ es acotada).

b) La función f es continua en $\mathbb{R}^2\setminus\{(x,y):\ y=0\}$ (basta acercarse por rectas a los puntos de la forma $(a,0)$).

c) La función f es continua en $\mathbb{R}^2\setminus\{(x,y):\ x=0,\ y\neq 1\}$ (ver qué pasa si nos acercamos por las regiones $x<0$ y $x>0$ a un punto $(0,b)$)

Veamos con más detalle el ejercicio **11c)**
Queremos determinar en qué puntos del plano es continua la siguiente función:

$$f(x,y)=\begin{cases} x^2+2y-1 & \text{si } x\geq 0\\ 3x^2+y^2 & \text{si } x<0\end{cases}$$

- f es continua en las regiones $x<0$ y $x>0$:

  Dichas regiones son abiertos del plano. Por lo tanto, si un punto está en alguna de estas regiones, admite una bola abierta contenida en esa región. Observar que f restricto a esa bola es un polinomio. Como la continuidad es una propiedad local y los polinomios son continuos, se deduce que f es continua en estas regiones.

- f no es continua en la recta $x=0$ salvo el punto $(0,1)$:

  Fijamos un punto $(0,b)$ del plano y U un entorno del punto (pensemos en una bola de radio δ). Observar que $U=U_+\cup U_-$ donde $U_+=U\cap\{(x,y):x\geq 0\}$ y $U_-=U\cap\{(x,y):x<0\}$ son conjuntos no vacíos. Luego, f restricto a U_+ es x^2+2y-1 y f restricto a U_- es $3x^2+y^2$.

  De hecho esos polinomios son continuos en todo el plano, por lo que podemos afirmar que si nos acercamos al punto $(0,b)$ por U_+, $f(x,y)$ tenderá a $2b-1$, y si nos acercamos por U_- tenderá a b^2.

  Es decir, formalmente podemos encontrar un δ-entorno del punto tal que los puntos evaluados de U_+ estén a menos de ϵ de $2b-1$ y los puntos evaluados de U_- estén a menos de ϵ de b^2.

  Por lo tanto, f será continua en $(0,b)$ si y solo si $b^2=2b-1$. Esto ocurre si y solo si $b=1$

Concluímos que f es continua en $\mathbb{R}^2\setminus\{(x,y):\ x=0,\ y\neq 1\}$

Ejercicio 12

Las funciones de este ejercicio están definidas en $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ y claramente son continuas allí. Estudiamos posibles extensiones continuas a todo el plano.

a) La función f se extiende de forma continua a todo el plano.

   Una forma de probarlo es pasar a polares y usar ejercicio 4a). Otro camino es usar directamente la siguiente equivalencia: $\operatorname{sen}(t) \sim t$ cuando $t \to 0$.

b) La función f se extiende de forma continua a todo el plano.

   Basta con traducir la función a polares y usar ejercicio 4e).

c) La función f se extiende de forma continua a todo el plano.

   Aquí también podemos utilizar la equivalencia $\operatorname{sen}(t) \sim t$ cuando $t \to 0$ y luego pasar a polares para usar ejercicio 4e).

Ejercicio 13

Si $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ función derivable con derivada continua, definimos

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{\varphi(y)-\varphi(x)}{y-x} & \text{si } x \neq y \\ \varphi'(x) & \text{si } x = y \end{cases}$$

Veamos que f es continua en todo el plano.

Demostración. Es claro que f es continua en el abierto $\{(x,y) : x \neq y\}$, pues en esta región f es la composición de funciones continuas. Por lo tanto basta corroborar que para los puntos de la forma $x = y$, digamos el punto (a,a), se verifica $\lim_{(x,y)\to(a,a)} = f(a,a) = \varphi'(a)$

Fijamos $\epsilon > 0$. Como φ y φ' son continuas, existe un $\delta > 0$ tal que para todo t que cumpla $|t-a| \leq \delta$, se verifica $|\varphi(t) - \varphi(a)| < \epsilon$ y $|\varphi'(t) - \varphi'(a)| < \epsilon$.

Además, por teorema de valor medio, sabemos que $\frac{\varphi(y)-\varphi(x)}{y-x} = \varphi'(c)$ para algún $c \in (x,y) \subseteq \mathbb{R}$.

Por lo tanto, si $||(x,y) - (a,a)|| < \delta$ (en particular $(x-a) < \delta$ y $(y-a) < \delta$), se tiene que

- $|\varphi'(x) - \varphi'(a)| < \epsilon$
- $\left|\frac{\varphi(y)-\varphi(x)}{y-x} - \varphi'(a)\right| = |\varphi'(c) - \varphi'(a)| < \epsilon$ (pues $c \in (a-\delta, a+\delta)$).

Concluyendo que si $||(x,y) - (a,a)|| < \delta$ se verifica $|f(x,y) - f(a,a)| < \epsilon$.

Es decir, $\lim_{(x,y)\to(a,a)} = f(a,a) = \varphi'(a)$.

$\square$

Ejercicio 14

Consideramos $f : (0,+\infty) \times [0,2\pi) \to \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ definida por

$$f(\rho,\theta) = (f_1(\rho,\theta), f_2(\rho,\theta)) = (\rho\cos(\theta), \rho\operatorname{sen}(\theta))$$

a)
- f es continua:

  Basta con ver que f_1 y f_2 son continuas, lo cual se cumple trivialmente por ser producto de funciones continuas.

- f es inyectiva:

  Observamos que $||f(\rho,\theta)|| = \rho$. Luego, si $f(\rho,\theta) = f(\eta,\varphi)$ necesariamente $\rho = \eta$ y $(\cos(\theta), \operatorname{sen}(\theta)) = (\cos(\varphi), \operatorname{sen}(\varphi))$. Recordando que $\theta, \varphi \in [0,2\pi)$ la última igualdad se da si y solo si $\theta = \varphi$.

- f es sobreyectiva:

  Definimos las funciones radio y argumento como

$$\begin{cases} R : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} & \text{con } R(x,y) = \sqrt{x^2+y^2} \\ arg : \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\} \to [0, 2\pi) & \text{con } arg(x,y) = \text{ángulo formado con eje } x \end{cases}$$

  Concretamente podemos definir a $arg(x,y)$ en términos de $\operatorname{arc\,tg} : \mathbb{R} \to (-\pi/2, \pi/2)$ de la siguiente forma:
  -Si $x > 0, y \geq 0$, definimos $arg(x,y) = \operatorname{arc\,tg}(y/x)$
  -Si $x > 0, y < 0$, definimos $arg(x,y) = \operatorname{arc\,tg}(y/x) + 2\pi$
  -Si $x < 0$, definimos $arg(x,y) = \operatorname{arc\,tg}(y/x) + \pi$
  -Si $x = 0, y > 0$, $arg(x,y) = \pi/2$
  -Si $x = 0, y < 0$, $arg(x,y) = 3\pi/2$

  Luego, basta verificar que dado $(x,y) \neq (0,0)$, se tiene que $(x,y) = f(R(x,y), arg(x,y))$ y por lo tanto f sobreyectiva Para verificar dicha igualdad es útil recordar que $\operatorname{tg}(\theta) = \operatorname{sen}(\theta)/\cos(\theta)$.

Se concluye que f es continua y biyectiva.

b) Si consideramos $\rho = r$ fijo (constante), se tiene que $f(r,\theta) = r(\cos(\theta), \operatorname{sen}(\theta))$ es una parametrización de una circunferencia de centro $(0,0)$ y radio r. Esto es consecuencia inmediata de que f sea biyectiva y que $|f(\rho,\theta)| = \rho$.

   Por otro lado, si consideramos a $\theta = \alpha$ constante, se tiene que $f(\rho,\alpha) = \rho(\cos(\alpha), \operatorname{sen}(\alpha))$. Esto es simplemente una semirrecta con origen en $(0,0)$ (el $(0,0)$ no está en la semirrecta) y dirección $v_\alpha = (\cos(\alpha), \operatorname{sen}(\alpha))$.

c) Consideramos la función radio antes definida restricta al conjunto $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ y también la llamamos R. Queremos probar que la función $g : \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\} \to (0, +\infty) \times [0, 2\pi)$ dada por $g(x,y) = (R(x,y), arg(x,y))$ es la función inversa de f y estudiar su continuidad.

   - Es inversa:

     En la parte a) se prueba que $f \circ g(x,y) = f(R(x,y), arg(x,y)) = (x,y)$. Por lo tanto, para ver que es inversa siplemente basta corroborar que $g \circ f(\rho,\theta) = g(\rho\cos(\theta), \rho\operatorname{sen}(\theta)) = (\rho,\theta)$. Esto de nuevo es sencillo de escribir teniendo en cuenta que $\operatorname{tg} = \operatorname{sen}/\cos$.
   - Es continua salvo para los ángulos $\theta = 0$:

     Es claro que $R(x,y)$ es continua. En los puntos con $x \neq 0$ y $\theta \neq 0$ también es claro que $arg(x,y)$ es continua (pues lo es $\operatorname{arc\,tg}(y/x)$). Para ver la continuidad en los puntos de la forma $(0,a)$ hacemos lo siguiente:

     Primero recordamos que las funciones $\operatorname{arc\,tg}$ y tg definidas para ángulos entre $-\pi/2$ y $\pi/2$ son monótonas crecientes.
     Fijamos $\epsilon > 0$. Consideramos $B((0,a),\delta)$ con δ chico. Sin pérdida de generalidad suponemos que $a > 0$ (el otro caso es análogo). Observamos que $(x,y) \in B((0,a),\delta) \Rightarrow y \neq 0$. Más aún se tiene que para los puntos de esa bola, si $x > 0$, $y/x > (a-\delta)/\delta$. Y si $x < 0$, $y/x < (\delta - a)/\delta$
     Dado $z_1 = \operatorname{tg}(\pi/2 - \epsilon) > 0$ y $z_2 = \operatorname{tg}(-\pi/2 + \epsilon) < 0$ existe $\delta' > 0$ tal que $|(\delta' - a)/\delta'| = |(a - \delta')/\delta'| > |z_1| = |z_2|$. Tomamos $\delta = \min\{\delta', a/2\}$. Luego tenemos que por monotonía

$$|arctg((a-\delta)/\delta) - \pi/2| < |\operatorname{arc\,tg}(z_1) - \pi/2| = \epsilon \quad \text{y}$$

$$|arctg((\delta - a)/\delta) - (-\pi/2)| < |\operatorname{arc\,tg}(z_1) - (-\pi/2)| = \epsilon$$

     Por lo que si $(x,y) \in B((0,a),\delta)$ con $x > 0$ se tiene también por monotonía:

$$\begin{aligned} |arg(x,y) - arg(0,a)| &= |\operatorname{arc\,tg}(y/x) - (\pi/2)| \\ &\leq |arctg((a-\delta)/\delta) - (\pi/2)| < \epsilon \end{aligned}$$

Y si $(x, y) \in B((0, a), \delta)$ con $x < 0$ se tiene

$$|arg(x, y) - arg(0, a)| = |\operatorname{arc\,tg}(y/x) + \pi - (\pi/2)|$$
$$\leq |arctg((\delta - a)/\delta) + \pi - (\pi/2)| = |arctg((\delta - a)/\delta) - (-\pi/2)| < \epsilon$$

Es decir, si $(x, y) \in B((0, a), \delta)$, $|arg(x, y) - arg(0, a)| < \epsilon$. Por lo que la función argumento es continua en $(0, a)$.

- g no es continua en $\{(x, y) : y = 0, x > 0\}$:
  Aquí falla la continuidad de la función argumento. Simplemente basta con ver que si consideramos $(a, 0)$ (cuyo argumento es 0), se tiene que $arg(a, -b) \in (3\pi/2, 2\pi)$ con $b > 0$ cualquiera.

Concluímos en que $g = f^{-1}$ pero f^{-1} no es continua en todo su dominio (sin embargo sí es continua en $\mathbb{R}^2 \setminus \{(x, y) : y = 0, x \geq 0\}$).

Observaciones:

-Para responder la última pregunta del ejercicio solo basta con probar que f^{-1} no es continua en un punto. Sin embargo es útil saber que f^{-1} sí es continua en la mayor parte de su dominio.

-Si una función f es continua, invertible, y su inversa es continua, decimos que f es un homeomorfismo. En este caso, si nos restringimos a una región del plano que no contenga a $\{(x, y) : y = 0, x \geq 0\}$ se tiene que la restricción de f a esta región es un homeomorfismo.

Ejercicio 15

(a) Sea $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ una función continua y $A \subset \mathbb{R}^m$ un abierto, veamos que $f^{-1}(A)$ lo es. Dado $p \in f^{-1}(A)$, sea $b = f(p) \in A$ y como A es abierto existe $\epsilon > 0$ tal que $B_\epsilon(b) \subset A$. Al ser f continua en p existe un $\delta > 0$ tal que $f(B_\delta(p)) \subset B_\epsilon(b) \subset A$, es decir $B_\delta(p) \subset f^{-1}(A)$ y por lo tanto $f^{-1}(A)$ es abierto.

Si $f^{-1}(A)$ es abierto para todo $A \subset \mathbb{R}^m$ abierto, veamos que f es continua. Dado $p \in \mathbb{R}^n$ y $\epsilon > 0$, tomemos $b = f(p)$ y $A = B_\epsilon(b)$. Entonces $f^{-1}(A)$ es abierto y $p \in f^{-1}(A)$, es decir existe $\delta > 0$ tal que $B_\delta(p) \subset f^{-1}(A)$, o sea $f(B_\delta(p)) \subset B_\epsilon(b)$. Dicho en otras palabras, f es continua en p.

(b) Como el complemento se comporta bien con tomar preimagen y C es cerrado si y sólo si C^c es abierto, la afirmación se deduce directamente del item (a).

(c) Definimos las siguientes funciones (continuas):

$$f, g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R} \text{ como } \begin{cases} f(x, y, z) = x^2 + y^3 \\ g(x, y, z) = y^2 + z^3 \end{cases}$$

Consideramos los abiertos de $\mathbb{R}$ dados por $(-\infty, 4)$ y $(2, +\infty)$.

Luego $f^{-1}(-\infty, 4)$ y $g^{-1}(2, +\infty)$ son abiertos.

Observamos que $f^{-1}(-\infty, 4) = \{(x, y, z) : x^2 + y^3 < 4\}$ y $g^{-1}(2, +\infty) = \{(x, y, z) : y^2 + z^3 > 2\}|$. Esto implica que $A = f^{-1}(-\infty, 4) \cap g^{-1}(2, +\infty)$. Como la intersección finita de abiertos es abierto, se tiene que A es un abierto.

Ejercicios opcionales

Ejercicio 1

Sea $C \subset \mathbb{R}^n$ cerrado y $f : C \to \mathbb{R}^m$ una función continua.

Para probar que $graf(f) = \{(x, f(x)) \ : \ x \in C\}$ es cerrado, probemos que su complemento es abierto.

Sea $(x, y) \in graf(f)^c$. Si $x \notin C$, entonces tenemos que existe $\epsilon > 0$ tal que $B_\epsilon(x) \subset C^c$ por ser C cerrado. Por lo tanto $B_\epsilon(x, y) \subset graf(f)^c$.

Si $x \in C$, entonces $y \neq f(x)$, por lo $||y - f(x)|| = \epsilon > 0$ y llamemos $U = B_{\epsilon/2}(y)$ y $V = B_\epsilon(f(x))$. Observar que $U \cap V = \emptyset$.

Por ser f continua, existe $\delta > 0$ tal que $f(B_\delta(x) \cap C) \subset B_{\epsilon/2}(f(x))$. Llamemos $W = B_\delta(x)$, y consideremos el abierto $W \times U$ de $\mathbb{R}^{n+m}$, veamos que $W \times U \cap graf(f) = \emptyset$. Sea $(z, f(z)) \in graf(f)$, si $z \notin W$ es claro que $(z, f(z)) \notin W \times U$. Si $z \in W$ tenemos por continuidad que $f(z) \in V$ y por tanto $f(z) \notin U$, es decir $(z, f(z)) \notin W \times U$. Ademas es claro que $(x, y) \in W \times U \subset graf(f)^c$, por lo tanto como (x, y) era cualquiera, probamos que todo punto es interior, es decir, $graf(f)^c$ es abierto.

Ejercicio 2

(a) Dado $x \in C$, consideremos la función $d_x : C \to \mathbb{R}$ definida por $d_x(y) = d(x, y)$ que claramente es continua. Al ser C compacto, sabemos que d_x alcanza su máximo, es decir, existe un $y_x \in C$ tal que $d_x(y) \leq d_x(y_x)$ para todo $y \in C$. Si tomamos ahora supremo en $x \in C$, al ser C compacto, tenemos que ese supremo es un máximo, es decir, existe $x_0 \in C$ tal que $d_{x_0}(y_{x_0}) \geq d_x(y_x)$ para todo $x \in C$. En conclusión existe un para $x, y \in C$ tal que $d(x, y) = diam(A)$.

(b) Si C fuera compacto existe un par $x_0, y_0 \in C$ tal que $d(x_0, y_0) = diam(A)$, por lo tanto $||f(x_0) - f(y_0)|| \leq diam(A) = ||x_0 - y_0||$, lo que contradice la condición de f.

Tomemos $C = \{(x, 0) \in \mathbb{R}^2 \ : \ x \neq 0\}$ y consideremos $f : C \to C$ definida por $f(x, 0) = (2x, 0)$, es claro verifica la condición deseada.

Ejercicio 3

Consideremos las proyecciones $\pi_i : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}$ en la coordenada i. Es claro que π_i es continua para cada $i \in \{1, 2, 3, 4\}$. Por lo tanto, la función $g_{ij}(a, b, c, d) = \pi_i(a, b, c, d)\pi_j(a, b, c, d)$ es continua para todo $i, j \in \{1, 2, 3, 4\}$ por ser producto de funciones continuas. Por consiguiente como $det = g_{14} - g_{23}$ es continua por ser resta de funciones continuas.

Esto mismo se puede hacer para ver que toda función polinomial en $\mathbb{R}^n$ es continua.

Ahora observar que $\mathcal{A} = f^{-1}(\mathbb{R} \setminus \{0\})$ y por lo tanto es abierto. Como $\mathcal{B} = \mathcal{A}^c$ tenemos que es cerrado.

Ejercicio 5

Si C no fuera compacto, existe una sucesión x_n que no tiene ninguna subsucesión convergente. Por lo tanto para cada $n \in \mathbb{N}$, existe ε_n tan que si $n \neq m$ se tiene $B_{\varepsilon_m}(x_m) \cap B_{\varepsilon_n}(x_n) = \emptyset$.

Consideremos entonces la función $f : C \to \mathbb{R}$ medianto $f(x)$ si $x \notin B_{\varepsilon_n}(x_n)$ para todo n y $f(x) = n\left(1 - \dfrac{d(x, x_n)}{\epsilon_n}\right)$ si $x \in B_{\varepsilon_n}$. Es claro que f no es acotada y continua, lo que contradice las hipótesis.

Por lo tanto C es compacto.

Ejercicio 8

i $\Rightarrow$ ii: Como es continua, en particular lo es en 0.

ii $\Rightarrow$ iii: Por ser continua en 0, existe un $\delta > 0$ tal que $||x|| < \delta$ implica $||T(x)|| < 1$. Por lo tanto para todo $x \in V$ se tiene

$$||T(x)|| = \left|\left|\frac{||x||}{\delta} T\left(\delta \frac{x}{||x||}\right)\right|\right| = \frac{||x||}{\delta}\left|\left|T\left(\delta \frac{x}{||x||}\right)\right|\right| \leq \frac{1}{\delta}||x||$$

iii $\Rightarrow$ iv: Es aplicar lo anterior al vector $x - y$.

iv $\Rightarrow$ v: Si $A \subset V$ es acotado, entonces existe $M \in \mathbb{R}$ tal que $||v|| \leq M$ para todo $v \in A$. Por lo tanto

$$||T(v)|| = ||T(v) - T(0)|| \leq k||v - 0|| = k||v|| \leq kM$$

para todo $v \in A$, es decir $T(A)$ es acotado.

v $\Rightarrow$ i: Por hipótesis como la bola $B_1(v)$ es acotada, existe un $k \in \mathbb{R}^+$ tal que $||T(x)|| \leq k$ si $||x|| \leq 1$.

Dado $\varepsilon > 0$ queremos encontrar $\delta > 0$ tal que si $||v - w|| < \delta$ entonces $||T(v) - T(x)|| < \varepsilon$.

Observar que como

$$||T(v) - T(w)|| = ||T(v - w)|| = \left|\left| ||v - w|| T\left(\frac{v - w}{||v - w||}\right) \right|\right| \leq ||v - w||k,$$

basta tomar $\delta < \dfrac{\varepsilon}{k}$.