Universidad de la República **Cálculo diferencial e integral en varias variables**
Facultad de Ingeniería - IMERL **Segundo Semestre 2020**

Solución primer parcial (matutino) – Sábado 17 de octubre de 2020

(I) Múltiple opción. Total: 30 puntos

Puntajes: 5 puntos si la respuesta es correcta, 0 punto por no contestar y -1 si la respuesta es incorrecta.
Indique sus respuestas en los casilleros correspondientes, con letras mayúsculas imprenta: A, B, C, D o E.

Ejercicio 1	Ejercicio 2	Ejercicio 3	Ejercicio 4	Ejercicio 5	Ejercicio 6
D	B	A	B	A	E

Ejercicio 1

Se considera el polinomio complejo $P(z) = z^3 + 2z^2 + \frac{3}{2}z + \frac{1}{2}$, y las siguientes afirmaciones:

(I) Existen dos raíces tales que su suma es igual a la raíz restante.
(II) La distancia entre dos raíces distintas siempre es constante.
(III) El producto de todas las raíces es igual al inverso de la suma de todas sus raíces.

Entonces:

A) Todas las afirmaciones son correctas.
B) Ninguna afirmación es correcta.
C) Solo las afirmaciones (II) y (III) son correctas.
D) Solo las afirmaciones (I) y (III) son correctas.
E) Solo la afirmación (I) es correcta.

Solución:
Calculemos las raíces de $P(z)$.
Se puede ver que tenemos raíz evidente $z = -1$, ya que $1 + 3/2 = 2 + 1/2$. Por lo tanto podemos escribir $P(z) = (z+1)(z^2 + z + 1/2)$, calculando las raíces del segundo término tenemos,

$$z = \frac{-1 \pm \sqrt{1-2}}{2} = \frac{-1 \pm i}{2}.$$

Ahora si realizamos la suma de estas últimas dos, nos da $\frac{-1+i}{2} + \frac{-1-i}{2} = -1$, por lo que (I) es verdadera.
Es claro que $\left|\frac{-1+i}{2} - \frac{-1-i}{2}\right| = \frac{1}{2}$, mientras que $\left|\frac{-1+i}{2} - (-1)\right| = \left|\frac{1+i}{2}\right| = \sqrt{1/2}$. Por lo tanto (II) es falsa.
Para ver la tercera afirmación veamos si la suma de las raíces por el producto de las mismas da 1.

$$\left(-1 + \frac{-1+i}{2} + \frac{-1-i}{2}\right)(-1)\frac{(-1+i)}{2}\frac{(-1-i)}{2} = (-2)(-1)\frac{(-1)^2 - i^2}{4} = \frac{2}{2} = 1$$

Entonces (III) es verdadera.
En conclusión, solo (I) y (III) son verdaderas.
Respuesta: **D**.

Ejercicio 2

Sea $y(x)$ la solución a la ecuación diferencial $y'' + 2y' + 2y = 5e^x$ que cumple $y(0) = 1, y'(0) = 2$. Calcule $y(\pi/2)$:

A) $y(\pi/2) = e^{-\pi/2} - e^{\pi/2}$
B) $y(\pi/2) = e^{-\pi/2} + e^{\pi/2}$
C) $y(\pi/2) = e^{-\pi/2}$

D) $y(\pi/2) = e^{\pi/2}$
E) $y(\pi/2) = \frac{\pi}{2}e^{\pi/2}$

Solución:
Las raíces del polinomio característico $\lambda^2 + 2\lambda + 2$ son $-1+i$ y $-1-i$, por lo tanto la solución general de la ecuación homogénea es $y_H(x) = e^{-x}(c_1 \cos(x) + c_2 \operatorname{sen}(x))$.
Observar que e^x verifica la condición $(e^x)'' + 2(e^x)' + 2e^x = 5e^x$, por lo tanto es una solución particular, es decir $y_P(x) = e^x$.
Juntando todo tenemos que la solución general de la ecuación es $y(x) = e^{-x}(c_1 \cos(x) + c_2 \operatorname{sen}(x)) + e^x$.
Aplicando condiciones iniciales, tenemos que $y(0) = c_1 + 1 = 1$ y $y'(0) = 1 - c_1 + c_2 = 2$, de donde se sigue $c_1 = 0$ y $c_2 = 1$. Es decir $y = e^{-x}sen(x) + e^x$.
Si evaluamos en $\pi/2$ obtenemos $y(\pi/2) = e^{-\pi/2} + e^{\pi/2}$.
Respuesta: **B**.

Ejercicio 3

Se consideran las siguientes afirmaciones:

(I) Si A es un conjunto cerrado y $p \notin A$, entonces no existe ninguna sucesión con elementos de A que converja a p.
(II) Sea $a_n = (-1)^n + \frac{1}{n}$. Entonces existen infinitas subsucesiones de a_n que convergen a -1.
(III) Si a_n es no acotada, entonces toda subsucesión de a_n también es no acotada.

Entonces:

A) Solo las afirmaciones (I) y (II) son correctas.
B) Todas las afirmaciones son correctas.
C) Solo las afirmaciones (II) y (III) son correctas.
D) Ninguna afirmación es correcta.
E) Solo la afirmación (I) es correcta.

Solución:
Si A es cerrado y $p \notin A$, entonces $p \in A^c$ que es abierto, por lo tanto p es un punto interior de A^c. Por lo tanto, cualquier sucesión que converja a p a partir de un momento tiene que estar incluida en A^c. Es decir, (I) es verdadera.
Dado $r \in \mathbb{N}$ consideremos el subconjunto de los naturales $K_r = \{1, \cdots, r\} \cup \{2n+1 : \ n \in \mathbb{N}\}$. Es claro que la subsucesión a_k tal que $k \in K_r$ converge a -1. Dado que r es cualquier natural, tenemos infinitas subsucesiones que convergen a -1. Es decir, (II) es verdadera.
Considerar la sucesión que toma valor n en los pares y 1 es los impares. Es claro que a_n es no acotada, pero a_{2n+1} si lo es. Es decir, (III) es falsa.
En conclusión solo (I) y (II) son verdaderas.
Respuesta: **A**.

Ejercicio 4

Sea a_n una sucesión de términos positivos tal que $\sum a_n$ es convergente. Considere las siguientes series

$$\sum_{n=1}^{\infty} e^{a_n^2} - 1 \quad \text{y} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \cos(a_n)\sin(a_n).$$

Entonces:

A) Ambas series son divergentes.
B) Ambas series son convergentes.
C) Solo la primera serie es convergente.

D) Solo la segunda serie es convergente.

E) La segunda serie no se puede clasificar a priori, por no ser de signo constante.

Solución:

Al ser $\sum a_n$ convergente, tenemos que $a_n \xrightarrow{n\to+\infty} 0$ y por lo tanto, $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{e^{a_n^2}-1}{a_n} = \lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{a_n^2}{a_n} = 0$, por lo que a partir de un momento tenemos $e^{a_n^2}-1 < a_n$. Por comparación, al ser ambas de términos positivos, tenemos que $\sum\limits_{n=1}^{\infty} e^{a_n^2}-1$ es convergente.

Como $a_n \xrightarrow{n\to+\infty} 0$, a partir de un momento vamos a tener $a_n \in [0, \pi/2]$, es decir $0 \le \cos(a_n) \le 1$. Por lo tanto, a partir de un momento $\cos(a_n)\operatorname{sen}(a_n) \le \operatorname{sen}(a_n)$ y $\operatorname{sen}(a_n) \sim a_n$, por lo que $\sum \operatorname{sen}(a_n)$ y $\sum a_n$ se comportan de la misma manera. Entonces, $\sum \operatorname{sen}(a_n)$ converge y por comparación también lo hace $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \cos(a_n)\sin(a_n)$.

En conclusión, ambas son convergentes.

Respuesta: **B**.

Ejercicio 5

Sean α, β, γ tres reales positivos. Considere la integral impropia $\displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{(\operatorname{sen}(x))^{\alpha}(e^x-1)^{\beta}(\cos(x))^{\gamma}}$.
Entonces para que la integral sea convergente debe cumplirse:

A) $\alpha + \beta < 1$.

B) $\alpha + \beta + \gamma < 1$.

C) $\alpha < 1$, y $\beta + \gamma > \frac{1}{2}$

D) $\alpha + \beta + \gamma > 1$.

E) $\alpha + \beta < \frac{1}{2}$.

Solución:

Observar que esta integral es de segunda especie, y el único problema que $\operatorname{sen}(x)$ y $e^x - 1$ se anulan en 0.

Si $f(x) = \frac{1}{(\operatorname{sen}(x))^{\alpha}(e^x-1)^{\beta}(\cos(x))^{\gamma}}$, tenemos que cuando x tiende a 0, $f(x)$ es equivalente a $\dfrac{1}{x^{\alpha+\beta}}$, por lo que la integral se comporta del mismo modo que $\displaystyle\int_0^1 \frac{dx}{x^{\alpha+\beta}}$ que es convergente si y sólo si $\alpha + \beta < 1$.

Respuesta: **A**.

Ejercicio 6

Sea $A = \{(\frac{1}{n}, (-1)^n) : n \in \mathbb{N}\} \subset \mathbb{R}^2$.

Seleccione la opción correcta (recuerde que A' es el conjunto de puntos de acumulación de A):

A) $A' = \emptyset$.

B) A es compacto.

C) $A' = A$.

D) A es cerrado.

E) $A \subset \partial A$.

Solución:

Observar que tanto $(0, 1)$ como $(0, -1)$ pertenecen a A' y no al conjunto A. Por lo que, $A' \neq \emptyset$ y $A' \neq A$. Además, como $A' \not\subset A$, entonces A no puede ser cerrado y tampoco compacto.

Por lo tanto $A \subset \partial A$.

Respuesta: **E**.

(II) Desarrollo. Total: 10 puntos

1. Sea $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de números reales. Completar las siguientes definiciones:
   a) (a_n) es convergente a $p \in \mathbb{R}$ si dado $\epsilon > 0$ existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $a_n \in B(p, \epsilon)$ para todo $n \geq n_0$.
   b) (a_n) es monónona creciente si $a_{n+1} \geq a_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$.
   c) (a_n) es acotada si existe un $k \in \mathbb{R}$ tal que $\{a_n\} \subset B(0, k)$.
2. Dar ejemplos de:
   a) Una sucesión convergente que no es monótona.
   b) Una sucesión acotada que no es convergente.
   Solución:
   La sucesión $a_n = \dfrac{(-1)^n}{n}$ es convergente pero no monótona.
   La sucesión $a_n = (-1)^n$ es acotada pero no convergente.
3. Consideremos la sucesión de término general $a_n = \dfrac{1 + \log(n)}{n^3}$.
   Probar que es monótona (decreciente), acotada y convergente.
   Solución:
   Consideremos la función $f(x) = \dfrac{1 + \log(x)}{x^3}$, tenemos entonces que la derivada es
   $$f'(x) = \frac{x^2(-2 - 3\log(x))}{x^6}.$$
   Por lo tanto, la derivada es negativa si $x \geq 1$, esto implica que $f(x)$ es monótona decreciente si $x \geq 1$, y por tanto nuestra sucesión es monótona decreciente.

   Además, como $1 + log(n) > 0$ y $n^3 > 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$, tenemos que $a_n > 0$ y al ser monótona decreciente tenemos que $1 = a_1 \geq a_n > 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Es decir, a_n está acotada.

   Al ser monótona y acotada, tiene que ser convergente (Teorema 2.9).