

Práctico 6 - Topología en \mathbb{R}^n

Nota: en \mathbb{R}^n , a menos que se aclare lo contrario, asumiremos que estamos trabajando con la distancia euclídea.

1. a) Una función $N : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ es una norma si satisface las siguientes propiedades:

(I) $N(u) \geq 0, \forall u \in \mathbb{R}^n$ y $N(u) = 0$ sí y sólo sí $u = \vec{0}$

(II) $N(\lambda u) = |\lambda|N(u), \forall \lambda \in \mathbb{R}, \forall u \in \mathbb{R}^n$

(III) $N(u + v) \leq N(u) + N(v), \forall u, v \in \mathbb{R}^n$

Investigar si las siguientes funciones de \mathbb{R}^2 en \mathbb{R} son normas

(i) $N((x, y)) = |x| + |y|,$

(ii) $N((x, y)) = \sqrt{x^2 + y^2},$

(iii) $N((x, y)) = \max\{|x|, |y|\},$

(iv) $N((x, y)) = |x + y|.$

- b) Para aquellas que sean normas, dibujar la bola de centro en el origen y radio 1. Indicar cuáles de los siguientes puntos pertenecen a la bola de centro (3, 4) y radio 2: (3, 4), (4, 5).

- c) Decimos que dos normas N_1, N_2 son equivalentes si existen constantes $\alpha, \beta > 0$ tal que $\alpha N_1(u) \leq N_2(u) \leq \beta N_1(u)$. Probar que aquellas funciones que son normas de este ejercicio son equivalentes dos a dos.

2. Se definen los siguientes conjuntos:

$$A_1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 1 \leq x \leq 2, 1 < y < 3\},$$

$$B = A_1 \cap \mathbb{Q}^2$$

$$A_2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y = x^2\}$$

$$A_3 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 < 1, (x, y) \neq (0, 0)\},$$

$$C = A_3 \cap \mathbb{Q}^2$$

$$A_4 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 2x^2 + y^2 < 1\} \cup \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x = y\}$$

$$A_5 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x = (-1)^n + \frac{1}{n}, y = 1, n \geq 1\},$$

$$A_6 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x + y + z < 1, x > 0, y > 0, z > 0\}$$

$$A_7 = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 + 1 \leq z\}$$

- a) Representarlos gráficamente e investigar si están acotados.
b) Hallar el interior, la frontera y la clausura de cada uno de ellos.
c) Hallar el conjunto de sus puntos de acumulación.
d) Indicar si son abiertos.
e) Indicar si son cerrados.
f) Indicar si son compactos.

3. a) Probar que toda bola abierta es un conjunto abierto.
b) Probar que si A es un conjunto abierto y $p \in A$ entonces $A - p$ es abierto.
4. Sean A un conjunto abierto de \mathbb{R}^2 y $C = A \cap (\mathbb{Q} \times \mathbb{Q})$. Hallar $\text{int}(C), \overline{C}$, y ∂C .
5. Sean A y B dos conjuntos \mathbb{R}^n . Se define el conjunto suma $A + B$ de la siguiente forma:

$$A + B = \{a + b : a \in A, b \in B\}$$

- a) Demostrar que si A es abierto $A + B$ es abierto.

- b) ¿Qué se puede decir de $A + B$ si A es cerrado?
6. Probar los siguientes resultados.
- A es abierto sii $A \cap \partial A = \emptyset$.
 - $\text{int}(A) = \bar{A} - \partial A$ es un conjunto abierto, más aún, es la unión de los subconjuntos abiertos contenidos en A (es el “mayor” conjunto abierto incluido en A).
 - A es cerrado sii $\partial A \subset A$ sii $A' \subset A$.
 - $\bar{A} = A \cup \partial A$ es un conjunto cerrado, más aún, es la intersección de todos los conjuntos cerrados que contienen a A (es el “menor” cerrado que contiene a A).
 - A' es un conjunto cerrado.
7.
 - Probar que la unión de una familia arbitraria de conjuntos abiertos es un conjunto abierto.
 - Probar que la intersección de una cantidad finita de conjuntos abiertos es un conjunto abierto.
 - ¿Es cierto que la intersección de una cantidad arbitraria de conjuntos abiertos es un conjunto abierto?
 - Extraer conclusiones sobre la unión e intersección de conjuntos cerrados.
8. Estudiar la convergencia de las siguientes sucesiones definidas en \mathbb{R}^2 . En caso de no convergencia, determinar la existencia de subsucesiones convergentes y calcularlas

$$a_n = \left(e^{-n}, \frac{3}{n} \right), \quad b_n = (e^{-n} + 2, [1 + (-1)^n]n), \quad c_n = \left((-1)^n, (-1)^n + \frac{1}{n} \right).$$

$$d_n = \left(n((-1)^n + 1), e \right), \quad e_n = \left(\sin\left(\frac{n\pi}{8}\right), \cos\left(\frac{n\pi}{3}\right) \right)$$

9.
 - Sea x_n una sucesión en \mathbb{R}^n . Probar que si una sucesión tiene límite, entonces toda subsucesión tiene el mismo límite.
 - Sea x_n una sucesión en \mathbb{R}^2 , tal que $x_n \rightarrow p$ y sea $A = \{x_n, n \in \mathbb{N}\}$. Hallar $\text{int}(A)$, \bar{A} , A' , ∂A .
 - Demostrar que un punto a es de acumulación de un conjunto X sii existe una sucesión $(x_k) \subset X - \{a\}$ que converge a a .

Ejercicios opcionales

1. Distancia entre dos conjuntos

Sean $A, B \subset \mathbb{R}^n$ dos conjuntos no vacíos. Definimos la distancia entre los conjuntos A y B de la siguiente manera:

$$d(A, B) := \inf \{d(x, y) : x \in A, y \in B\}$$

- Mostrar que $d(A, B) = 0$ si $A \cap B \neq \emptyset$, en particular $d(A, A) = 0$.
- Mostrar con un ejemplo que puede ocurrir que $d(A, B) = 0$ y sin embargo $A \cap B = \emptyset$
- Mostrar que si A y B son compactos entonces $A \cap B \neq \emptyset$ sí y sólo si $d(A, B) = 0$.

2. El Conjunto de Cantor

- a) Sea $(K_m)_{m \geq 0}$ una sucesión decreciente de conjuntos compactos no vacíos en \mathbb{R}^n , es decir que:

- $K_m \subseteq \mathbb{R}^n$ es compacto y no vacío $\forall m \geq 0$.
- $K_{m+1} \subseteq K_m$.

Probar que $K = \bigcap_{m=0}^{\infty} K_m$ es compacto y no vacío.

- b) Nos limitaremos ahora al caso $n = 1$. Se define la sucesión $(K_m)_{m \geq 0}$ de subconjuntos de \mathbb{R} mediante el siguiente procedimiento: $K_0 = [0, 1]$, $K_1 = K_0 - (\frac{1}{3}; \frac{2}{3})$, $K_2 = K_1 - [(\frac{1}{9}; \frac{2}{9}) \cup (\frac{7}{9}; \frac{8}{9})]$,... En general, K_{m+1} se obtiene de K_m quitándole los tercios centrales abiertos de cada uno de los intervalos que forman K_m . Sea $K = \bigcap_{m=0}^{\infty} K_m$ (denominado “Conjunto de Cantor”). Probar que:

- K es compacto y no vacío.

- $K = K'$
- K tiene interior vacío.

c) Observar que cada número real $x \in [0, 1]$ admite una representación "ternaria" de la forma:

$$x = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\alpha_k}{3^k} \text{ con } \alpha_k \in \{0, 1, 2, \}$$

¿Cómo es la representación ternaria de los puntos del Conjunto de Cantor? Deducir que K no es numerable.

d) ¿Cuál es la "longitud" de $[0, 1] - K$?

3. Sea $(x_n)_{n \geq 0}$ una sucesión contractiva, es decir, tal que existe $k \in \mathbb{R}$, $0 < k < 1$, que cumple $\forall n \geq 0$:

$$\|x_{n+1} - x_n\| \leq k \|x_n - x_{n-1}\|$$

Demostrar que:

- a) $\|x_{n+1} - x_n\| \leq k^n \|x_1 - x_0\| \forall n \in \mathbb{N}$.
 - b) Si $p, q \in \mathbb{N}$, $p > q$, entonces $\|x_p - x_q\| \leq \frac{k^q}{1-k} \|x_1 - x_0\|$ Sugerencia: usar la desigualdad triangular.
 - c) $(x_n)_{n \geq 0}$ es de Cauchy y por lo tanto convergente.
4. a) Sea x_k una sucesión en \mathbb{R}^n tal que $\|x_k\| \rightarrow \infty$. Probar que x_k no tiene ninguna subsucesión convergente.
- b) De un ejemplo de una sucesión no acotada, pero que sí contenga alguna subsucesión convergente. ¿Esto contradice lo pedido en el ítem anterior? ¿Por qué?
5. Decimos que $A \subset \mathbb{R}^n$ un conjunto no vacío, es convexo si para todo par de puntos $p, q \in A$ se tiene que el segmento que los une está incluido en él. Es decir $\forall p, q \in A$ se tiene que $[p, q] = \{tp + (1-t)q, t \in [0, 1]\} \subset A$,
- a) Probar que si $V \subset \mathbb{R}^n$ es un subespacio, entonces es convexo
 - b) Probar que en \mathbb{R}^3 un semi-espacio, un semi-plano y una semi-recta son convexos
 - c) Probar que si $A_i, i \in I$ son conjuntos convexos y $A = \bigcap_{i \in I} A_i \neq \emptyset$ entonces A es convexo.
 - d) Sea N una norma en \mathbb{R}^n . Probar que $B(0, 1) = \{x \in \mathbb{R}^n : N(x) < 1\}$, es un conjunto convexo.
 - e) Sea $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ una función C^∞ . Definimos el conjunto $A_f \subset \mathbb{R}^2$ como $A_f = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y \geq f(x)\}$. Probar que A_f es convexo si solo si $f''(x) \geq 0, \forall x \in \mathbb{R}$.
 - f) Sea $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ una función tal que A_f es convexo. Probar que f es continua