Matemática Discreta 1 - Curso 2020, Resumen de sucesiones definidas por recurrencia basado en clases 11 (13/05) y 12 (15/05)

El tema correspondiente a esta semana de clase es el de sucesiones $(a_n)_{n\geq 0}$ definidas a partir de una recurrencia lineal y puede estudiarse en las secciones 10.1 - 10.4 del Grimaldi. Solamente nos vamos a enfocar en el caso de recurrencia lineal de primer y segundo orden con coeficientes constantes. El práctico correspondiente a este tema es el práctico 6.

Una recurrencia lineal de primer orden es de la forma:

$$Aa_n + Ba_{n-1} = f(n),\ \forall n \geq 1, \tag{1}$$

donde $A, B \in \mathbb{R}$ con $AB \neq 0$ y $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ es una función fija.

Una recurrencia lineal de segundo orden es de la forma:

$$Aa_n + Ba_{n-1} + Ca_{n-2} = f(n),\ \forall n \geq 2, \tag{2}$$

donde $A, B, C \in \mathbb{R}$ con $AC \neq 0$ y $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ es una función fija.

Si bien se define de forma análoga recurrencias lineales de orden superior en este curso nos vamos a concentrar exclusivamente en estos dos casos. Cuando $f \equiv 0$ decimos que la recurrencia lineal es *homogenea*. Los otros casos de funciones que vamos a considerar en el curso son cuando $f(n)$ es un polinomio, una función exponencial (es decir, $f(n) = Ar^n$ donde $A, r \in \mathbb{R}$) o suma y producto de estas[1]. La razón de esta restricción es que en estos casos es posible encontrar una expresión explícita para a_n.

También pueden aparecer otras recurrencias lineales que aunque los coeficientes no sean constantes sean simples de resolver tales como $a_n = na_{n-1}$ para $n \geq 1$, o por ejemplo algunos casos en que pueden aplicarse cambio de variable como por ejemplo $a_n = 2na_{n-1} + 3n(n-1)a_{n-2}$ para $n \geq 2$ (con el cambio de variable $a_n = n!b_n$ y dividiendo luego todo entre $n!$ nos queda $b_n = 2b_{n-1} + 3b_{n-2}$ que es homogenea de segundo orden). No hay que asustarse, en los casos en el que el cambio de variable no sea evidente siempre vamos a decirles el cambio de variable o al menos darles alguna pista.

[1] No vamos a considerar el caso trigonométrico que aparece en el Grimaldi.

Luego de haber estudiado esta parte del programa se espera que el estudiante sea capaz de:

1. Resolver recurrencias lineales homogeneas de primer y segundo orden con coeficientes constantes (obtener la solución general y determinar una solución que verifique ciertas condiciones iniciales).

   Ejercicios 1,2,3 del Práctico 6.

2. Resolver recurrencias lineales no homogeneas de primer y segundo orden con coeficientes constantes (obtención de una solución particular y luego la solución general a partir de esta, también determinar una solución que verifique ciertas condiciones iniciales).

   Ejercicios 4,5,6 del Práctico 6.

3. Utilizar cambio de variables para transformar ciertas recurrencia lineal con coeficientes no constantes en una con coeficientes constantes.

   Ejercicios 2,10,15 del Práctico 6.

4. Utilizar el principio de superposición para la obtención de una solución particular.

   Ejercicio 6c. del Práctico 6.

5. Utilizar funciones generatrices para resolver una recurrencia lineal y también un sistema de recurrencia.

   Ejercicios 8,9,10 del Práctico 6.

6. Utilizar ecuaciones de recurrencia para resolver problemas de conteo y combinatoria.

   Ejercicios 7,11,13 del Práctico 6.

Obs: la referencia a los ejercicios es con respecto al práctico 6 del primer semestre de 2020.

Resumen de los temas con ejemplos resueltos

0.1. Relaciones en recurrencia lineal homogenea

Sea $k \in \mathbb{Z}^+$ y $c_0, c_1, \ldots, c_k \in \mathbb{R}$ con $c_0 c_k \neq 0$. Una relación de la forma

$$c_0 a_n + c_1 a_{n-1} + \cdots + c_k a_{n-k} = f(n), \ \forall n \geq k \tag{3}$$

se llama recurrencia lineal[2] de orden k. Observar que las ecuaciones (1) y (2) son casos particulares con $k = 1$ y $k = 2$ respectivamente.

Dada una relación de recurrencia lineal de orden k existen infinitas soluciones $(a_n)_{n \geq 0}$ que la verifica. Si despejamos a_n en la ecuación (3) vemos que cada término queda determinado conociendo los k términos anteriores. En particular si fijamos los valores de $a_0, a_1, \ldots, a_k$ (condiciones iniciales) entonces queda determinada una única solución.

Cuando $f \equiv 0$ entonces la ecuación toma la forma:

$$c_0 a_n + c_1 a_{n-1} + \cdots + c_k a_{n-k} = 0, \ \forall n \geq k \tag{4}$$

donde $c_0 \neq 0$ y $c_k \neq 0$. En este caso decimos que la relación de recurrencia es homogenea lineal de orden k.

El conjunto de todas las sucesiones $(a_n)_{n \geq 0}$ que verifican una relación de recurrencia (4) resulta un espacio vectorial de dimensión k (con la suma y producto por escalar usuales de las sucesiones). Esto significa que si conseguimos obtener k sucesiones linealmente independientes que verifican (4) entonces cualquier solución va a ser combinación lineal de estas (los coeficientes quedarán determinados por las condiciones iniciales).

Cada relación de recurrencia homogenea (4) tiene asociado un polinomio (llamado polinomio caracterísitico[3]): $p(\lambda) = c_0 \lambda^k + c_1 \lambda^{k-1} + \cdots + c_k$. La importancia de este polinomio radica en el hecho de que si λ_0 es una raiz de $p(\lambda)$ entonces la sucesión $a_n = \lambda_0^n$ verifica (4). En particular si $p(\lambda)$ tiene $k = \mathrm{gr}(p(x))$ raices distintas $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k$ entonces la solución general viene dada por $a_n = \alpha_1 \lambda_1^n + \alpha_2 \lambda_2^n + \cdots + \alpha_k \lambda_k^n$ donde los α_i son constantes (reales o complejos). Si tenemos condiciones iniciales $a_0, a_1, \ldots, a_{k-1}$ podemos hallar los α_i resolviendo un sistema.

---

[2]Importante: Hay un error en el libro de Grimaldi al inicio de la sección 10.2, los coeficientes c_i de la recurrencia son constantes, o sea **no dependen** de n.

[3]Una forma simple de obtener el polinomio característico es sustituyendo $a_n = \lambda^n$ en (4) y dividir entre la mayor potencia de λ posible.

0.2. Recurrencia lineal homogenea de primer orden

Tenemos una relación del tipo $c_0 a_n + c_1 a_{n-1} = 0$ con polinomio característico $c_0\lambda + c_1$ cuya raiz es $r = \frac{-c_1}{c_0}$. Entonces la solución general es $c_n = \alpha r^n$, cuando $n = 0$ obtenemos $c_0 = \alpha$ asi que podemos escribir la solución general como $c_n = c_0 r^n$ de forma que conociendo c_0 (condición inicial) podemos determinar la sucesión. Una sucesión que verifica una recurrencia lineal homogenea de primer orden se llama progesión geométrica.

Ejemplo 1. Determine (a_n) si $a_n = 3a_{n-1}$ para $n \geq 1$ y $a_2 = 18$.

Solución. La solución general es $a_n = 3^n a_0$. Como $a_2 = 3^2 a_0 = 18$ tenemos $a_0 = 2$ y por lo tanto $a_n = 2 \cdot 3^n$.

La siguiente relación de recurrencia no tiene coeficientes constantes pero se puede aplicar un cambio de variable.

Ejemplo 2. Determine (a_n) si $a_n - 2na_{n-1} = 0$ para $n \geq 1$ y $a_0 = 3$.

Solución. Si hacemos el cambio de variable $a_n = n!b_n$ nos queda: $n!b_n - 2n(n-1)!b_{n-1} = 0$. Dividiendo entre $n!$ de ambos lados nos queda $b_n - 2b_{n-1} = 0$. Luego $b_n = 2^n b_0$. Como $a_0 = 0!b_0 = 3$ tenemos $b_0 = 3$ asi que $b_n = 3 \cdot 2^n$. Luego $a_n = 3n!2^n$ para $n \geq 0$.

0.3. Recurrencia lineal homogenea de segundo orden

Tenemos una relación del tipo $c_0 a_n + c_1 a_{n-1} + c_2 a_{n-2} = 0$ con $a, b, c \in \mathbb{R}$ y $ac \neq 0$. El polinomio característico es $p(\lambda) = c_0\lambda^2 + c_1\lambda + c_2$. Tenemos 3 posibilidades para $p(\lambda)$:

1. Dos raices reales distintas λ_1, λ_2. Una base de soluciones es $\{\lambda_1^n, \lambda_2^n\}$ luego la solución general es $a_n = \alpha_1\lambda_1^n + \alpha_2\lambda_2^n$.

2. Una raiz real doble λ_1. En este caso una base de soluciones es $\{\lambda_1^n, n\lambda_1^n\}$ luego la solución general es $a_n = \alpha_1\lambda_1^n + \alpha_2\lambda_2^n$.

3. Dos raices complejas conjugadas $\lambda_1 = a + bi$, $\lambda_2 = a - bi$ (donde $a, b \in \mathbb{R}$). En este caso, como en el caso de raices reales distintas, también $\{\lambda_1^n, \lambda_2^n\}$ es una base de soluciones. Otra base de soluciones que no involucra números complejos es $\{r^n \cos(n\theta), r^n \operatorname{sen}(n\theta)\}$ donde

$\lambda_1 = re^{i\theta}$ y $\lambda_2 = re^{-i\theta}$ es la expresión en coordenadas polares[4] de λ_1 y λ_2 , luego la solución general también puede expresarse como $a_n = \alpha r^n \cos(n\theta) + \beta r^n \operatorname{sen}(\theta)$, para $n \geq 0$.

Ejemplo 3. (raices reales distintas) Hallar la sucesión (a_n) definida por $a_{n+2} = 3a_{n+1} - 2a_n$, para $n \geq 0$ y las condiciones iniciales $a_0 = 4$, $a_1 = 5$.

Solución. El polinomio característico es $p(\lambda) = \lambda^2 - 3\lambda + 2$ que tiene raices 1 y 2 asi que $\{1^n, 2^n\}$ forman una base de soluciones[5] de la relación homogenea (sin tener en cuenta las condiciones iniciales). La solución general para la relación homogena es $a_n = \alpha + \beta 2^n$. Como $a_0 = \alpha + \beta = 4$ y $a_1 = \alpha + 2\beta = 5$ obtenemos $\alpha = 3, \beta = 1$. Luego la solución pedida es $a_n = 3 + 2^n$ para $n \geq 0$.

Ejemplo 4. (raiz real doble) Hallar la sucesión (a_n) definida por $a_{n+2} = 4a_{n+1} - 4a_n$, para $n \geq 0$ y las condiciones iniciales $a_0 = -1$, $a_1 = 4$.

Solución. El polinomio característico es $p(\lambda) = \lambda^2 - 4\lambda + 4$ que tiene raiz doble 2, luego una base de soluciones para la recurrencia es $\{2^n, n2^n\}$. La solución general es $a_n = \alpha 2^n + \beta n 2^n$. Como $a_0 = \alpha = -1$ y $a_1 = 2\alpha + 2\beta = 4$ obtenemos $\alpha = -1, \beta = 3$. Luego la sucesión que buscamos es $a_n = (3n - 1) \cdot 2^n$.

Ejemplo 5 (raices complejas conjugadas) Hallar la sucesión (a_n) definida por $a_{n+2} = 2a_{n+1} - 2a_n$, para $n \geq 0$ y las condiciones iniciales $a_0 = 1$, $a_1 = 2$.

Solución 1. El polinomio característico es $p(\lambda) = \lambda^2 - 2\lambda + 2$ con raices complejas $1 + i$ y $1 - i$. Una base de soluciones para la recurrencia es $\{(1 + i)^n, (1 - i)^n\}$. Luego nuestra solución es de la forma $a_n = \alpha(1 + i)^n + \beta(1 - i)^n$. Como $a_0 = \alpha + \beta = 1$ y $a_1 = (1 + i)\alpha + (1 - i)\beta = 2$ tenemos $\alpha = \frac{1-i}{2}$, $\beta = \frac{1+i}{2}$ luego la sucesión buscada viene dada por la fórmula $a_n = \frac{(1-i)(1+i)^n + (1+i)(1-i)^n}{2}$ para $n \geq 0$. Observar que como $(1 - i)(1 + i) = 2$ también tenemos $a_n = (1 + i)^{n-1} + (1 - i)^{n-1}$ para $n \geq 1$, $a_0 = 1$.

[4](La relación entre coordenadas cartesianas y polares viene dada por: $r = \sqrt{a^2 + b^2}$, $\theta = Arctg(b/a)$ si $a \neq 0$ y $\theta = \pi/2$ si $a = 0$.

[5]Atención: 1^n debe interpretarse como la sucesión (b_n) identicamente 1, es decir $b_n = 1$ para todo $n \geq 0$. De la misma forma 2^n debe interpretarse como la sucesión (c_n) definida por $c_n = 2^n$ para todo $n \geq 0$. Es decir, los elementos de la base son sucesiones y no números.

Solución 2. Las raices del polinomio característico son $1+i=\sqrt{2}e^{\frac{\pi}{4}i}$ y $1-i=\sqrt{2}e^{\frac{-\pi}{4}i}$ por lo tanto otra base de soluciones para la recurrencia es $\{(\sqrt{2})^n\cos(\frac{n\pi}{4}),(\sqrt{2})^n\operatorname{sen}(\frac{n\pi}{4})\}$. Como nuestra sucesión verifica la recurrencia entonces $a_n=\alpha(\sqrt{2})^n\cos(\frac{n\pi}{4})+\beta(\sqrt{2})^n\operatorname{sen}(\frac{n\pi}{4})$. Con $a_0=\alpha=1$ y $a_1=\alpha\cdot\sqrt{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}+\beta\cdot\sqrt{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}=\alpha+\beta=2$ tenemos $\alpha=1$, $\beta=1$. Luego la sucesión buscada viene dada por la fórmula $a_n=(\sqrt{2})^n(\cos(\frac{n\pi}{4})+\operatorname{sen}(\frac{n\pi}{4}))$.

Comentario: Cualquiera de las dos soluciones se darán como correctas en las pruebas de este curso. Para el que tenga más familiaridad con números complejos puede que le convenga trabajar con la base trigonométrica ya que usualmente exige hacer menos cuentas, pero por otra parte debe de expresar las raices del polinomio característico en coordenadas polares y solo en algunos pocos casos el argumento θ va a quedar lindo (lindo = múltiplo racional de π).

Ejemplo 6 (raices complejas conjugadas) Hallar la sucesión (a_n) definida por $a_{n+2}=-2a_n$, para $n\geq 0$ y las condiciones iniciales $a_0=1$, $a_1=2$.

Solución. Podemos calcular el polinomio característico λ^2+2 con raices $\sqrt{2}i$ y $\sqrt{-2}i$ y proceder como en el ejemplo anterior. Otra posibilidad es observar que a partir de a_0 podemos calcular de forma simple todos los términos pares: $a_2=-2a_0$, $a_4=-2a_2=(-2)^2a_0$, $a_6=-2a_4=(-2)^3a_0$ y en general $a_{2m}=(-2)^m a_0$ para todo $m\geq 0$ (que puede probarse por inducción por ejemplo). También a partir de a_1 podemos calcular los términos impares: $a_3=(-2)a_1$, $a_5=(-2)^2a_1$, $a_7=(-2)^3a_1$ y en general $a_{2m+1}=(-2)^m a_1$ para $m\geq 0$. Entonces la sucesión pedida puede expresarse por la fórmula $(a_n)_{n\geq 0}: a_n=\begin{cases}(-2)^m & \text{si } n=2m;\\ 2\cdot(-2)^m & \text{si } n=2m+1.\end{cases}$ donde $m\in\mathbb{N}$.

0.4. Relaciones en recurrencia lineal no homogenea

Como mencionamos anteriormente, una relación de recurrencia lineal de orden k es una relación de la forma:

$$c_0a_n+c_1a_{n-1}+\cdots+c_ka_{n-k}=f(n),\ \forall n\geq k \tag{5}$$

donde $k\in\mathbb{Z}^+$ y $c_0,c_1,\ldots,c_k\in\mathbb{R}$ con $c_0c_k\neq 0$.

La observación clave es que si tenemos dos sucesiones (a_n) y (b_n) que verifican (5) entonces la sucesión diferencia (c_n): $c_n=a_n-b_n$ verifica la recurrencia lineal homogenea asociada:

$$c_0 a_n + c_1 a_{n-1} + \cdots + c_k a_{n-k} = 0,\ \forall n \geq k \tag{6}$$

Si queremos hallar una sucesión (a_n) que satisfaga (5) con ciertas condiciones iniciales para $a_0, a_1, \ldots, a_{k-1}$ entonces alcanza hallar una solución particular[6] $(a_n^{(p)})$ de (5). La sucesión (b_n): $b_n = a_n - a_n^{(p)}$ verifica una relación lineal homogenea, que sabemos resolver en el caso de orden 1 ó 2. En resumen, **todo se resume a hallar una solución particular** $(a_n^{(p)})$.

Búsqueda de la solución particular: Nosotros solo vamos a considerar el caso en que $f(n) = r^n g(n)$ donde $g(n)$ es un polinomio de grado t y $r \in \mathbb{R}$ (o suma de funciones de esta forma). Observar que esto incluye el caso en que $f(n)$ sea un polinomio $(r = 1)$ y también el caso en que $f(n)$ sea exponencial $(p \equiv 1)$. Basados en consideraciones que se hacen en la página 490 del Grimaldi (incluida la tabla 10.2) tenemos lo siguiente:

- Si r no es raiz del polinomio característico[7] de la recurrencia homogenea asociada entonces existe una solución particular de la forma $a_n^{(p)} = r^n h(n)$ donde $h(x)$ es un polinomio[8] del mismo grado que $g(n)$.
- Si r es raiz simple del polinomio característico de la recurrencia homogenea asociada entonces existe una solución particular de la forma $a_n^{(p)} = nr^n h(n)$ donde $h(n)$ es un polinomio del mismo grado que $g(n)$.
- Si r es raiz doble del polinomio característico de la recurrencia homogenea asociada entonces existe una solución particular de la forma $a_n^{(p)} = n^2 r^n h(n)$ donde $h(n)$ es un polinomio del mismo grado que $g(n)$.

En general siempre habrá una solución particular de la forma $a_n^{(p)} = n^s r^n h(n)$ donde $h(n)$ es un polinomio del mismo grado que $g(n)$ y s es la multiplicidad de r como raiz del polinomio característico de la recurrencia homogenea. Como estamos trabajando solamente con recurrencias de orden 1 y 2 nos basta considerar los tres casos mencionados arriba.

[6] Solución particular significa que es solución de la recurrencia no homogenea (5) pero no necesariamente verifica las condiciones iniciales que queremos.

[7] Cuidado de no confundir el polinomio característico con el polinomio $g(n)$.

[8] Los coeficientes de $h(n)$ los obtenemos substituyendo (a_n^p) en la recurrencia no homogenea (5).

Ejemplo 7. Determine la sucesión (a_n) definida por la recurrencia $a_{n+2} = 3a_{n+1} - 2a_n + n^2$ y condiciones iniciales $a_0 = 0, a_1 = -2$.

Solución. Primero hallamos la solución general de la recurrencia homogenea asociada $a_{n+2} = 3a_{n+1} - 2a_n$ (ver ejemplo 3). El polinomio característico es $p(\lambda) = \lambda^2 - 3\lambda + 2$ con raices 1 y 2, la solución general de la homogenea es $a_n^{(H)} = \alpha + \beta 2^n$ con $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

Ahora debemos hallar una solución particular. En este ejemplo el término independiente es $f(n) = r^n g(n)$ con $r = 1$ y $g(n) = n^2$ por lo tanto $a_n^{(P)} = n \cdot 1^n \cdot (an^2 + bn + c) = an^3 + bn^2 + cn$. Calculamos $a_{n+2}^{(P)}$ e igualamos con $3a_{n+1}^{(P)} - 2a_n^{(P)} + n^2$ para determinar los valores de a, b y c.

$$\begin{aligned} a_{n+2}^{(P)} &= a(n+2)^3 + b(n+2)^2 + c(n+2) \\ &= an^3 + (6a+b)n^2 + (12a+4b+c)n + (8a+4b+2c) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 3a_{n+1}^{(P)} - 2a_n^{(P)} + n^2 &= 3(a(n+1)^3 + b(n+1)^2 + c(n+1)) - 2(an^3 + bn^2 + cn) + n^2 \\ &= 3an^3 + (9a+3b)n^2 + (9a+6b+3c)n + (3a+3b+3c) - 2(an^3 + bn^2 + cn) + n^2 \\ &= an^3 + (9a+b+1)n^2 + (9a+6b+c)n + (3a+3b+3c). \end{aligned}$$

Obtenemos el sistema de ecuaciones: $\begin{cases} 6a + b = 9a + b + 1 \\ 12a + 4b + c = 9a + 6b + c \\ 8a + 4b + 2c = 3a + 3b + 3c \end{cases}$

Lo resolvemos y obtenemos $a = -1/3, b = -1/2, c = -13/6$.

Como la diferencia entre dos soluciones es solución de la homogenea asociada: $a_n - a_n^{(P)} = \alpha + \beta 2^n$, $n \geq 0$ donde $a_n^{(P)} = -(\frac{n^3}{3} + \frac{n^2}{2} + \frac{13n}{6})$.

Con $n = 0$ y $n = 1$ obtenemos $0 - 0 = \alpha + \beta$ y $(-2) + 3 = \alpha + 2\beta$. Luego $\alpha = -1, \beta = 1$ y $a_n = -(\frac{n^3}{3} + \frac{n^2}{2} + \frac{13n}{6}) - 1 + 2^n = 2^n - \frac{2n^3+3n^2+13n+6}{6}$.

0.5. Principio de superposición

Si tenemos una sucesión $(a_n^{(1)})$ que verifica una recurrencia

$$(E1)\ Aa_n + Ba_{n-1} + Ca_{n-2} = f_1(n)$$

y una sucesión $(a_n^{(2)})$ que verifica una recurrencia

$$(E2)\ Aa_n + Ba_{n-1} + Ca_{n-2} = f_2(n),$$

entonces la sucesión $(\alpha a_n^{(1)} + \beta a_n^{(2)})$ verifica la recurrencia

$$(E)\ Aa_n + Ba_{n-1} + Ca_{n-2} = \alpha f_1(n) + \beta f_2(n).$$

Esta observación es útil para hallar una solución particular de una recurrencia $(E)\ Aa_n + Ba_{n-1} + Ca_{n-2} = f(n)$ donde $f(n)$ es complicada pero puede expresarse como una combinación lineal $f(n) = \alpha f_1(n) + \beta f_2(n)$ de funciones más simples $f_1(n)$ y $f_2(n)$.

Ejemplo 8. Hallar la sucesión (a_n) que verifica la relación de recurrencia $a_{n+2} - 2a_{n+1} + a_n = 3^n - 2^n$ para $n \geq 0$, con las condiciones iniciales $a_0 = a_1 = 0$.

Solución. El polinomio característico de la recurrencia homogenea asociada es $p(\lambda) = \lambda^2 - 2\lambda + 1$ con raiz doble 1, una base de soluciones es $\{1^n, n \cdot 1^n\}$ y por lo tanto la solución general de la homogenea es de la forma $a_n^{(H)} = \alpha + \beta n$ con $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Para determinar una solución particular de la recurrencia original que llamamos (E), vamos a determinar una solución particular $(a_n^{(1)})$ para

$$(E1)\ a_{n+2} - 2a_{n+1} + a_n = 3^n$$

y una solución particular $(a_n^{(2)})$ para

$$(E2)\ a_{n+2} - 2a_{n+1} + a_n = 2^n,$$

luego por el principio de superposición la sucesión $a_n^{(P)} = a_n^{(1)} - a_n^{(2)}$ será una solución particular de (E). Como 3 no es raiz del polinomio característico sabemos que hay una solución particular de $(E1)$ de la forma $a_n^{(1)} = A3^n$ con $A \in R$. Substituyendo en $(E1)$ obtenemos $A3^{n+2} - 2A3^{n+1} + A3^n = 3^n \Leftrightarrow 9A - 6A + A = 1 \Leftrightarrow 4A = 1 \Leftrightarrow A = 1/4$, asi que $a_n^{(1)} = \frac{3^n}{4}$. Como 2 no es raiz de $(E2)$ tenemos una solución particular $a_n^{(2)} = B2^n$ con $B \in \mathbb{R}$. Substituyendo en $(E2)$ obtenemos $B2^{n+2} - 2B2^{n+1} + B2^n = 2^n \Leftrightarrow 4B - 4B + B = 1 \Leftrightarrow B = 1$, asi que $a_n^{(2)} = 2^n$. Por el principio de superposición una solución particular de la recurrencia original viene dada por $a_n^{(P)} = \frac{3^n}{4} - 2^n$. Como $a_n - a_n^{(P)}$ verifica la homogenea asociada tenemos $a_n - a_n^{(P)} = \alpha + \beta n$. Utilizamos las condiciones iniciales $a_0 = a_1 = 0$ junto con $a_0^{(P)} = -3/4$ y $a_1^{(P)} = -5/4$ para obtener α y β. Con $n = 0$ tenemos $3/4 = \alpha$ y con $n = 1$ tenemos $5/4 = \alpha + \beta \Rightarrow \beta = 5/4 - \alpha = 1/2$. Luego $a_n = \frac{3^n}{4} - 2^n + \frac{3}{4} + \frac{n}{2} = \frac{3^n - 2^{n+2} + 3 + 2n}{4}$ para todo $n \geq 0$.

0.6. Método de las funciones generatrices

La sección del libro de Grimaldi para estudiar estos temas es la 10.4. El método de las funciones generatrices es un método alternativo para resolver relaciones de recurrencias y consiste en los siguientes pasos:

1. Usar la relación de recurrencia para construir una ecuación de funciones generatrices cuya incógnita sea la función generatriz $A(x)$ de la sucesión (a_n) que queremos determinar.

2. Expresar $A(x)$ como un cociente de polinomios.

3. Usar el método de fracciones simples para expresar $A(x)$ como suma de fracciones simples.

4. Utilizar la fórmula $(1-x)^{-k} = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{k-1+n}{k-1} x^n$ en cada fracción simple para luego obtener a_n comparando coeficientes n-ésimos de cada lado de la igualdad.

Ejemplo 9. Hallar la sucesión (a_n) que verifica la relación de recurrencia $a_{n+2} - 2a_{n+1} + a_n = 3^n$ para $n \geq 0$, con $a_0 = 0$ y $a_1 = 1$.

Solución. Llamamos $A(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ a la función generatriz que queremos determinar. El primer paso es observar que la igualdad $a_{n+2} - 2a_{n+1} + a_n = 3^n$ para $n \geq 0$ equivale a la igualdad de funciones generatrices:

$$\sum_{n=0}^{\infty} (a_{n+2} - 2a_{n+1} + a_n) x^{n+2} = \sum_{n=0}^{\infty} 3^n x^{n+2}.$$

(el x^{n+2} corresponde al mayor índice que aparece de la sucesión que es a_{n+2})

Esta ecuación equivale a:

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_{n+2} x^{n+2} - 2x \sum_{n=0}^{\infty} a_{n+1} x^{n+1} + x^2 \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = x^2 \sum_{n=0}^{\infty} 3^n x^n$$

$$(A(n) - a_0 - a_1 x) - 2x(A(x) - a_0) + x^2 A(n) = x^2 \sum_{n=0}^{\infty} (3x)^n.$$

Usando que $a_0 = 0, a_1 = 1$ y $\sum_{n=0}^{\infty} (3x)^n = \frac{1}{1-3x}$ tenemos:

$$(1 - 2x - x^2)A(x) - x = \frac{x^2}{1-3x} \Rightarrow A(x) = \frac{x - 2x^2}{(1-x)^2(1-3x)}.$$

Con esto hemos conseguido el paso 2 el método (expresar $A(x)$ como cociente polinomial). El tercer paso es expresar $A(x)$ como suma de fracciones simples, para ello debemos determinar $a, b, c \in \mathbb{R}$ tal que:

$$\begin{aligned}
\frac{x-2x^2}{(1-x)^2(1-3x)} &= \frac{a}{1-x} + \frac{b}{(1-x)^2} + \frac{c}{1-3x} \\
&\Leftrightarrow x - 2x^2 = a(1-x)(1-3x) + b(1-3x) + c(1-x)^2 \\
&\Leftrightarrow x - 2x^2 = a(1-4x+3x^2) + b(1-3x) + c(1-2x-x^2).
\end{aligned}$$

Con $x = 1$ obtenemos $-1 = -2b \Rightarrow b = \frac{1}{2}$ y con $x = \frac{1}{3}$ obtenemos $\frac{1}{3} - \frac{2}{9} = \frac{4c}{9} \Rightarrow c = \frac{1}{4}$. Con $x = 1$ en $1 - 4x = a(-4+6x) + b(-3) + c(-2+2x)$ (que se obtiene derivando de ambos lados) obtenemos $-3 = 2a - 3b = 2a - 3/2 \Rightarrow a = \frac{-3}{4}$. Asi que tenemos:

$$\begin{aligned}
A(x) &= -\frac{3}{4} \cdot (1-x) + \frac{1}{2} \cdot (1-x)^{-2} + \frac{1}{4} \cdot (1-3x)^{-1} \\
&= -\frac{3}{4} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} x^n + \frac{1}{2} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \binom{1+n}{1} x^n + \frac{1}{4} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} (3x)^n \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \left(-\frac{3}{4} + \frac{1}{2}(1+n) + \frac{1}{4} \cdot 3^n \right) x^n = \sum_{n=0}^{\infty} \left(-\frac{1}{4} + \frac{1}{2} \cdot n + \frac{1}{4} \cdot 3^n \right) x^n.
\end{aligned}$$

Luego $a_n = -\frac{1}{4} + \frac{1}{2} \cdot n + \frac{1}{4} \cdot 3^n$, para $n \geq 0$.

El método de las funciones generatrices también sirve para resolver sistema de relaciones de recurrencia que involucran dos sucesiones (a_n) y (b_n). Los pasos son escencialmente los mismos, primero usar las relaciones de recurrencia para obtener un sistema con incógnitas $A(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ y $B(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$. Resolver ese sistema para obtener $A(x)$ y $B(x)$. Expresar estas funciones generatrices primero como cociente de polinomios, luego como suma de fracciones simples, utilizar la fórmula $(1-x)^{-k} = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{k-1+n}{k-1} x^n$ y comparar coeficientes para obtener expresiones para a_n y b_n en función de n (ver Ej. 10.35, pág. 497 del libro de Grimaldi para un ejemplo concreto). Se puede ver también un ejemplo resuelto en detalle en el video: `https://www.youtube.com/watch?v=rLQr0i0eYWg&t=4s`.