Señales Aleatorias y Modulación

Práctico 5
Transmisión digital bandabase y filtro de Wiener

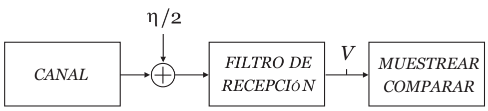
Cada ejercicio comienza con un símbolo el cuál indica su dificultad de acuerdo a la siguiente escala: ✦ básica, ★ media, ✷ avanzada, y ✹ difícil. Además puede tener un número que referencia un ejercicio de uno de los libros del curso, como 3.1-4 [Car] que indica el número de ejercicio del libro, *Communication Systems, 5th. edition.* Bruce A. Carlson. o 1.2 [Hay] del libro *Introduction to Analog and Digital Communications, 2nd Edition, S. Haykin, M. Moher. Wiley, 2008*

✦ Ejercicio 1

Demostrar que para un sistema binario unipolar donde los dígitos, equiprobables, se representan por los niveles $2A$ y 0 con un umbral en A se cumple que $P_e = Q(\sqrt{\frac{1}{2}\rho})$. Calcular P_e para un sistema polar y uno unipolar ambos con $\rho = 8$. Interpretar el resultado. Nota $\rho = SNR_R$.

★ Ejercicio 2

Se trasmite una señal binaria que toma valores 0 y A correspondientes a 0 y 1 lógicos en forma equiprobable e independiente de los valores anteriores por un canal con ruido blanco gaussiano aditivo de densidad espectral $\eta/2$. El receptor se esquematiza en la siguiente figura.



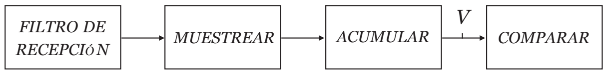
El filtro de recepción es un pasabajos ideal de ancho de banda B. Se supone que **no modifica los pulsos**, su finalidad es limitar el ruido.

(a) Si llamamos v a la señal a la entrada del comparador, hallar y graficar las probabilidades $p_v(v|0)$, probabilidad de la señal v cuando se trasmitió un 0 lógico. Ídem con $p_v(v|1)$ para el 1 lógico.

(b) Especificar los momentos estadísticos de interés.

(c) Dar el umbral de decisión y hallar la probabilidad de error. Calcular la potencia media de la señal trasmitida.

Se supone que cada dígito se trasmite m **veces consecutivas**. El receptor las suma antes del comparador según el esquema de la siguiente figura.



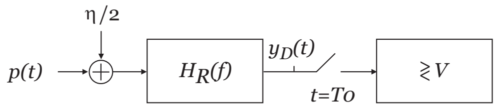
(d) Hallar las densidades de probabilidad $p_v(v|0)$, $p_v(v|1)$, especificando los momentos estadísticos. Graficar las densidades de probabilidad y comparar con el caso anterior.

(e) Elegir el umbral de decisión, calcular la probabilidad de error y la potencia media transmitida.

(f) Explicar cómo, manteniendo una misma probabilidad de error en el segundo esquema, la amplitud A puede ser menor que en el primer esquema. ¿Esto implica alguna mejora? ¿Tiene contrapartida?

⋆ Ejercicio 3

Se quiere detectar presencia o ausencia de pulso en $t = T_0$ con un detector como el de la figura:



En el diagrama $p(t)$ es un pulso rectangular de altura A y duración T_0.

(a) Diseñar $H_R(\omega)$ para que sea un filtro apareado con el pulso de entrada. Calcular la relación $SNR_{máx}$ a la salida del muestreo y la probabilidad de error en este caso. Se notará esta relación como SNR_c.

(b) Considerar como primera aproximación a este filtro apareado un pasabajos ideal de ancho de banda B. Probar que en este caso la P_e es mayor.

⋆ Ejercicio 4 (11.2-6 [Car])

A partir de la ecuación $P_0 p_y(V_T/H_0) = P_1 p_y(V_T/H_1)$, hallar el umbral óptimo en un sistema polar binario con ruido AWGN cuando $P_0 \neq P_1$.

✸ Ejercicio 5 (Exámen Febrero 2020)

Un proceso estocástico $V(t)$ de interés, WSS, de PSD $S_V(f)$, sufre una degradación produciendo el proceso estocástico observado $U(t)$, según el siguiente modelo:

$$U(t) := g * V(t) + N(t).$$

El núcleo de convolución $g(t)$ es suave, por lo que actúa como un filtrado LTI de transferencia $G(f)$. $N(t)$ se considera ruido blanco, gaussiano, de PSD $S_N = \eta/2$, independiente de $V(t)$.

Parte 1. Filtro de Wiener
Se pide:

(a) Calcular para el modelo de degradación planteado $S_U(f)$ y $S_{VU}(f)$.

(b) Dar la expresión del filtro de Wiener que permite obtener la estimación $\hat{V}(t) = h(t) * U(t)$ que minimiza el error cuadrático medio ($MSE = \mathrm{E}[(\hat{V}(t) - V(t))]$) respecto a $V(t)$. Mostrar que para el modelo considerado tiene la forma

$$H(f) = \frac{G^*(f)S_V(f)}{|G(f)|^2 S_V(f) + S_N(f)}$$

(c) Analizar cómo se comporta el filtro de Wiener en frecuencia según $G(f)$, $S_V(f)$ y η.

Sugerencia: Expresar el filtro como

$$H(f) = \frac{1/G(f)}{1 + r^{-1}(f)}$$

y analizar según los valores que toma $r(f)$.

Parte 2.
Considerar que hay dos medidas de un proceso de interés $V(t)$ modelas como

$$U_1(t) = V(t) + N_1(t) \quad \text{y} \quad U_2(t) = V(t) + N_2(t)$$

Una estimación de $V(t)$ se obtiene filtrando $U_1(t)$ con $H(f)$, $U_2(t)$ con $1 - H(f)$ y sumando ambas señales filtradas.

(d) Deducir que la estimación puede escribirse como

$$\hat{V}(t) = V(t) + N_2(t) - h(t) * (N_2(t) - N_1(t))$$

y hallar el filtro $H(f)$ que minimiza el MSE entre $\hat{V}(t)$ y $V(t)$.

Sugerencia: Utilizar el resultado de la parte 1 para la señal de interes $N_2(t)$ y señal observada $N_2(t) - N_1(t)$.

(e) Considerar que $N_1(t)$ es ruido pasa bajos, $N_2(t)$ es ruido pasa alto y que sus espectro no se solapan. Mostrar que en este caso la señal $V(t)$ puede ser reconstruida perfectamente (i.e. con MSE nulo).

Solución

Ejercicio 1

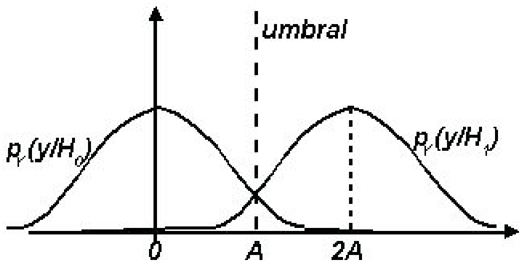
Suponiendo muestreo en el instante ideal $t = t_k = kT + t_d$, sea la variable aleatoria $Y = y(t_k)$.
Entonces, Y puede tomar dos valores:

$$Y = \begin{cases} 2A + n(t_k) & \Rightarrow \quad n(t_k) = Y - 2A \\ n(t_k) \end{cases}$$

Si H_0 es la hipótesis de haber mandado un 0, y H_1 es la de haber mandado un 1, entonces:

$$\begin{aligned} p_Y(y/H_0) &= p_N(y) \\ p_Y(y/H_1) &= p_N(y - 2A) \end{aligned}$$

La forma de estas curvas se muestra en la siguiente figura.



Entonces:

$$P_e = \underbrace{P_0}_{=\frac{1}{2}}.P_{e0} + \underbrace{P_1}_{=\frac{1}{2}}.P_{e1} = \frac{P_{e0} + P_{e1}}{2}$$

donde:

$$\begin{aligned} P_{e0} &= \int_A^{+\infty} p_N(y)dy \\ P_{e1} &= \int_{-\infty}^{A} p_N(y - 2A)dy \end{aligned}$$

Si el ruido es blanco gaussiano aditivo, de media nula y varianza σ^2, tenemos que:

$$\begin{cases} P_{e0} = Q\left(\frac{A}{\sigma}\right) \\ P_{e1} = Q\left(\frac{2A-A}{\sigma}\right) = Q\left(\frac{A}{\sigma}\right) \end{cases}$$

Entonces:

$$P_e = Q\left(\frac{A}{\sigma}\right)$$

Como se cumple que:

$$\begin{aligned} N_R &= \sigma^2 \\ S_R &= (2A)^2.P_{2A} + 0^2.P_0 = \frac{4A^2}{2} = 2A^2 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \frac{A}{\sigma} = \sqrt{\frac{A^2}{\sigma^2}} = \sqrt{\frac{S_R}{2N_R}} = \sqrt{\frac{\rho}{2}}$$

$$\Rightarrow P_e = Q\left(\sqrt{\frac{\rho}{2}}\right)$$

como quería demostrar.
Si ahora considero el sistema de codificación polar $\pm A$, de forma que el espacio entre niveles respecto al caso unipolar sea el mismo, se tiene que:

$$\begin{aligned} P_{e0} &= \textstyle\int_0^{+\infty} p_N(y+A)dy &= Q\left(\frac{A}{\sigma}\right) \\ P_{e1} &= \textstyle\int_{-\infty}^{0} p_N(y-A)dy &= Q\left(\frac{A}{\sigma}\right) \end{aligned}$$

$$\Rightarrow P_e = \frac{1}{2}.Q\left(\frac{A}{\sigma}\right) + \frac{1}{2}.Q\left(\frac{A}{\sigma}\right) = Q\left(\frac{A}{\sigma}\right)$$

En este caso, $N_R = \sigma^2$ (no varía respecto al caso anterior), pero $S_R = A^2.P_A + (-A)^2.P_{-A} = A^2$, con lo cual:

$$\frac{A}{\sigma} = \sqrt{\frac{A^2}{\sigma^2}} = \sqrt{\frac{S_R}{N_R}} \Rightarrow P_e = Q\left(\sqrt{\rho}\right)$$

Por lo tanto, si $\rho = 8$:

$$P_e = \begin{cases} Q(2) & \approx \quad 2.5 \times 10^{-2} \quad \text{unipolar} \\ Q(\underbrace{\sqrt{8}}_{\approx 2.83}) & \approx \quad 2.5 \times 10^{-3} \quad \text{polar} \end{cases}$$

Observo que para una misma SNR_R la probabilidad de error con codificación polar es aprox. diez veces más baja que la que se da con codificación unipolar.

Ejercicio 2

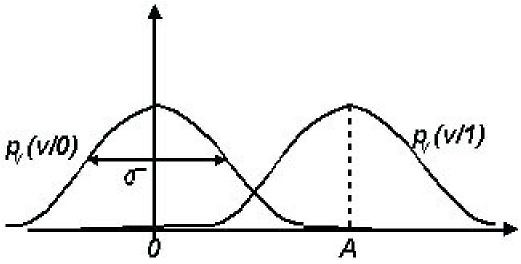
(a) Sé que a la entrada del comparador, la señal v es de la forma $v[k] = x[k] + n[k]$, donde x es la señal que se envió, y n representa el ruido.

Por lo tanto, si se transmitió un 0, se tiene que $v[k] = n[k]$ y si se transmitió un 1, $v[k] = A + n[k]$.

Se ve que si no hubiera ruido, la densidad de probabilidad de v serían dos deltas, una en 0 y otra en A, pero como hay presencia de ruido blanco gaussiano, lo que se tiene en realidad es de la forma:

$$\begin{aligned} p_V(v|0) &= p_N(v) \\ p_V(v|1) &= p_N(v-A) \end{aligned}$$

La forma de estas densidades de probabilidad se muestra en la figura siguiente.



(b) Los momentos estadísticos de interés son la media de las gaussianas, y su varianza.

La primera está dada por el valor en el cual se centran las curvas: las medias son 0 y A.

La segunda está relacionada con el "ancho" de las mismas: ambas tienen varianza σ^2.

(c) Sea u el umbral óptimo de decisión. Entonces:

$$P_e = \underbrace{P_0}_{=\frac{1}{2}}.P_{e0} + \underbrace{P_1}_{=\frac{1}{2}}.P_{e1} \Rightarrow P_{e,min} / \left.\frac{\partial P_e}{\partial v}\right|_{min} = 0$$

$$\left.\begin{array}{rcl} P_{e0} & = & \int_u^{+\infty} p_V(v|0)dv \\ P_{e1} & = & \int_{-\infty}^{u} p_V(v|1)dv \end{array}\right\} \Rightarrow \frac{\partial P_e}{\partial v} = \frac{1}{2}\left(\underbrace{\frac{\partial P_{e0}}{\partial v}}_{p_V(u|0)} + \underbrace{\frac{\partial P_{e1}}{\partial v}}_{-p_V(u|1)}\right)$$

$$\Rightarrow \frac{\partial P_e}{\partial v} = 0 \Leftrightarrow p_V(u|0) = p_V(u|1) \Leftrightarrow u = \frac{A}{2}$$

Luego la probabilidad de error queda:

$$P_e = Q\left(\frac{A}{2\sigma}\right)$$

Por otro lado, $S_R = A^2.P_A + 0^2.P_0 = \frac{A^2}{2}$, y $N_R = \sigma^2$, con lo que $\frac{A}{2\sigma} = \sqrt{SNR_R/2}$, y entonces:

$$P_e = Q\left(\sqrt{\frac{SNR_R}{2}}\right)$$

(d) Al repetirse cada dígito m veces consecutivas, a la entrada del comparador se tiene la señal $v'[k]$ igual a:

$$v'[k] = x[k]+n[k]+x[k-1]+n[k-1]+\ldots+x[k-m+1]+n[k-m+1] = mx[k]+n'[k]$$

Luego, si transmití un 0, tendré que $v'[k] = n'[k]$, mientras que si transmití un 1, $v'[k] = mA + n'[k]$.

Siendo $n'[k]$ es la suma de ruido blanco de media nula y varianza σ^2.

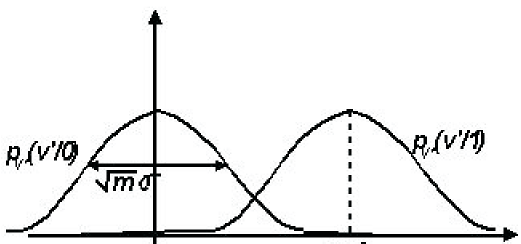
Observar que no podemos suponer que el ruido $n[k], n[k-1], ..., n[k-m+1]$ sean independientes entre si. Para poder asegurar lo anterior, debemos verificar que la autocorrelación del rudio muestreado a frecuencia f_s es una delta (es decir que es un proceso blanco), lo cual en principio no resulta evidente ya que el ruido muestreado no es blanco, dado que fue previamente recortado por el filtro pasabajos.

Por lo anterior, $G_n(f) = \frac{\eta}{2}\Pi\left(\frac{f}{2B}\right)$, y por lo tanto su autocorrelación es $R_n(\tau) = \eta.B.sinc(2B\tau)$. Dada la forma de $sinc(2B\tau)$, función que se anula en los múltiplos de $1/2B$, se tiene entonces que la máxima frecuencia de muestreo que puede usarse es justamente de $2B$, pudiéndose emplear alternativamente frecuencias de valor $2B/n$, con n entero. De esta forma, la autocorrelación del proceso ruido muestreado es una delta y podemos garantizar la independencia de los distintos instantes de ruido.

Por lo tanto, podemos suponern que los $n[i]$ son independientes con lo cual la varianza de $n'[k]$ es igual a $m.\sigma^2$, y su media es la suma de las medias de cada $n[i]$, que vale 0. En consecuencia, se tiene que:

$$\begin{aligned} p_{V'}(v'|0) &\sim N(0, \sqrt{m}\sigma) \\ p_{V'}(v'|1) &\sim N(mA, \sqrt{m}\sigma) \end{aligned}$$

La forma de estas densidades de probabilidad se muestra en la siguiente figura.



(e) Nuevamente, dado que la forma de las dos curvas de densidad de probabilidad es idéntica, se cumple que el umbral óptimo es equidistante de las dos medias, y por lo tanto vale:

$$u = \frac{mA + 0}{2} = \frac{mA}{2}$$

Entonces, se cumple que:

$$P_e = Q\left(\frac{mA}{2\sqrt{m}\sigma}\right) = Q\left(\frac{\sqrt{m}A}{2\sigma}\right) < Q\left(\frac{A}{2\sigma}\right)$$

La potencia transmitida en este caso es la misma que en el caso anterior, ya que existe la misma probabilidad de enviar 0 y 1, y por lo tanto:

$$S_T = \frac{1}{2}.A^2 + \frac{1}{2}.0^2 = \frac{A^2}{2}$$

(cabe notar que a lo largo de todo este ejercicio se supuso un canal sin atenuación por lo que $S_T = S_R$).

(f) Para mantener la P_e del primer esquema, se debe cumplir que:

$$\frac{\sqrt{m}A'}{2\sigma} = \frac{A}{2\sigma} \Rightarrow A' = \frac{A}{\sqrt{m}}$$

La **mejora** consiste en que la potencia transmitida, S'_T, igual a $\frac{A'^2}{2} = \frac{A^2}{2m}$, es menor que la anterior.

Sin embargo, esta opción tiene como **contrapartida** que demora m veces más tiempo en transmitir la misma información (es decir, el flujo de información disminuye).

Si quisiera mantener el flujo de información, entonces tendría que aumentar la cadencia. La nueva cadencia será $r' = mr = m/T$, y por lo tanto el ancho de banda mínimo también deberá ser mayor: $B'_{mín} = r' = mr = B_{mín}$.

Ejercicio 3

(a) Se tiene que:

$$p(t) = A\Pi\left(\frac{t - kT_0}{T_0}\right)$$

ya que el pulso llega centrado en kT_0, lo cual hace que el instante ideal de muestreo sea justamente kT_0.

Por otro lado, llamando $p'(t)$ al pulso rectangular de altura 1 y ancho T_0, que vale 1 en $t = 0$, y es nulo si $|t| > T_0/2$, como también se cumple que $T_0 \leq kT_0$, entonces el filtro apareado tiene una respuesta impulsiva de la forma:

$$h_R(t) = \frac{1}{T_0}p'(t_d - t)$$

con t_d tal que el filtro es causal. El valor mínimo que puede tomar t_d en este caso es de $T_0/2$, y por lo tanto se tiene que:

$$h_R(t) = \frac{1}{T_0}p'\left(\frac{T_0}{2} - t\right) = \frac{1}{T_0}\Pi\left(\frac{T_0/2 - t}{T_0}\right)$$

Entonces, la respuesta en frecuencia de este filtro será:

$$H_R(f) = \frac{1}{T_0}.T_0.sinc(fT_0).e^{-j2\pi fT_0/2} = sinc(fT_0).e^{-j2\pi fT_0/2}$$

Hallo la potencia del ruido en recepción:

$$N_R = \int_{-\infty}^{+\infty} |H_R(f)|^2 G_n(f) df = \frac{\eta}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} |H_R(f)|^2 df$$

Por Parseval:

$$N_R = \frac{\eta}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} |h_R(t)|^2 dt = \frac{\eta}{2} T_0 \frac{1}{T_0^2} = \frac{\eta}{2T_0}$$

$SNR_{máx}$ se dará si $S_R = S_{R,máx}$, lo cual ocurre si muestreo en el instante ideal kT_0. Entonces:

$$S_{R,máx} = A^2.\frac{1}{2} + 0^2.\frac{1}{2} = \frac{A^2}{2}$$

Otra forma de ver este resultado es la siguiente:
La energía del pulso recibido es:

$$\begin{aligned} E_{R,máx} &= \int_{-\infty}^{+\infty} |H_R(f).P(f)|^2 df \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} |sinc(fT_0).A.T_0.sinc(fT_0)|^2 df \\ &= A^2 T_0^2 \int_{-\infty}^{+\infty} sinc^4(fT_0) df \end{aligned}$$

Como la energía de $sinc^2(x)$ es 1, haciendo el cambio de variable $x = fT_0$, se tiene que $E_R = A^2 T_0$. Luego, $S_{R,máx} = E_{R,máx}/T_0 = A^2$. Tomando en cuenta finalmente que queremos medir la potencia media, como se transmiten 1's y 0's con la misma probabilidad, se tiene que $S_{R,máx} = A^2/2$.

Por lo tanto:

$$SNR_{máx} = \frac{A^2 T_0}{\eta}$$

Si se elige el umbral óptimo $V = \frac{A}{2}$, $P_e = Q\left(\frac{A}{2\sigma}\right)$, con lo cual:

$$P_e = Q\left(\frac{A}{2\sqrt{\frac{\eta}{2T_0}}}\right) = Q\left(\frac{A\sqrt{T_0}}{\sqrt{2\eta}}\right)$$

Entonces:

$$P_e = Q\left(\frac{A\sqrt{T_0}}{\sqrt{2\eta}}\right) = Q\left(\sqrt{\frac{SNR_{máx}}{2}}\right)$$

(b)

Ejercicio 4

$$p_y(y \mid H_0) = p_n(y + A/2),\ p_y(y \mid H_1) = p$$

$$\text{so}\ \ P_0 \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-(V+A/2)^2/2\sigma^2} = P_1 \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-(}$$

$$P_0 / P_1 = e^{[(V+A/2)^2-(V-A/2)]^2/2\sigma^2} = e^{VA/\sigma^2}$$

$$\text{Hence,}\ \ VA/\sigma^2 = \ln(P_0/P_1) \ \Rightarrow\ V_{opt} =$$

Ejercicio 5

(a) Calculemos $R_U(\tau)$. Tenemos

$$\begin{aligned}
R_U(\tau) &= \mathbb{E}\{U(t)U(t+\tau)\} \\
&= \mathbb{E}\{(g * V(t) + N(t))(g * V(t+\tau) + N(t+\tau))\} \\
&= \mathbb{E}\{(g * V(t))(g * V(t+\tau))\} + \mathbb{E}\{N(t)\}\mathbb{E}\{g * V(t+\tau)\} + \mathbb{E}\{g * V(t)\}\mathbb{E}\{N(t+\tau)\} + \mathbb{E}\{N(t)\}\mathbb{E}\{N(t \\
&= \mathbb{E}\{(g * V(t))(g * V(t+\tau))\} + \sigma^2\delta(\tau).
\end{aligned}$$

En la penúltima igualdad usamos la linealidad de la esperanza y la independencia de $V(t)$ y $N(t)$; en la última igualdad usamos que $N(t)$ es de media nula, y que $N(t)$ y $N(t+\tau)$ son independientes para todo $\tau \neq 0$.
Llamemos $W(t) = g * V(t)$. Como $V(t)$ es WSS, $W(t)$ es WSS de PSD $S_W(f) = |G(f)|^2 S_V(f)$. Como $V(t)$ y $N(t)$ son independientes, también lo son $W(t)$ y $N(t)$; además, puesto que $N(t)$ es de media nula,

$$S_U(f) = S_W(f) + S_N(f) = |G(f)|^2 S_V(f) + \sigma_N^2.$$

Para $R_{UV}(\tau)$ tenemos

$$\begin{aligned}
R_{VU}(\tau) &= \mathbb{E}\{V(t)U(t+\tau)\} \\
&= \mathbb{E}\{V(t)(g * V(t+\tau) + N(t+\tau))\} \\
&= \mathbb{E}\{V(t)(g * V(t+\tau))\} + \mathbb{E}\{V(t)\}\mathbb{E}\{N(t+\tau)\} \\
&= \mathbb{E}\{V(t)(g * V(t+\tau))\} = \bar{g} * \mathbb{E}\{V(t)V(t+\tau)\}
\end{aligned}$$

$$S_{VU}(f) = G(f)^* S_V(f)$$

(b)

$$H(f) = \frac{S_{VU}}{S_V} = \frac{G^*(f)S_V(f)}{|G(f)|^2 S_V(f) + S_N(f)}$$

(c)

$$H(f) = \frac{1/G(f)}{1 + r^{-1}(f)}$$

con

$$r(f) = \frac{|G(f)|^2 S_V}{S_N}$$

A partir de esta expresión se observa que en las freciencias donde la señal predomina sobre el ruido ($S_V \gg S_N$) $r(f) \gg 1$, $H(f) \approx 1/G(f)$ y el filtro se comporta como un ecualizador que remueve la distorsión. En las frecuencias donde el ruido predomina sobre la señal ($S_N \gg S_V$) $r(f) \ll 1$ y el filtro se comporta como un atenuador.

(d)

$$\begin{aligned}\hat{V}(t) &= h(t) * (V(t) + N_1(t)) + (\delta(t) - h(t)) * (V(t) + N_2(t)) \\ &= V(t) + N_2(t) + h(t) * (N_2(t) - N_1(t))\end{aligned}$$

Como $\hat{V}(t) - V(t) = N_2(t) - h(t) * (N_2(t) - N_1(t))$, el filtro optimo óptimo es el filtro de Wiener hallado en las partes anteriores con $U = N_2(t) - N_1(t)$, $V = N_2(t)$ y $G = \delta(t)$. Entonces

$$H(f) = \frac{S_{N_2}}{S_{N_2} - S_{N_1}}$$

(e)

$$\begin{aligned}MSE(\hat{V}(t) - V(t)) &= MSE(N_2(t) - h(t) * (N_2(t) - N_1(t))) \\ &= MSE(N_2(t) - N_2(t)) = 0\end{aligned}$$