

# Entregable 3: Dualidad

10 de octubre de 2023

## Instrucciones

**Objetivo** El objetivo del informe es mostrar que el estudiante fue capaz de resolver una serie de problemas teóricos e implementar y analizar una serie de problemas prácticos. En el primer caso, es fundamental justificar cualquier paso no trivial de la resolución. En el caso de problemas prácticos, es fundamental analizar y comentar todo resultado que se obtenga.

**Contenido** El informe debe contener: resolución detallada de problemas teóricos, resultados de los problemas prácticos, análisis y discusión de los resultados obtenidos. No es necesario (ni aconsejable) incluir: letra de ejercicios, código de los ejercicios prácticos. El código de los ejercicios prácticos debe incluirse en un archivo aparte para posible referencia por parte de los docentes.

**Autoría** Esta es una tarea *individual*. Sus ejercicios deben ser resueltos por el estudiante cuyo nombre, cédula y firma se deben incluir en la carátula del informe. No es admisible la realización colectiva de ninguno de los ejercicios ni sus partes. Tampoco es admisible la búsqueda y/o reutilización, total o parcial, de material en Internet u otros medios, así como entregas disponibles de años anteriores.

Sí es admisible y aconsejable consultar, cotejar, e intercambiar ideas y sugerencias con otros estudiantes. También es admisible utilizar material de referencia tales como: documentación sobre lenguajes de programación, resultados, definiciones y propiedades matemáticas, incluyendo todo el material expuesto en el teórico de este curso, tanto teórico como práctico.

También es admisible la reproducción e inclusión de recetas y código relacionado con aspectos auxiliares, tales como el graficado de funciones, etc., que no hacen al objetivo de los ejercicios.

**Sanciones** Cualquier violación a las anteriores reglas constituye una *falta disciplinaria*. En primera instancia, dicha falta implica la pérdida de los puntos del obligatorio en su totalidad. En caso de reincidencia, se desvinculará al estudiante del curso y quedará registrado como reprobado.

## Conformidad

Todo informe debe incluir una carátula identificando claramente el obligatorio al que hace referencia, la fecha, y el/la autor/a del trabajo. En el último caso, debe incluirse nombre, cédula de identidad (o equivalente), y firma, preferentemente digital. Asimismo, debe incluirse de manera obligatoria el siguiente texto:

i) He leído y estoy de acuerdo con las Instrucciones especificadas en la carátula obligatorio. ii) He resuelto por mi propia cuenta los ejercicios, sin recurrir a informes de otros compañeros, o soluciones existentes. iii) Soy el único autor de este trabajo. El informe y todo programa implementado como parte de la resolución del obligatorio son de mi autoría y no incluyen partes ni fragmentos tomados de otros informes u otras fuentes, salvo las excepciones mencionadas.

**Ejercicio 1 - Problema dual 5.22 [1,p.280]**

Considere el problema primario:

$$\begin{aligned} \min_{x \in \mathbb{R}} x & & (P_1) \\ \text{sujeto a: } x^2 \leq 1. & \end{aligned}$$

- a) Resuelva  $(P_1)$  hallando el ínfimo  $f^*$  y la variable primal óptima  $x^*$ , de existir.  
b) Obtenga el problema dual, y halle el supremo  $d^*$  y la variable dual óptima  $\mu^*$ , de existir.  
c) Analice si se cumple la condición de Slater y determine si se cumplen o no dualidad débil y fuerte.

Repita las partes a) b) y c) para cada uno de los siguientes problemas.

d)

$$\begin{aligned} \min_{x \in \mathbb{R}} x & & (P_2) \\ \text{sujeto a: } x^2 \leq 0. & \end{aligned}$$

e)

$$\begin{aligned} \min_{x \in \mathbb{R}} x & & (P_3) \\ \text{sujeto a: } |x| \leq 0. & \end{aligned}$$

f)

$$\begin{aligned} \min_{x \in \mathbb{R}} x & & (P_4) \\ \text{sujeto a: } g(x) \leq 0. & \end{aligned}$$

$$\text{con } g(x) = \begin{cases} -x + 2, & x \geq 1 \\ x, & x \in (-1, 1) \\ -x - 2, & x \leq -1 \end{cases} .$$

g)

$$\begin{aligned} \min_{x \in \mathbb{R}} x^3 & & (P_5) \\ \text{sujeto a: } x \geq 1. & \end{aligned}$$

(Nota: Dado que  $\lim_{x \rightarrow -\infty} x^3 = -\infty$ , el Lagrangiano no se minimiza anulando su gradiente.)

h)

$$\begin{aligned} \min_{x \geq 0} x^3 & & (P_6) \\ \text{sujeto a: } x \geq 1. & \end{aligned}$$

## Ejercicio 2 - Gestión óptima de la demanda de energía eléctrica

Considere el esquema de una red de tres barras de la Figura 1, con dos generadores y dos cargas.

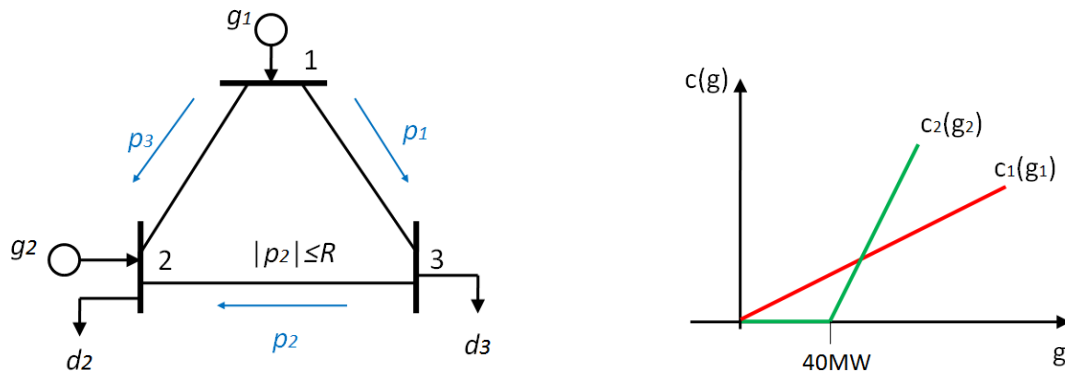


Figura 1: Red eléctrica de tres barras y costos asociados de generación.

Los costos de generación en las barras 1 y 2 están dados por (ver gráfico en Figura 1):

$$c_1(g_1) = g_1, \quad c_2(g_2) = \max\{0, 4(g_2 - 40MW)\}.$$

El problema de optimización que modela esta red es (ver notas del curso):

$$\min_{(p_1, p_2, p_3, g_1 \geq 0, g_2 \geq 0)} c_1(g_1) + c_2(g_2) \quad (1)$$

$$\text{sujeto a: } p_1 + p_3 = g_1 \quad (2)$$

$$g_2 + p_3 + p_2 = d_2 \quad (3)$$

$$p_1 - p_2 = d_3 \quad (4)$$

$$p_3 - p_1 - p_2 = 0 \quad (5)$$

$$|p_2| \leq R; \quad (6)$$

donde  $R = 30MW$ ,  $\bar{d}_3 = 10MW$ , y  $d_2$  se deja como parámetro del problema.

a) Reformule el Problema (1) como un problema de programación lineal (LP). Para esto se sugiere introducir una variable  $t$  (slack), tal que  $c_2(g_2) \leq t$ .

b) Resuelva numéricamente (LP) para cada valor de  $d_2 \in \{0 : 1 : 200\}$  y grafique  $g_1$ ,  $g_2$ ,  $p_2$  y  $\lambda$  en función de  $d_2$ ; siendo  $\lambda$  el multiplicador asociado a la restricción (4). Se sugiere utilizar Julia/Convex-Matlab/CVX-Python/cvxpy.

c) Interprete las gráficas de la parte anterior, explicando los valores de los multiplicadores y justificando los puntos de inflexión. Determine para qué valores de  $d_2$  es conveniente ofrecer energía a precio nulo en la barra 3.

## Referencias

[1] S. Boyd, V. Vanderberghe *Convex Optimization*, Cambridge University Press, 2006.

[2] D. P. Bertsekas, *Nonlinear programming, 3rd ed.*, Athena Scientific, 2017.