

Entregable 3: Dualidad

10 de octubre de 2023

Instrucciones

Objetivo El objetivo del informe es mostrar que el estudiante fue capaz de resolver una serie de problemas teóricos e implementar y analizar una serie de problemas prácticos. En el primer caso, es fundamental justificar cualquier paso no trivial de la resolución. En el caso de problemas prácticos, es fundamental analizar y comentar todo resultado que se obtenga.

Contenido El informe debe contener: resolución detallada de problemas teóricos, resultados de los problemas prácticos, análisis y discusión de los resultados obtenidos. No es necesario (ni aconsejable) incluir: letra de ejercicios, código de los ejercicios prácticos. El código de los ejercicios prácticos debe incluirse en un archivo aparte para posible referencia por parte de los docentes.

Autoría Esta es una tarea *individual*. Sus ejercicios deben ser resueltos por el estudiante cuyo nombre, cédula y firma se deben incluir en la carátula del informe. No es admisible la realización colectiva de ninguno de los ejercicios ni sus partes. Tampoco es admisible la búsqueda y/o reutilización, total o parcial, de material en Internet u otros medios, así como entregas disponibles de años anteriores.

Sí es admisible y aconsejable consultar, cotejar, e intercambiar ideas y sugerencias con otros estudiantes. También es admisible utilizar material de referencia tales como: documentación sobre lenguajes de programación, resultados, definiciones y propiedades matemáticas, incluyendo todo el material expuesto en el teórico de este curso, tanto teórico como práctico.

También es admisible la reproducción e inclusión de recetas y código relacionado con aspectos auxiliares, tales como el graficado de funciones, etc., que no hacen al objetivo de los ejercicios.

Sanciones Cualquier violación a las anteriores reglas constituye una *falta disciplinaria*. En primera instancia, dicha falta implica la pérdida de los puntos del obligatorio en su totalidad. En caso de reincidencia, se desvinculará al estudiante del curso y quedará registrado como reprobado.

Conformidad

Todo informe debe incluir una carátula identificando claramente el obligatorio al que hace referencia, la fecha, y el/la autor/a del trabajo. En el último caso, debe incluirse nombre, cédula de identidad (o equivalente), y firma, preferentemente digital. Asimismo, debe incluirse de manera obligatoria el siguiente texto:

i) He leído y estoy de acuerdo con las Instrucciones especificadas en la carátula obligatorio. ii) He resuelto por mi propia cuenta los ejercicios, sin recurrir a informes de otros compañeros, o soluciones existentes. iii) Soy el único autor de este trabajo. El informe y todo programa implementado como parte de la resolución del obligatorio son de mi autoría y no incluyen partes ni fragmentos tomados de otros informes u otras fuentes, salvo las excepciones mencionadas.

Ejercicio 1 - Problema dual 5.22 [1,p.280]

Considere el problema primario:

$$\begin{aligned} \min_{x \in \mathbb{R}} x & & (P_1) \\ \text{sujeto a: } x^2 \leq 1. & \end{aligned}$$

- a) Resuelva (P_1) hallando el ínfimo f^* y la variable primal óptima x^* , de existir.
b) Obtenga el problema dual, y halle el supremo d^* y la variable dual óptima μ^* , de existir.
c) Analice si se cumple la condición de Slater y determine si se cumplen o no dualidad débil y fuerte.

Repita las partes a) b) y c) para cada uno de los siguientes problemas.

d)

$$\begin{aligned} \min_{x \in \mathbb{R}} x & & (P_2) \\ \text{sujeto a: } x^2 \leq 0. & \end{aligned}$$

e)

$$\begin{aligned} \min_{x \in \mathbb{R}} x & & (P_3) \\ \text{sujeto a: } |x| \leq 0. & \end{aligned}$$

f)

$$\begin{aligned} \min_{x \in \mathbb{R}} x & & (P_4) \\ \text{sujeto a: } g(x) \leq 0. & \end{aligned}$$

$$\text{con } g(x) = \begin{cases} -x + 2, & x \geq 1 \\ x, & x \in (-1, 1) \\ -x - 2, & x \leq -1 \end{cases} .$$

g)

$$\begin{aligned} \min_{x \in \mathbb{R}} x^3 & & (P_5) \\ \text{sujeto a: } x \geq 1. & \end{aligned}$$

(Nota: Dado que $\lim_{x \rightarrow -\infty} x^3 = -\infty$, el Lagrangiano no se minimiza anulando su gradiente.)

h)

$$\begin{aligned} \min_{x \geq 0} x^3 & & (P_6) \\ \text{sujeto a: } x \geq 1. & \end{aligned}$$

Ejercicio 2 - Gestión óptima de la demanda de energía eléctrica

Considere el esquema de una red de tres barras de la Figura 1, con dos generadores y dos cargas.

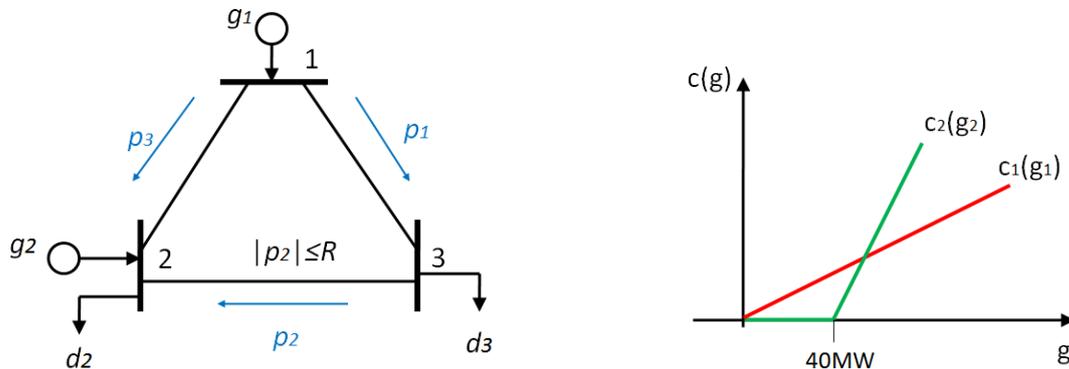


Figura 1: Red eléctrica de tres barras y costos asociados de generación.

Los costos de generación en las barras 1 y 2 están dados por (ver gráfico en Figura 1):

$$c_1(g_1) = g_1, \quad c_2(g_2) = \max\{0, 4(g_2 - 40MW)\}.$$

El problema de optimización que modela esta red es (ver notas del curso):

$$\min_{(p_1, p_2, p_3, g_1 \geq 0, g_2 \geq 0)} c_1(g_1) + c_2(g_2) \quad (1)$$

$$\text{sujeto a: } p_1 + p_3 = g_1 \quad (2)$$

$$g_2 + p_3 + p_2 = d_2 \quad (3)$$

$$p_1 - p_2 = d_3 \quad (4)$$

$$p_3 - p_1 - p_2 = 0 \quad (5)$$

$$|p_2| \leq R; \quad (6)$$

donde $R = 30MW$, $\bar{d}_3 = 10MW$, y d_2 se deja como parámetro del problema.

a) Reformule el Problema (1) como un problema de programación lineal (LP). Para esto se sugiere introducir una variable t (slack), tal que $c_2(g_2) \leq t$.

b) Resuelva numéricamente (LP) para cada valor de $d_2 \in \{0 : 1 : 200\}$ y grafique g_1 , g_2 , p_2 y λ en función de d_2 ; siendo λ el multiplicador asociado a la restricción (4). Se sugiere utilizar Julia/Convex-Matlab/CVX-Python/cvxpy.

c) Interprete las gráficas de la parte anterior, explicando los valores de los multiplicadores y justificando los puntos de inflexión. Determine para qué valores de d_2 es conveniente ofrecer energía a precio nulo en la barra 3.

Referencias

[1] S. Boyd, V. Vanderberghe *Convex Optimization*, Cambridge University Press, 2006.

[2] D. P. Bertsekas, *Nonlinear programming, 3rd ed.*, Athena Scientific, 2017.