Universidad de la República — **Cálculo diferencial e integral en varias variables**

Facultad de Ingeniería - IMERL — **Segundo Semestre 2020**

PRIMER PARCIAL – SÁBADO 17 DE OCTUBRE DE 2020

Nro de Parcial	Cédula	Apellido y nombre

(I) Múltiple opción. Total: 30 puntos

Puntajes: 5 puntos si la respuesta es correcta, 0 punto por no contestar y -1 si la respuesta es incorrecta.

Indique sus respuestas en los casilleros correspondientes, con letras mayúsculas imprenta: A, B, C, D o E.

Ejercicio 1	Ejercicio 2	Ejercicio 3	Ejercicio 4	Ejercicio 5	Ejercicio 6

Ejercicio 1

Se considera el polinomio complejo $P(z) = (z^4 - 1)(z^4 - i)$, y las siguientes afirmaciones:

(I) P tiene 8 raíces en $\mathbb{C}$.

(II) Existe al menos un par de raíces z_i y z_j tales que $z_i = \bar{z}_j$.

(III) Si rotamos el conjunto de raíces un ángulo de $\pi/2$, permanece invariante[1].

Entonces:

A) Solo las afirmaciones (I) y (III) son correctas.

B) Todas las afirmaciones son correctas.

C) Solo las afirmaciones (II) y (III) son correctas.

D) Ninguna afirmación es correcta.

E) Solo la afirmación (I) es correcta.

Ejercicio 2

Sea $y(t)$ la solución a la ecuación diferencial $y' = (y+1)t$ que cumple $y(0) = 0$. Entonces $y(1)$ vale:

A) $y(1) = e^{1/2} - 1$

B) $y(1) = e^{1/2}$

C) $y(1) = e^{-1/2} - 1$

D) $y(1) = e^{-1/2}$

E) $y(1) = e + 1$

Ejercicio 3

Sea $a_n = (e^{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}} - 1) \cdot n^{\alpha}$ con α un real positivo. Entonces:

A) $\lim_{n\to\infty} a_n$ es finito sii $\alpha \leq \frac{1}{2}$.

B) $\lim_{n\to\infty} a_n$ es finito sii $\alpha \leq 1$.

C) $\lim_{n\to\infty} a_n$ es finito para todo α.

D) $\lim_{n\to\infty} a_n$ no es finito para ningún α.

E) $\lim_{n\to\infty} a_n$ es finito sii $\alpha \leq \frac{3}{2}$.

[1]Es decir, que si rotamos el conjunto, obtenemos el mismo conjunto.

Ejercicio 4

Considere las series

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{\log(n)+(n^4+2n^2+3n+1)e^{-n}}{n^2+3n+6} \quad \text{y} \quad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n-1}{(\sqrt{2})^n}.$$

Entonces:

A) Ambas series son divergentes.
B) Ambas series son convergentes.
C) Solo la primera serie es convergente.
D) Solo la segunda serie es convergente.
E) La primera serie converge condicionalmente y la segunda serie es divergente.

Ejercicio 5

Sean α y β dos reales positivos. Considere la integral impropia

$$\int_1^{\infty}\frac{dx}{x(\ln(x))^{\alpha}(e^x+1)^{\beta}}.$$

Entonces la integral es convergente sí y solo sí:

A) $\alpha < 1$, y para todo $\beta > 0$
B) $\alpha + \beta < 1$.
C) $\alpha < \frac{1}{2}$, y $\beta > 1$
D) $\alpha < 1$ y $\beta > 1$.
E) $\alpha + \beta < \frac{1}{2}$.

Ejercicio 6

Definimos el conjunto $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y < 2x+1\ \} \cap \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y + x^2 \leq 3\ \}$. Seleccionar la opción correcta.

A) El conjunto de los puntos interiores de A coincide con A.
B) A es un conjunto cerrado.
C) $\partial A \subset A$.
D) $A' \subset A$.
E) El conjunto de puntos de acumulación A' es no acotado.

(II)Desarrollo. Total: 10 puntos

Sean $A_1 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \geq 0, y \geq 0, y \leq x^{\alpha}\}$ y $A_2 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \geq 0, y \geq 0, y \leq x^{\beta}\}$, con α y β constantes reales y $\alpha \leq \beta$.

1. Realizar bosquejos de A_1 y A_2 (ambos en el mismo sistema de ejes) para los siguientes casos:
   a) $\beta \geq \alpha > 0$
   b) $\beta \geq 0 > \alpha$
   c) $0 > \beta > \alpha$
2. Indicar para qué valores de α y β el área de $A_1 \cap A_2$ es finita. Justificar.
3. Para $\alpha = \frac{1}{2}$ y $\beta = 2$, considere ahora el conjunto $B = (A_1 \cap A_2) \cup \{(1+\frac{1}{n}, 1+\frac{1}{n}) : n \in I\!N\}$.
   a) Calcule los conjuntos ∂B y $\partial B \cap B$.
   b) ¿Es B un conjunto cerrado? Justifique.