Universidad de la República **Cálculo diferencial e integral en varias variables**
Facultad de Ingeniería - IMERL **Primer Semestre 2019**

Solución del Primer Parcial - Viernes 3 de mayo de 2019

VERSIÓN	MO1	MO2	MO3	MO4
1	A	C	A	B
2	B	D	C	D
3	A	B	B	D

Solución Múltiple Opción

Solución - Números Complejos

Para solucionar la ecuación $z^3 = 1$ tomamos $z = re^{i\theta}$ y la ecuación queda,

$$r^3 e^{3i\theta} = 1e^{0i}$$

de donde deducimos:

$$r = 1 \quad \text{y} \quad \theta = \frac{2k\pi}{3}.$$

Luego las tres raíces cúbicas de la unidad son

$$z_1 = 1, \quad z_2 = e^{\frac{2i\pi}{3}} \quad \text{y} \quad z_3 = e^{\frac{4i\pi}{3}}.$$

Su producto es $z_1 z_2 z_3 = e^{2i\pi} = 1$.

Solución - Ecuaciones Diferenciales

El problema homogéneo,

$$x'' + 2x' + x = 0,$$

tiene solución

$$x_H(t) = (A + Bt)e^{-t}.$$

Por inspección $x_P(t) = \dfrac{e^t}{4}$ es solución particular de $x'' + 2x' + x = e^t$.
La solución es entonces $x(t) = (A + Bt)e^{-t} + e^t/4$.
Para ajustar A y B imponemos las condiciones iniciales:

$$x(1) = (A + B)/e + e/4 = 1/e + e/4, \quad \text{luego} \quad A + B = 1.$$

$$x'(1) = -A/e + e/4 = -1/e + e/4 \quad \text{debemos tener} \quad A = 1.$$

En conclusión, $x(t) = e^{-t} + \dfrac{e^t}{4}$, y $x(0) = \frac{5}{4}$.

Solución - Series

Consideremos la serie $\displaystyle\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{nlog(n)}$. Si denotamos $(-1)^n a_n$ al término general, se tiene que

$$a_n = \frac{1}{nlog(n)}$$

Se observa que (a_n) es monótona decreciente y $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = 0$. Estamos en las hipótesis del Teorema de Leibnitz, y la serie es por lo tanto convergente.

Para estudiar si la convergencia es absoluta utilizaremos el criterio Serie-Integral. Consideremos la función $f : [e, +\infty) \to \mathbb{R}$ dada por

$$f(x) = \frac{1}{xlog(x)}.$$

La función f es monótona decreciente y $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$. Luego:

$$\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{1}{nlog(n)} \quad \text{y} \quad \int_e^{+\infty} \frac{dx}{xlog(x)} \quad \text{son de la misma clase.}$$

Se tiene que

$$\int_e^{+\infty} \frac{dx}{xlog(x)} = \lim_{T\to+\infty} \int_e^T \frac{dx}{xlog(x)} = \lim_{T\to+\infty} \int_1^{\ln T} \frac{du}{u} = \int_1^{+\infty} \frac{du}{u}$$

donde se ha utilizado el cambio de variable $u = log(x)$.

Como la última integral impropia es divergente, la serie no converge absolutamente. Luego, la serie converge pero no absolutamente.

Solución - Integrales Impropias

La integral impropia $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{dx}{(x^2+1)^s}$ es una integral impropia de primera especie. Por esta razón

$$\int_0^{+\infty} \frac{dx}{(x^2+1)^s} \quad \text{y} \quad \int_1^{+\infty} \frac{dx}{(x^2+1)^s} \quad \text{son de la misma clase.}$$

Definimos las funciones $f, g : [1, +\infty) \to \mathbb{R}$ dadas por:

$$f(x) = \frac{1}{(x^2+1)^s} \quad \text{y} \quad g(x) = \frac{1}{x^{2s}}$$

Dichas funciones son equivalentes en el infinito, i.e.: $\lim_{x\to+\infty} \dfrac{f(x)}{g(x)} = 1$.

Concluimos que $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{dx}{(x^2+1)^s}$ y $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^{2s}}$ son de la misma clase. Sabemos que $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^\alpha}$ converge si y solo si $\alpha > 1$. En nuestro caso debemos tener que $2s > 1$, o $s > 1/2$. Por lo tanto $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{dx}{(x^2+1)^s}$ converge si y solo si $s > 1/2$.

Solución - Problemas de Desarrollo

Problema 1

a) (i) Una sucesión (a_n) es **acotada** si existen números reales m y M tales que

$$m \leq a_n \leq M, \, \forall n \in \mathbb{N}.$$

(ii) Una sucesión (a_n) **tiene límit**e $L \in \mathbb{R}$ si para todo $\epsilon > 0$ existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$|a_n - L| \leq \epsilon \quad \text{para todo} \quad n \geq n_0.$$

b) Si (a_n) tiene límite $L \in \mathbb{R}$, tomando $\epsilon = 1$ en la definición de límite obtenemos:

$$L - 1 \leq a_n \leq L + 1 \quad \text{para todo} \quad n \geq n_0.$$

Si consideramos

$$m' = \text{mín}\{a_i : \, 0 \leq i \leq n_0 - 1\} \quad \text{y} \quad M' = \text{máx}\{a_i : \, 0 \leq i \leq n_0 - 1\}.$$

Definimos:

$$m = \text{mín}\left\{m', L - 1\right\} \quad \text{y} \quad M = \text{máx}\left\{M', L + 1\right\}.$$

Sea a_n cualquier término de la sucesión tenemos que:
$(n < n_0)$ En este caso por construcción $a_n \geq m' \geq m$ y $a_n \leq M' \leq M$
$(n \geq n_0)$ Tenemos $a_n \geq L - 1 \geq m$ y $a_n \leq L + 1 \leq M$.
Concluimos que la sucesión a_n es acotada.

c) El recíproco es falso y exponemos a continuación un contrajemplo. Sea $a_n = (-1)^n$, es una sucesión acotada:

$$-1 \leq a_n \leq 1 \qquad \text{para todo} \quad n \in \mathbb{N}.$$

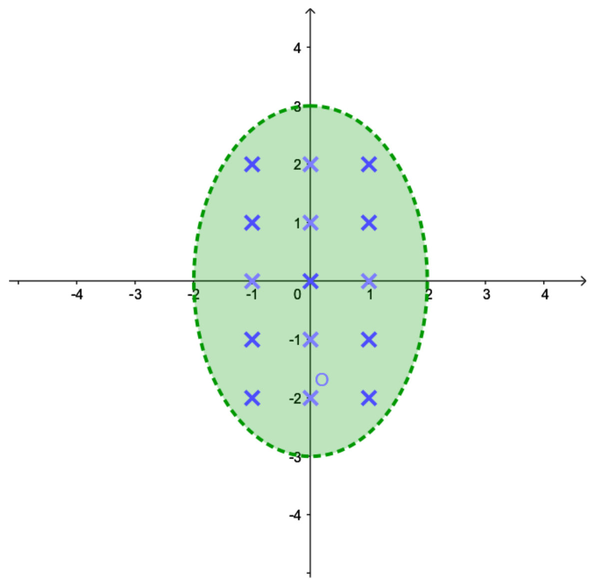
Dicha sucesión no es convergente. De hecho es una sucesión oscilante; nótese que existen dos subsucesiones convergentes a límite diferentes: a_{2n} converge a 1 y a_{2n-1} converge a -1.

Problema 2

a) Un punto x es *interior* al conjunto A si existe $r > 0$ tal que
$$B(x, r) \subseteq A.$$
El interior de A es el conjunto formado por todos los puntos interiores.

b) Un punto x es de *acumulación* de A si para todo $\epsilon > 0$ se cumple que el entorno $B(x, \epsilon)$ contiene infinitos puntos de A.

c) Representemos el conjunto A gráficamente:



El conjunto de puntos frontera es:
$$\partial A = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = 1 \right\} \cup \left\{ (n, m) : \quad n, m \in \mathbb{N} \quad \frac{n^2}{4} + \frac{m^2}{9} < 1 \right\}.$$
En el dibujo está representado por la línea punteada verde y las cruzes azules.

Todos los puntos frontera son de acumulación. En efecto, se comprueba que cada bola centrada en $x \in \partial A$ corta a A en infinitos puntos, y es posible construir una sucesión inyectiva (a_n) tal que:
$$a_n \in B\left(x, \frac{1}{n}\right) \cap A.$$
Además, se deduce de la definición que no son interiores a A, pues ni siquiera pertenecen a A.

Por último,
$$extA = \left\{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} > 1 \right\},$$
se observa que los puntos exteriores no son de acumulación. Por definición, ningún punto exterior puede ser de acumulación. En conclusión, el conjunto de puntos de acumulación que no son interiores es exactamente ∂A.