Universidad de la República **Cálculo Diferencial e Integral en Varias Variables**
Facultad de Ingeniería - IMERL **Setiembre 2019**

Primer Parcial – SOLUCIÓN

Ejercicio 1
Versión 1. Resolver la ecuación $e^z = e^{2z}$. Si multiplicamos por un complejo distinto de cero el conjunto solución de la ecuación permanece inalterado: $e^z(e^z)^{-1} = e^{2z}(e^z)^{-1}$.
De la fórmula $e^{z+w} = e^z e^w$ concluimos $(e^z)^{-1} = e^{-z}$ por lo que $1 = e^z$. Si $z = a + bi$ concluimos $1 = e^a$ y $e^{ib} = e^{i0}$ es decir $a = 0$ y $b = 2k\pi$ con $k \in \mathbb{Z}$.
Otra forma es compararlo directamente $e^z = e^{2z}$, es decir, $e^a = e^{2a}$ y $e^{ib} = e^{i2b}$. De la primera ecuación, concluyo que $a = 0$. De a segunda tengo que $b + 2k\pi = 2b$ con $k \in \mathbb{Z}$, es decir $b = 2k\pi$ con $k \in \mathbb{Z}$. De esto, $z = 2k\pi i$ con $k \in \mathbb{Z}$.

Ejercicio 1
Versión 2. Resolver la ecuación $e^z = e^{3z}$. Si multiplicamos por un complejo distinto de cero el conjunto solución de la ecuación permanece inalterado: $e^z(e^z)^{-1} = e^{3z}(e^z)^{-1}$.
De la fórmula $e^{z+w} = e^z e^w$ concluimos $(e^z)^{-1} = e^{-z}$ por lo que $1 = e^{2z}$. Si $z = a + bi$ concluimos $1 = e^{2a}$ y $e^{i2b} = e^{i0}$ es decir $a = 0$ y $2b = 2k\pi$ con $k \in \mathbb{Z}$, es decir, $a = 0$ y $b = k\pi$ con $k \in \mathbb{Z}$.
Otra forma es compararlo directamente $e^z = e^{3z}$, es decir, $e^a = e^{3a}$ y $e^{ib} = e^{i3b}$. De la primera ecuación, concluyo $a = 0$. De a segunda tengo que $b + 2k\pi = 3b$ con $k \in \mathbb{Z}$, es decir $b = k\pi$ con $k \in \mathbb{Z}$. De esto, $z = k\pi i$ con $k \in \mathbb{Z}$.

Ejercicio 2. Versión 1 Resolver la ecuación diferencial con condiciones iniciales:

$$\begin{cases} y'' + y' + \pi^2 y = \pi\cos(\pi x) + 5\pi^2 x + 5 \\ y(0) = 0 \\ y'(0) = \pi + 5, \end{cases}$$

sabiendo que la solución es de la forma:

$$y(x) = \sin(\pi x) + ax^2 + bx + c$$

La solución es de la forma $y(x) = \sin(\pi x) + ax^2 + bx + c$ entonces sabiendo que

$$y'(x) = \pi\cos(\pi x) + 2ax + b \qquad y''(x) = -\pi^2\sin(\pi x) + 2a$$

obtenemos que

$$y''(x) + y'(x) + \pi^2 y(x) = \pi\cos(\pi x) + \pi^2 a x^2 + (2a + \pi^2 b)x + 2a + b + \pi^2 c = \pi\cos(\pi x) + 5\pi^2 x + 5$$

entonces por identidad de polinomios

$$\pi^2 a = 0 \qquad 2a + \pi^2 b = 5\pi^2 \qquad 2a + b + \pi^2 c = 5 \qquad \Longrightarrow \qquad a = 0 \qquad b = 5 \qquad c = 0$$

Luego $y(x) = \sin(\pi x) + 5x$. Además se verifica que $y(0) = 0$ y $y'(0) = \pi + 5$ entonces es solución del sistema

$$\begin{cases} y''(x) + y'(x) + \pi^2 y(x) = \pi\cos(\pi x) + 5\pi^2 x + 5 \\ y(0) = 0 \\ y'(0) = \pi + 5 \end{cases}$$

Versión 2. Resolver la ecuación diferencial con condiciones iniciales:

$$\begin{cases} y'' + y' + 7y = -\sqrt{7}\sin(\sqrt{7}x) + 14x + 2 \\ y(0) = 1 \\ y'(0) = 2, \end{cases}$$

sabiendo que la solución es de la forma:

$$y(x) = \cos(\sqrt{7}x) + ax^2 + bx + c$$

La solución es de la forma $y(x) = \cos(\sqrt{7}x) + ax^2 + bx + c$ entonces sabiendo que

$$y'(x) = -\sqrt{7}\sin(\sqrt{7}x) + 2ax + b \qquad\qquad y''(x) = -\sqrt{7}\cos(\sqrt{7}x) + 2a$$

obtenemos que

$$y''(x) + y'(x) + 7y(x) = -\sqrt{7}\sin(\sqrt{7}x) + 7ax^2 + (2a + 7b)x + 2a + b + 7c = -\sqrt{7}\sin(\sqrt{7}x) + 14x + 2$$

entonces por identidad de polinomios

$$7a = 0 \qquad 2a + 7b = 14 \qquad 2a + b + 7c = 2 \qquad \Longrightarrow \qquad a = 0 \qquad b = 2 \qquad c = 0$$

Luego $y(x) = \cos(\sqrt{7}x) + 2x$. Además se verifica que $y(0) = 1$ y $y'(0) = 2$ entonces es solución del sistema

$$\begin{cases} y''(x) + y'(x) + 7y(x) = -\sqrt{7}\sin(\sqrt{7}x) + 14x + 2 \\ y(0) = 0 \\ y'(0) = 2 \end{cases}$$

Ejercicio 3. Se considera el conjunto $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : |x| < 1, |y| < 1, x \in \mathbb{Q}, y \in \mathbb{Q}\}$.
Entonces:

$\partial A = \overline{A}$	$\overline{A} = A \cup \partial A$	$\mathring{A} = \emptyset$

<u>**1era vía:**</u> Sea $B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \mid x \mid < 1, \mid y \mid < 1\}$, entonces el conjunto A dado se puede escribir como $A = B \cap (\mathbb{Q} \times \mathbb{Q})$.

Como B es un conjunto abierto, por el ejercicio 4 del práctico 6 sabemos que $\mathring{A} = \emptyset$ y $\delta A = \overline{A} = B \cup \delta B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \mid x \mid \leq 1, \mid y \mid \leq 1\}$.

<u>**2da vía:**</u> Sin usar el ejercicio citado, se puede analizar directamente cómo queda cada uno de los conjuntos que nos piden encontrar.

- Una bola cualquiera con centro en $z \in A$ contiene necesariamente puntos con las dos coordenadas racionales y puntos con las dos coordenadas irracionales, pues $\mathbb{Q}$ es denso en $\mathbb{R}$. Esto muestra que $\mathring{A} = \emptyset$.
- El razonamiento anterior muestra que todos los puntos de A en realidad están en su frontera. Esta frontera es mucho más grande pues no es difícil observar que $B \subset \delta A$; más aún esta frontera contiene a la frontera de B. Así tenemos que $\delta A = \overline{A} = B \cup \delta B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : \mid x \mid \leq 1, \mid y \mid \leq 1\}$.

Ejercicio 4. Si

$$\lim_{n\to\infty}(n^2+2n+1)\log\left(\frac{n^2+an+2}{n^2+2n+1}\right)$$

es finito, entonces:

$$\boxed{a=2}$$

El límite es una indeterminación del tipo $\infty.0$.

Sumando y restando $2n$ en el numerador del logaritmando obtenemos:

$$\frac{n^2+an+2}{n^2+2n+1}=\frac{n^2+2n+1+(a-2)n+1}{n^2+2n+1}=1+b_n$$

donde

$$b_n=\frac{(a-2)n+1}{n^2+2n+1}$$

(observar que b_n depende de a).

Si $\underline{a=2}$ tenemos que $b_n=\frac{1}{n^2+2n+1}\to 0$, entonces $log(1+b_n)\sim b_n$, y como el logaritmo es factor en la expresión total del límite, podemos cambiarlo por su equivalente. Por lo tanto:

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}a_n&=\lim_{n\to\infty}(n^2+2n+1)\ log(1+b_n)=\lim_{n\to\infty}(n^2+2n+1)\ b_n\\&=\lim_{n\to\infty}(n^2+2n+1)\ \frac{1}{n^2+2n+1}=\lim_{n\to\infty}1=1\end{aligned}$$

Si $\underline{a\neq 2}$ nuevamente $b_n\to 0$ y podemos cambiar $log(1+b_n)$ por b_n, obteniendo:

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}a_n&=\lim_{n\to\infty}(n^2+2n+1)\ log(1+b_n)=\lim_{n\to\infty}(n^2+2n+1)\ b_n\\&=\lim_{n\to\infty}(n^2+2n+1)\left(\frac{(a-2)n+1}{n^2+2n+1}\right)=\lim_{n\to\infty}(a-2)n+1=\pm\infty\end{aligned}$$

donde el signo depende de si a es mayor o menor que 2.

Ejercicios de desarrollo

Ejercicio 5. Versión 1. Calcular

$$\int_0^{\sum_{n=2}^{\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^n} \frac{1}{\sqrt{x}}\, dx$$

En primer lugar calculemos $\sum_{n=2}^{\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^n$. Utilizando la fórmula $\sum_{n=0}^{\infty} k^n = \frac{1}{1-k}$, sabemos que $\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^n = \frac{1}{1-1/2} = 2$. Por lo tanto $\sum_{n=2}^{\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^n = 2 - 1/2 - 1 = 1/2$

A continuación, debemos calcular, $\int_0^{1/2} \frac{1}{\sqrt{x}}\, dx$. Como $\frac{1}{\sqrt{x}}$ no es acotada en 0, se trata de una integral impropia, y por lo tanto:

$$\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{1}{\sqrt{x}}\, dx = \lim_{a\to 0}\int_a^{\frac{1}{2}} \frac{1}{\sqrt{x}}\, dx = \lim_{a\to 0} 2\sqrt{x}\ \Big|_{x=a}^{x=\frac{1}{2}} = 2\cdot\sqrt{\frac{1}{2}} = \sqrt{2}.$$

Versión 2

Calcular

$$\int_0^{\sum_{n=2}^{\infty}\left(\frac{1}{3}\right)^n} \frac{1}{\sqrt{x}}\, dx$$

En primer lugar calculemos $\sum_{n=2}^{\infty}\left(\frac{1}{3}\right)^n$.. Utilizando la fórmula $\sum_{n=0}^{\infty} k^n = \frac{1}{1-k}$, sabemos que $\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{3}\right)^n = \frac{1}{1-1/3} = 3/2$. Por lo tanto $\sum_{n=2}^{\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^n = 3/2 - 1/3 - 1 = 1/6$

A continuación, debemos calcular, $\int_0^{1/6} \frac{1}{\sqrt{x}}\, dx$. Como $\frac{1}{\sqrt{x}}$ no es acotada en 0, se trata de una integral impropia, y por lo tanto:

$$\int_0^{\frac{1}{6}} \frac{1}{\sqrt{x}}\, dx = \lim_{a\to 0}\int_a^{\frac{1}{6}} \frac{1}{\sqrt{x}}\, dx = \lim_{a\to 0} 2\sqrt{x}\ \Big|_{x=a}^{x=\frac{1}{6}} = \frac{2}{\sqrt{6}}.$$

Ejercicio 6.

(1) Probar que si $\sum a_n$ converge, entonces $\lim_n a_n = 0$. (Ver teórico)

(2) Enunciar y probar el criterio del cociente. (Ver teórico)

(3) Clasificar

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^3 + 5n + 1}{\pi n^3 + 2n}$$

(Por la parte (1) DIVERGE)

(4) Clasificar

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n!)^2}{(2n)!}$$

(Por la parte (2) CONVERGE)