Señales Aleatorias y Modulación

Práctico 5

Transmisión digital bandabase y filtro de Wiener

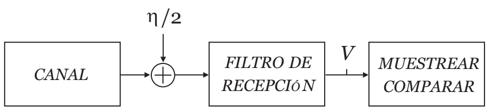
Cada ejercicio comienza con un símbolo el cuál indica su dificultad de acuerdo a la siguiente escala: ✦ básica, ★ media, ✷ avanzada, y ✹ difícil. Además puede tener un número que referencia un ejercicio de uno de los libros del curso, como 3.1-4 [Car] que indica el número de ejercicio del libro, *Communication Systems, 5th. edition.* Bruce A. Carlson. o 1.2 [Hay] del libro *Introduction to Analog and Digital Communications, 2nd Edition, S. Haykin, M. Moher. Wiley, 2008*

✦ Ejercicio 1

Demostrar que para un sistema binario unipolar donde los dígitos, equiprobables, se representan por los niveles $2A$ y 0 con un umbral en A se cumple que $P_e = Q(\sqrt{\frac{1}{2}\rho})$. Calcular P_e para un sistema polar y uno unipolar ambos con $\rho = 8$. Interpretar el resultado. Nota $\rho = SNR_R$.

★ Ejercicio 2

Se trasmite una señal binaria que toma valores 0 y A correspondientes a 0 y 1 lógicos en forma equiprobable e independiente de los valores anteriores por un canal con ruido blanco gaussiano aditivo de densidad espectral $\eta/2$. El receptor se esquematiza en la siguiente figura.



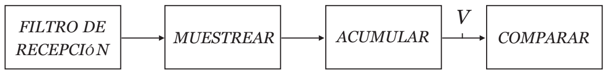
El filtro de recepción es un pasabajos ideal de ancho de banda B. Se supone que **no modifica los pulsos**, su finalidad es limitar el ruido.

(a) Si llamamos v a la señal a la entrada del comparador, hallar y graficar las probabilidades $p_v(v|0)$, probabilidad de la señal v cuando se trasmitió un 0 lógico. Ídem con $p_v(v|1)$ para el 1 lógico.

(b) Especificar los momentos estadísticos de interés.

(c) Dar el umbral de decisión y hallar la probabilidad de error. Calcular la potencia media de la señal trasmitida.

Se supone que cada dígito se trasmite m **veces consecutivas**. El receptor las suma antes del comparador según el esquema de la siguiente figura.



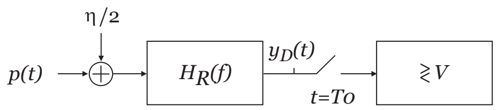
(d) Hallar las densidades de probabilidad $p_v(v|0)$, $p_v(v|1)$, especificando los momentos estadísticos. Graficar las densidades de probabilidad y comparar con el caso anterior.

(e) Elegir el umbral de decisión, calcular la probabilidad de error y la potencia media transmitida.

(f) Explicar cómo, manteniendo una misma probabilidad de error en el segundo esquema, la amplitud A puede ser menor que en el primer esquema. ¿Esto implica alguna mejora? ¿Tiene contrapartida?

⋆ Ejercicio 3

Se quiere detectar presencia o ausencia de pulso en $t = T_0$ con un detector como el de la figura:



En el diagrama $p(t)$ es un pulso rectangular de altura A y duración T_0.

(a) Diseñar $H_R(\omega)$ para que sea un filtro apareado con el pulso de entrada. Calcular la relación $SNR_{máx}$ a la salida del muestreo y la probabilidad de error en este caso. Se notará esta relación como SNR_c.

(b) Considerar como primera aproximación a este filtro apareado un pasabajos ideal de ancho de banda B. Probar que en este caso la P_e es mayor.

⋆ Ejercicio 4 **(11.2-6 [Car])**

A partir de la ecuación $P_0 p_y(V_T/H_0) = P_1 p_y(V_T/H_1)$, hallar el umbral óptimo en un sistema polar binario con ruido AWGN cuando $P_0 \neq P_1$.

✹ Ejercicio 5 **(Exámen Febrero 2020)**

Un proceso estocástico $V(t)$ de interés, WSS, de PSD $S_V(f)$, sufre una degradación produciendo el proceso estocástico observado $U(t)$, según el siguiente modelo:

$$U(t) := g * V(t) + N(t).$$

El núcleo de convolución $g(t)$ es suave, por lo que actúa como un filtrado LTI de transferencia $G(f)$. $N(t)$ se considera ruido blanco, gaussiano, de PSD $S_N = \eta/2$, independiente de $V(t)$.

Parte 1. Filtro de Wiener
Se pide:

(a) Calcular para el modelo de degradación planteado $S_U(f)$ y $S_{VU}(f)$.

(b) Dar la expresión del filtro de Wiener que permite obtener la estimación $\hat{V}(t) = h(t) * U(t)$ que minimiza el error cuadrático medio ($MSE = \mathrm{E}[(\hat{V}(t) - V(t))]$) respecto a $V(t)$. Mostrar que para el modelo considerado tiene la forma

$$H(f) = \frac{G^*(f)S_V(f)}{|G(f)|^2 S_V(f) + S_N(f)}$$

(c) Analizar cómo se comporta el filtro de Wiener en frecuencia según $G(f)$, $S_V(f)$ y η.

Sugerencia: Expresar el filtro como

$$H(f) = \frac{1/G(f)}{1 + r^{-1}(f)}$$

y analizar según los valores que toma $r(f)$.

Parte 2.
Considerar que hay dos medidas de un proceso de interés $V(t)$ modelas como

$$U_1(t) = V(t) + N_1(t) \quad \text{y} \quad U_2(t) = V(t) + N_2(t)$$

Una estimación de $V(t)$ se obtiene filtrando $U_1(t)$ con $H(f)$, $U_2(t)$ con $1 - H(f)$ y sumando ambas señales filtradas.

(d) Deducir que la estimación puede escribirse como

$$\hat{V}(t) = V(t) + N_2(t) - h(t) * (N_2(t) - N_1(t))$$

y hallar el filtro $H(f)$ que minimiza el MSE entre $\hat{V}(t)$ y $V(t)$.

Sugerencia: Utilizar el resultado de la parte 1 para la señal de interes $N_2(t)$ y señal observada $N_2(t) - N_1(t)$.

(e) Considerar que $N_1(t)$ es ruido pasa bajos, $N_2(t)$ es ruido pasa alto y que sus espectro no se solapan. Mostrar que en este caso la señal $V(t)$ puede ser reconstruida perfectamente (i.e. con MSE nulo).