Solución primer parcial (vespertino) – Sábado 17 de octubre de 2020

(I) Múltiple opción. Total: 30 puntos

Puntajes: 5 puntos si la respuesta es correcta, 0 punto por no contestar y -1 si la respuesta es incorrecta.
Indique sus respuestas en los casilleros correspondientes, con letras mayúsculas imprenta: A, B, C, D o E.

Ejercicio 1	Ejercicio 2	Ejercicio 3	Ejercicio 4	Ejercicio 5	Ejercicio 6
B	A	A	B	A	E

Ejercicio 1

Se considera el polinomio complejo $P(z) = (z^4 - 1)(z^4 - i)$, y las siguientes afirmaciones:

(I) P tiene 8 raíces en $\mathbb{C}$.
(II) Existe al menos un par de raíces z_i y z_j tales que $z_i = \bar{z}_j$.
(III) Si rotamos el conjunto de raíces un ángulo de $\pi/2$, permanece invariante[1].

Entonces:

A) Solo las afirmaciones (I) y (III) son correctas.
B) Todas las afirmaciones son correctas.
C) Solo las afirmaciones (II) y (III) son correctas.
D) Ninguna afirmación es correcta.
E) Solo la afirmación (I) es correcta.

Solución:
Por el teorema fundamental del álgebra, sabemos que como el grado de $P(z)$ es 8, va a tener 8 raices (contadas con multiplicidad).
Observar que $i^4 = (-i)^4 = 1$, de donde $P(i) = P(-i) = 0$, por lo tanto tenemos un par de raíces que son conjugadas.
Sea z_0 una raíz de $P(z)$, rotar z_0 un ángulo $\pi/2$ es multiplicarlo por $e^{\pm i\pi/2}$, por lo tanto

$$(e^{\pm i\pi/2} z_0)^4 = e^{(\pm i\pi/2)4} z_0 = e^{\pm i2\pi} z_0^4 = z_0^4.$$

Por lo que $P(e^{\pm i\pi/2} z_0) = P(z_0) = 0$, es decir el conjunto de raíces permanece invariante por la rotación de ángulo $\pi/2$.
En conclusión, todas las afirmaciones son verdaderas.
Respuesta: **B**.

Ejercicio 2

Sea $y(t)$ la solución a la ecuación diferencial $y' = (y+1)t$ que cumple $y(0) = 0$. Entonces $y(1)$ vale:

A) $y(1) = e^{1/2} - 1$
B) $y(1) = e^{1/2}$
C) $y(1) = e^{-1/2} - 1$
D) $y(1) = e^{-1/2}$
E) $y(1) = e + 1$

[1] Es decir, que si rotamos el conjunto, obtenemos el mismo conjunto.

Solución:
Como vemos es una ecuación en variables separables, la podemos escribir $\frac{y'}{y+1} = t$. Integrando según t en ambos lados de la igualdad obtenemos

$$\int \frac{y'}{y+1} dt = \frac{t^2}{2} + k.$$

Integrando el lado izquierdo, observando que $y'dt = dy$, tenemos

$$L|y+1| = \frac{t^2}{2}.$$

De donde, si componemos con la exponencial, obtenemos $|y+1| = \tilde{k}e^{\frac{t^2}{2}}$. Como la condición inicial es $y(0) = 0$, estamos del lado donde $y+1$ es positivo, por ende tenemos que $1 = y(0) + 1 = \tilde{k}e^0 = \tilde{k}$. Es decir, la solución de la ecuación diferencial es

$$y = e^{\frac{t^2}{2}} - 1.$$

Se sigue que $y(1) = e^{\frac{1}{2}} - 1$.
Respuesta: **A**

Ejercicio 3

Sea $a_n = (e^{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}} - 1) \cdot n^\alpha$ con α un real positivo. Entonces:

A) $\lim_{n\to\infty} a_n$ es finito sii $\alpha \leq \frac{1}{2}$.
B) $\lim_{n\to\infty} a_n$ es finito sii $\alpha \leq 1$.
C) $\lim_{n\to\infty} a_n$ es finito para todo α.
D) $\lim_{n\to\infty} a_n$ no es finito para ningún α.
E) $\lim_{n\to\infty} a_n$ es finito sii $\alpha \leq \frac{3}{2}$.

Solución:
Como $\sqrt{n+1} - \sqrt{n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$, entonces tenemos que $e^{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}} - 1$ es equivalente con $\sqrt{n+1} - \sqrt{n}$. Observar que por binomio conjugado podemos escribir $\sqrt{n+1} - \sqrt{n} = \frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}$. Por lo tanto nos queda,

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to+\infty} (e^{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}} - 1)n^\alpha &= \lim_{n\to+\infty} (\sqrt{n+1} - \sqrt{n})n^\alpha \\
&= \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}} n^\alpha \\
&= \lim_{n\to+\infty} \frac{n^\alpha}{2n^{1/2}} \\
&= \frac{1}{2} \lim_{n\to+\infty} n^{\alpha-1/2}.
\end{aligned}$$

Por lo tanto, tenemos que $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n$ es finito sii $\alpha \leq 1/2$.
Respuesta: **A**.

Ejercicio 4

Considere las series

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\log(n) + (n^4 + 2n^2 + 3n + 1)e^{-n}}{n^2 + 3n + 6} \quad \text{y} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n-1}{(\sqrt{2})^n}.$$

Entonces:

A) Ambas series son divergentes.
B) Ambas series son convergentes.

C) Solo la primera serie es convergente.
D) Solo la segunda serie es convergente.
E) La primera serie converge condicionalmente y la segunda serie es divergente.

Solución:
Consideremos la serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\log(n)+(n^4+2n^2+3n+1)e^{-n}}{n^2+3n+6}$, observar que la podemos separar en la suma de las siguientes dos series $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\log(n)}{n^2+3n+6}$ y $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(n^4+2n^2+3n+1)e^{-n}}{n^2+3n+6}$.
Observar que como $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\frac{\log(x)}{x^2+3x+6}x^{3/2}=0$ tenemos que a partir de un momento $\displaystyle\frac{\log(n)}{n^2+3n+6}$ es menor que $\frac{1}{n^{3/2}}$, por comparación, entonces llegamos a que $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\log(n)}{n^2+3n+6}$ converge.
Para ver que sucede con $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(n^4+2n^2+3n+1)e^{-n}}{n^2+3n+6}$, intentemos aplicar el criterio del cociente.

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{((n+1)^4+2(n+1)^2+3(n+1)+1)e^{-(n+1)}}{(n+1)^2+3(n+1)+6}\frac{n^2+3n+6}{(n^4+2n^2+3n+1)e^{-n}}=$$
$$\lim_{x\to+\infty}\frac{(n+1)^4+2(n+1)^2+3(n+1)+1}{n^4+2n^2+3n+1}\frac{n^2+3n+6}{(n+1)^2+3(n+1)+6}\frac{e^{-n-1}}{e^{-n}}=\lim_{n\to+\infty}e^{-1}<1$$

Por lo tanto, $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(n^4+2n^2+3n+1)e^{-n}}{n^2+3n+6}$ converge. En conclusión, $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\log(n)+(n^4+2n^2+3n+1)e^{-n}}{n^2+3n+6}$ converge, y por lo tanto la serie de la izquierda converge.
Para la serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n-1}{(\sqrt{2})^n}$, intentemos aplicar el criterio del cociente.

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{2(n+1)-1}{(\sqrt{2})^{n+1}}\frac{(\sqrt{2})^n}{2n-1}=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{\sqrt{2}}\frac{2n+1}{2n-1}=\frac{1}{\sqrt{2}}<1$$

Por lo tanto, $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n-1}{(\sqrt{2})^n}$ converge.
Respuesta: **B**.

Ejercicio 5

Sean α y β dos reales positivos. Considere la integral impropia

$$\int_1^{\infty}\frac{dx}{x(\ln(x))^{\alpha}(e^x+1)^{\beta}}.$$

Entonces la integral es convergente sí y solo sí:

A) $\alpha<1$, y para todo $\beta>0$
B) $\alpha+\beta<1$.
C) $\alpha<\frac{1}{2}$, y $\beta>1$
D) $\alpha<1$ y $\beta>1$.
E) $\alpha+\beta<\frac{1}{2}$.

Solución:
Observar que la integral es una mixta, ya que $\ln(x)$ se anula en 1, por lo que debemos separar la integral en dos, por ejemplo $\displaystyle\int_1^2\frac{dx}{x(\ln(x))^{\alpha}(e^x+1)^{\beta}}$ y $\displaystyle\int_2^{\infty}\frac{dx}{x(\ln(x))^{\alpha}(e^x+1)^{\beta}}$.

Para $\int_1^2 \frac{dx}{x(\ln(x))^\alpha(e^x+1)^\beta}$, tomemos $f(x)=\frac{1}{x(\ln(x))^\alpha(e^x+1)^\beta}$, tenemos entonces que $f(x)$ es equivalente a $2\ln(x)^{-\alpha}$ cuando $x\to 1$, además, sabemos que $\ln(u)\sim u-1$ si $u\to 1$, por lo tanto tenemos que $f(x)$ es equivalente a $2(x-1)^{-\alpha}$ cuando $x\to 1$. Como sabemos que $\int_1^2 \frac{dx}{(x-1)^\alpha}$ es convergente si y solo si $\alpha<1$, tenemos, por el criterio de equivalentes que $\int_1^2 \frac{dx}{x(\ln(x))^\alpha(e^x+1)^\beta}$ es convergente si y solo si $\alpha<1$.
Para $\int_2^\infty \frac{dx}{x(\ln(x))^\alpha(e^x+1)^\beta}$, observar que si tomamos el limite del cociente de $f(x)$ y $1/x^2$, obtenemos

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x^2}{x(\ln(x))^\alpha(e^x+1)^\beta}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x}{(\ln(x))^\alpha e^{\beta x}}=0$$

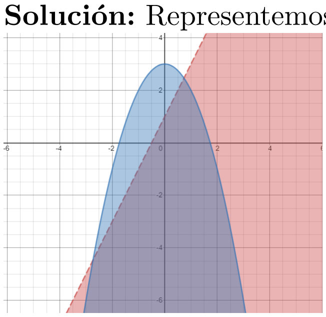
De donde se sique que para x grandes $f(x)<\frac{1}{x^2}$. Por comparación tenemos que $\int_2^\infty \frac{dx}{x(\ln(x))^\alpha(e^x+1)^\beta}$ es convergente.
En conclusión, como ambas partes son convergentes si y solo si $\alpha<1$, tenemos entonces, que $\int_1^\infty \frac{dx}{x(\ln(x))^\alpha(e^x+1)^\beta}$ es convergente si y solo si $\alpha<1$.
Respuesta: **A**.

Ejercicio 6

Definimos el conjunto $A=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2: y<2x+1\ \}\cap\{(x,y)\in\mathbb{R}^2: y+x^2\leq 3\ \}$. Seleccionar la opción correcta.

A) El conjunto de los puntos interiores de A coincide con A.
B) A es un conjunto cerrado.
C) $\partial A\subset A$.
D) $A'\subset A$.
E) El conjunto de puntos de acumulación A' es no acotado.

Solución: Representemos gráficamente los conjuntos para tener una idea.



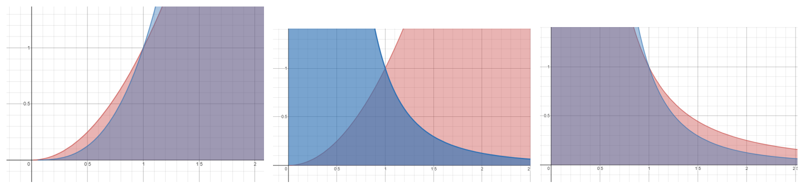
Como podemos ver en la gráfica, el conjunto $\{(0,y):\ \ y\leq 0\}\subset A'$, ya que son puntos interiores del conjunto A. Por lo tanto tenemos que A' no está acotado.
Respuesta: **E**.

(II)Desarrollo. Total: 10 puntos

Sean $A_1=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2: x\geq 0, y\geq 0, y\leq x^\alpha\}$ y $A_2=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2: x\geq 0, y\geq 0, y\leq x^\beta\}$, con α y β constantes reales y $\alpha\leq\beta$.

1. Realizar bosquejos de A_1 y A_2 (ambos en el mismo sistema de ejes) para los siguientes casos:
   a) $\beta\geq\alpha>0$
   b) $\beta\geq 0>\alpha$
   c) $0>\beta>\alpha$

Solución:



(A) $\beta \geq \alpha > 0$ (B) $\beta \geq 0 > \alpha$ (C) $0 > \beta > \alpha$

2. Indicar para qué valores de α y β el área de $A_1 \cap A_2$ es finita. Justificar.

Solución:

Como vemos en los bosquejos de la parte anterior, si ambos son positivos nos va a pasar que el área de $A_1 \cap A_2$ es mayor que $\int_1^{+\infty} x^{\alpha} dx$ que diverge.

En el caso en que β es positivo y α es negativo tenemos que el área de $A_1 \cap A_2$ es la suma de $\int_0^1 x^{\beta} dx$ y $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^{-\alpha}}$. La primer integral no tiene ningún problema, así que es finita. La segunda, converge si y sólo si $\alpha < -1$. Por lo tanto tenemos que en este caso el área es finita si y sólo si $\beta \geq 0 > -1 > \alpha$.

Del mismo modo, si ambos son negativos teneos que el área de $A_1 \cap A_2$ es igual a la suma de $\int_0^1 \frac{dx}{x^{-\beta}}$ y $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^{-\alpha}}$. La primera converge si y solo si $\beta > -1$, mientras que la segunda converge si y solo si $\alpha < -1$. Por lo tanto tenemos que en este caso el área es finita si y sólo si $0 > \beta > -1 > \alpha$.

En conclusión el área de $A_1 \cap A_2$ es finita si y sólo si $\beta > -1 > \alpha$.

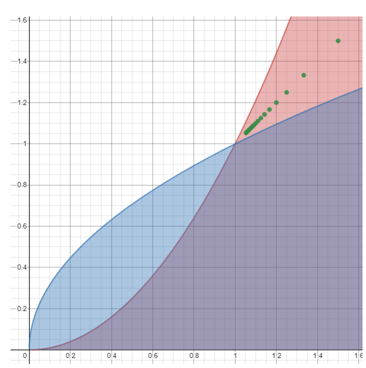
3. Para $\alpha = \frac{1}{2}$ y $\beta = 2$, considere ahora el conjunto $B = (A_1 \cap A_2) \cup \{(1 + \frac{1}{n}, 1 + \frac{1}{n}) : n \in \mathbb{N}\}$.

   a) Calcule los conjuntos ∂B y $\partial B \cap B$.

   b) ¿Es B un conjunto cerrado? Justifique.

Solución:

Hagamos una representación gráfica (aproximada) de B.



Los puntos verdes son el conjunto $\{(1 + \frac{1}{n}, 1 + \frac{1}{n}) : n \in \mathbb{N}\}$ para los primeros 19 valores de n, en general se seguirán acercando al $(1, 1)$.

Podemos ver entonces que todos los puntos de $\{(1+\frac{1}{n}, 1+\frac{1}{n}) : n \in \mathbb{N}\}$ son puntos frontera de B, por lo tanto $\partial B = \partial(A_1 \cap A_2) \cup \{(1 + \frac{1}{n}, 1 + \frac{1}{n}) : n \in \mathbb{N}\}$, es decir

$$\partial B = \{(x, \sqrt{x}) \in \mathbb{R}^2 : x \geq 1\} \cup \{(x, x^2) \in \mathbb{R}^2 : 1 \geq x \geq 0\} \cup \{(x, 0) \in \mathbb{R}^2 : x \geq 0\} \cup \left\{ \left(1+\frac{1}{n}, 1+\frac{1}{n}\right) : n \in \mathbb{N} \right\}$$

Además es claro que $\partial B \subset B$, por lo tanto tenemos que $\partial B \cap B = \partial B$ y que B es cerrado.