

# Sincronización en fase y frecuencia

Pablo Belzarena

Comunicaciones inalámbricas

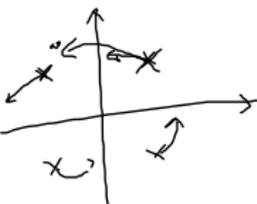
2020

# Tabla de contenidos

- 1 Introducción
- 2 Phase Locked Loop : PLL
- 3 PLL en tiempo discreto
- 4 Costas Loop
- 5 Estimador máxima verosimilitud

## Sincronización en fase y frecuencia

### Introducción



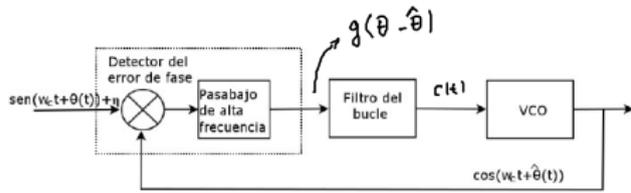
- La fase del oscilador en el receptor y el transmisor no es la misma.
- El canal de comunicación inalámbrico introduce un diferencia de fase.
- El error de fase genera que la constelación recibida se encuentre rotada un cierto ángulo desconocido.
- Los osciladores del transmisor y receptor no pueden ser sintonizados exactamente en la misma frecuencia.
- Esta diferencia en frecuencia hace la constelación recibida gire a la frecuencia del error.
- Analizaremos como corregir el error en fase y errores en frecuencia que varíen lentamente.

# Sincronización en fase y frecuencia

## Introducción

- Imaginemos que el error de fase es constante ¿cómo podría corregirlo?
- pero si hay ruido y/o ese error varía lentamente en el tiempo ¿cómo podría corregirlo?





$$g(\theta_e) = k_p \sin(\theta_e) \approx k_p \theta_e$$

$$\sin(\omega_c t + \theta) \cdot \cos(\omega_c t + \hat{\theta}) = \sin(\theta - \hat{\theta}) + \sin(2\omega_c t + \theta + \hat{\theta})$$

$$g(\underbrace{\theta(t) - \hat{\theta}(t)}_{\theta_e}) = k_p \sin(\theta(t) - \hat{\theta}(t))$$

$$\dot{\hat{\theta}}(t) = k_o c(t) \Rightarrow \hat{\theta}(t) = k_o \int_0^t c(\tau) d\tau$$

$$\theta(t) = \Delta\omega t + \theta_0$$

Filtro de bucle  $\begin{cases} k_i \\ k_f(1+s) \end{cases}$

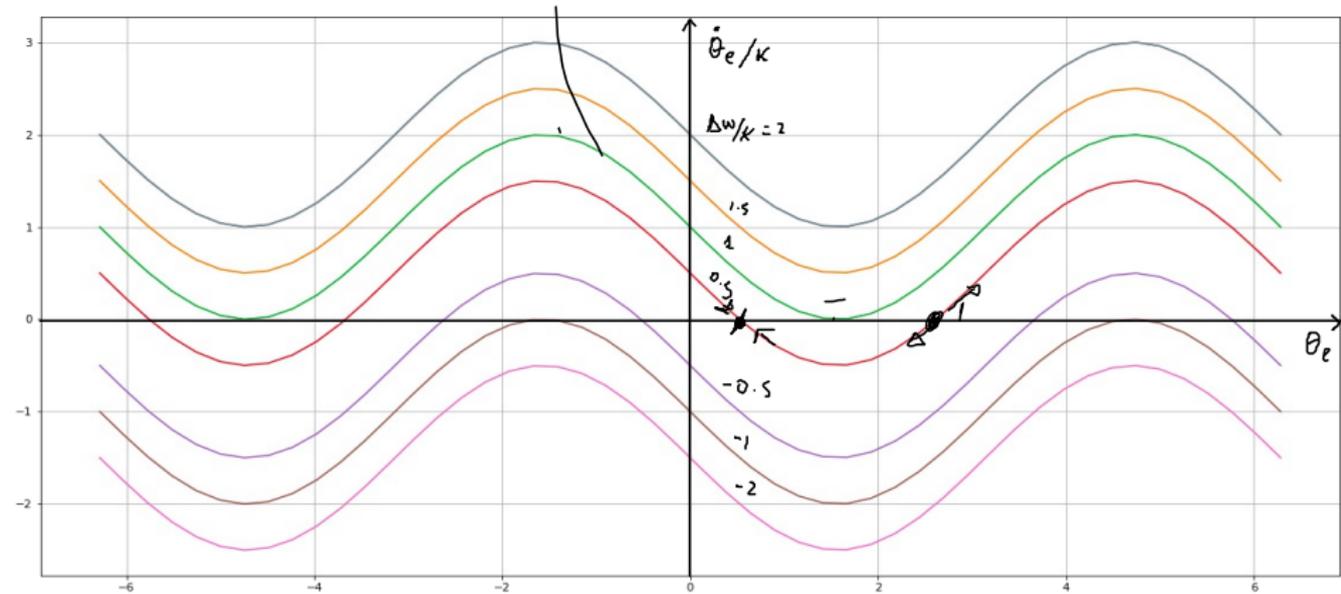
$$\theta_e = \theta - \hat{\theta} = \Delta\omega t + \theta_0 - k_o \int c(\tau) d\tau, \quad c(t) = k_1 g(\theta(t) - \hat{\theta}(t))$$

$$\theta_e = \Delta\omega t + \theta_0 - k_o \int k_1 k_p \sin(\theta_e(\tau)) d\tau$$

$$\dot{\theta}_e = \Delta\omega - k_o k_1 k_p \sin(\theta_e(t)) \quad \parallel \quad \dot{\theta}_e / k = \Delta\omega / k - \sin(\theta_e(t))$$

$\dot{\theta}_e = 0$   $\left| \frac{\Delta w}{k} \right| < 1$  para que exista pto equilibrio

$$\theta_e^* \approx \arcsin(\theta_e^*) = \Delta w / k$$



$$\theta_e(t) = \Delta \omega t + \theta_0 - k_0 \int c(\tau) d\tau$$

$$c(\tau) = k_1 (g(\theta_e(t)) + a \int_0^\tau g(\theta_e(\sigma)) d\sigma)$$

$$\theta_e(t) = \Delta \omega t + \theta_0 - k_0 k_p \int_0^t \left( k_1 (\sin(\theta_e) + a \int_0^\tau \sin(\theta_e(s)) ds) \right) d\tau$$

$$\dot{\theta}_e(t) = \Delta \omega - k_0 k_1 k_p \left( \sin(\theta_e) + a \int_0^t \sin(\theta_e(s)) ds \right)$$

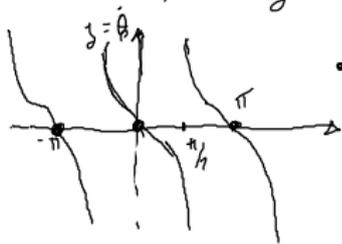
$$\ddot{\theta}_e(t) = -k_0 k_1 k_p (\dot{\theta}_e \cos(\theta_e) + a \sin(\theta_e))$$

$$\ddot{\theta}_e(t) = -k_0 k_1 k_p (\dot{\theta}_e \cos(\theta_e) + a \sin(\theta_e)) \Rightarrow \theta_e = x, \dot{\theta}_e = y$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = -k_0 k_1 k_p (y \cos(x) + a \sin(x)) \end{cases}$$

Punto de equilibrio:

$$\begin{cases} \dot{x} = 0 \Rightarrow \theta_e = 0 \\ \dot{y} = 0 \Rightarrow \dot{\theta}_e = -k + g(\theta_e) \end{cases}$$



• puntos de eq.

# PLL

## Introducción

Modelo no-lineal de primer orden se puede analizar, pero más en general es necesario linealizar :

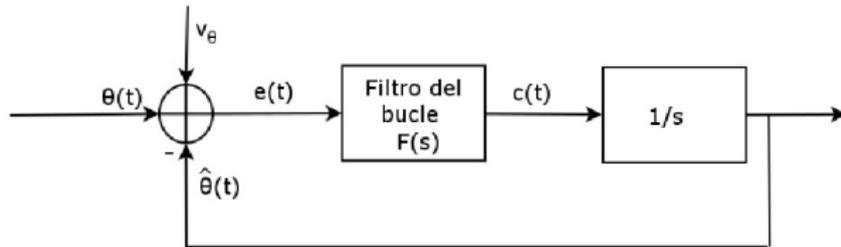


FIGURE – Esquema general de un PLL linealizado

$$\theta_e = \theta - \int_0^t \frac{1}{s} \left( \frac{1}{k_p} \frac{d}{dt} \theta_e \right) dt \Rightarrow \theta_e(s) = \theta(s) - \frac{k_o k_p F(s)}{s} \theta_e(s)$$

# PLL

## Modelo lineal y en tiempo continuo

Si se ignora el ruido de fase. Transferencia :

$$H(s) = \frac{\hat{\Theta}(s)}{\Theta(s)} = \frac{k_0 k_p F(s)/s}{1 + k_0 k_p F(s)/s}$$
$$H(s) = k_0 k_p \frac{F(s)}{s + k_0 k_p F(s)}$$

La transformada de Lapalce del error  $E(s)$  es :

$$E(s) = \frac{s\Theta(s)}{k_0 k_p F(s) + s}, \quad G(s) = \frac{E(s)}{\Theta(s)} = \frac{s}{k_0 k_p F(s) + s}$$

Utilizando el teorema del valor final :

$$e_\infty = \lim_{t \rightarrow \infty} e(t) = \lim_{s \rightarrow 0} sE(s), \quad e_\infty = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{s^2 \Theta(s)}{k_0 k_p F(s) + s}$$

# PLL

## Modelo lineal en tiempo continuo de primer orden

En este caso  $F(s) = k_1$

$$H(s) = k_0 k_p \frac{k_1}{s + k_0 k_p k_1}$$

un polo en  $s = -k_0 k_p k_1 = -k_T$ . Si en  $t = 0$  se introduce un escalón de fase  $\theta_0$

$$\hat{\theta}(t) = \theta_0(1 - e^{-k_T t})$$

que sucede si se tiene un error en frecuencia,

$$\Theta(s) = \frac{\Delta w_c}{s^2} + \frac{\theta_0}{s}$$

$$\hat{\Theta}(s) = \Theta(s)H(s) = k_T \left( \frac{\Delta w_c}{s^2} \frac{1}{s + k_T} + \frac{\theta_0}{s} \frac{1}{s + k_T} \right)$$

De donde se puede obtener  $\hat{\theta}(t)$ .

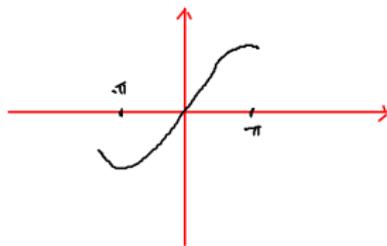
# PLL

## Modelo lineal en tiempo continuo de primer orden

El error a tiempo infinito cuando hay error en frecuencia :

$$e_{\infty} = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{s^2 \Theta(s)}{k_0 k_p F(s) + s} = \frac{\Delta \omega_c}{k_T}$$

Para que el PLL pueda funcionar correctamente y seguir el error,



$$|e_{\infty}| = \left| \frac{\Delta \omega_c}{k_T} \right| \leq \pi$$
$$|\Delta f_c| \leq \frac{k_T}{2}$$

# PLL

## Modelo lineal en tiempo continuo de segundo orden

En este caso la función de transferencia del filtro de bucle será :

$$F(s) = k_1 \frac{s + a}{s + b}$$

$$H(s) = k_T \frac{s + a}{k_T a + (k_T + b)s + s^2}$$

$$E(s) = \frac{s(s + b)\Theta(s)}{k_T a + (k_T + b)s + s^2}$$

$$e_\infty = \lim_{s \rightarrow 0} \frac{s^2(s + b)\Theta(s)}{k_T a + (k_T + b)s + s^2}$$

Si :  $\Theta(s) = \theta_0/s$ , el error tenderá a cero. Si hay un error en frecuencia :

$$e_\infty = \frac{\Delta w_c b}{k_T a} \text{ será cero solo si } F(s) = k_1 + \frac{k_1 a}{s}$$

# PLL

## Modelo lineal en tiempo continuo de segundo orden

$$H(s) = k_T \frac{s + a}{k_T a + k_T s + s^2}$$

$$G(s) = \frac{s^2}{k_T a + k_T s + s^2}$$

Se define frecuencia natural  $w_n$  y factor de amortiguamiento  $\zeta$  :

$$w_n = \sqrt{k_T a} , \zeta = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{k_T}{a}}$$

$$H(s) = \frac{2\zeta w_n s + w_n^2}{w_n^2 + 2\zeta w_n s + s^2}$$

$$G(s) = \frac{s^2}{w_n^2 + 2\zeta w_n s + s^2}$$

# PLL

## Modelo lineal en tiempo continuo de segundo orden

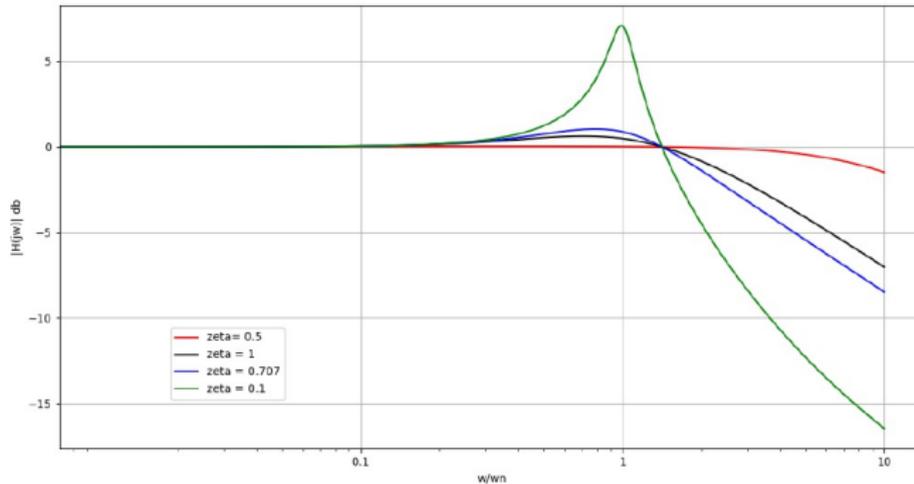
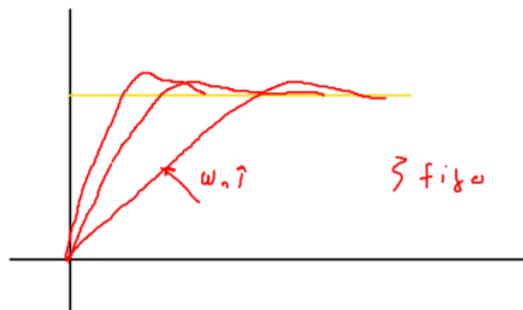


FIGURE – Respuesta en frecuencia de la transferencia  $H(s)$







# Sincronización en fase y frecuencia

## PLL en tiempo discreto

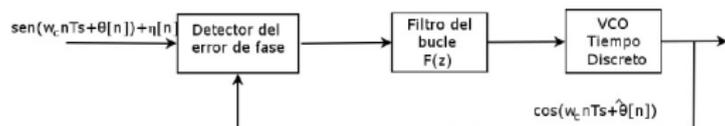


FIGURE – Esquema general de PLL en tiempo discreto

El detector de error de fase :  $g(e[n]) + \nu[n]$  ,  $e[n] = \theta[n] - \hat{\theta}[n]$ . VCO también denominado DDS en tiempo discreto. La señal de entrada al DSS  $c[n]$  y la fase del DSS  $\hat{\theta}[n]$  estará dada por la siguiente ecuación :

$$\hat{\theta}[n + 1] = \hat{\theta}[n] + k_0 c[n] , c[n] = \frac{\hat{\theta}[n + 1] - \hat{\theta}[n]}{k_0}$$

donde  $k_0$  es el paso de actualización.  $c[n]$  puede verse como una derivada en tiempo discreto de  $\hat{\theta}[n]$ .

# Sincronización en fase y frecuencia

## PLL en tiempo discreto

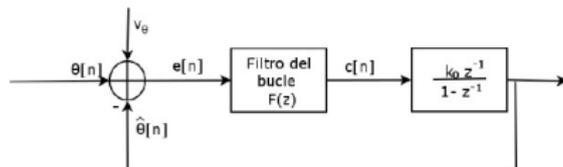


FIGURE – Modelo de PLL en tiempo discreto linealizado

$$\frac{\hat{\Theta}(z)}{C(z)} = k_0 \frac{1}{z-1} = k_0 \frac{z^{-1}}{1-z^{-1}}, \quad H(z) = \frac{\hat{\Theta}(z)}{\Theta(z)} = \frac{k_0 F(z)}{k_0 F(z) + z - 1}$$

$$G(z) = \frac{E(z)}{\Theta(z)} = \frac{z-1}{k_0 F(z) + z - 1}, \quad e_\infty = \lim_{z \rightarrow 1} (z-1)E(z) = \Theta(z) \frac{(z-1)^2}{k_0 F(z) + z - 1}$$

Ejercicio : PLL de primer y segundo orden en tiempo discreto

# Sincronización en fase y frecuencia

## Costas Loop

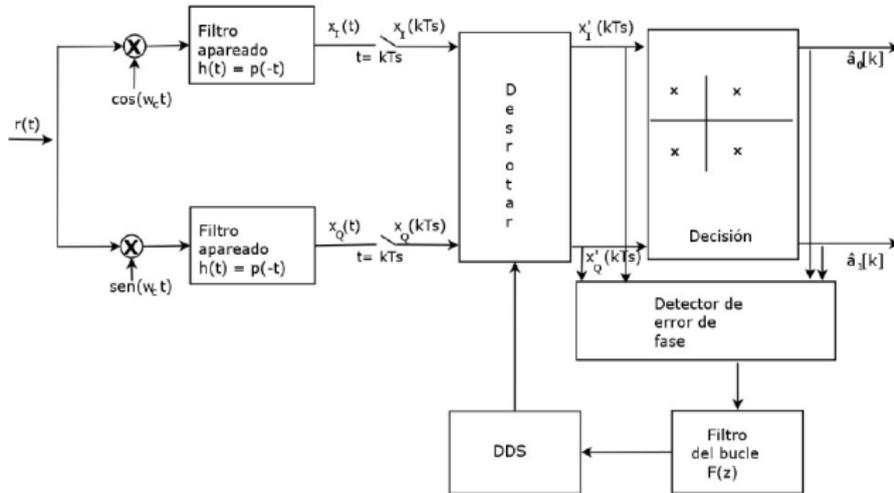
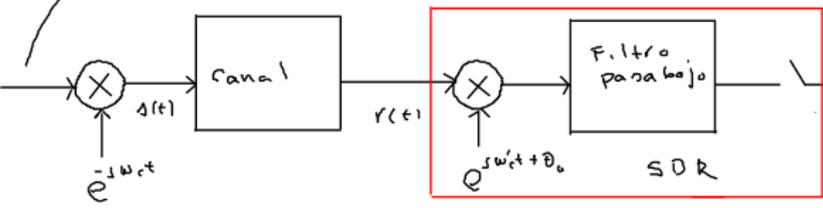
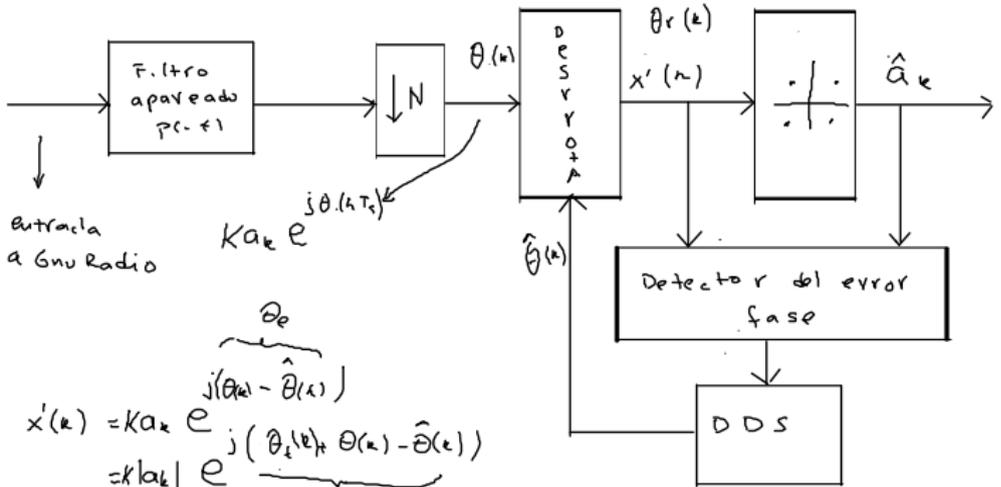


FIGURE – Esquema general de Costas Loop

$a_k p(t)$  Miro un simbolo  $a_k = a_{k0} + j a_{k1} = |a_k| e^{j\theta}$



$\theta_c(t)$ : engloba canal y errores frecuencia y fase  
 $p(nT)$   
 $\hookrightarrow N$  muestras x simbolo



$$x'(k) = Ka_k e^{j(\theta_k - \hat{\theta}(k))}$$

$$= k|a_k| e^{j(\theta_c(kT_c) + \theta(k) - \hat{\theta}(k))}$$

$\theta_r(t)$





# Sincronización en fase y frecuencia

## Costas Loop

$$e[k] = \arg \frac{x'_Q[k]}{x'_I[k]} - \arg \frac{\hat{a}_1[k]}{\hat{a}_0[k]} \quad (6)$$

se puede aproximar el error por la función seno del error :

$$g(e[k]) = \sin(e[k]) = \sin(\theta_r[k] - \theta_t[k]) = \sin(\theta_r[k]) \cos(\theta_t[k]) - \cos(\theta_r[k]) \sin(\theta_t[k])$$

$$g(e[k]) = \frac{x'_Q(kT_s)a_0[k] - x'_I(kT_s)a_1[k]}{\sqrt{x'_I(kT_s)^2 + x'_Q(kT_s)^2} \sqrt{a_0[k]^2 + a_1[k]^2}} \quad (7)$$

$$g(e[k]) = x'_Q(kT_s)a_0[k] - x'_I(kT_s)a_1[k] \quad (8)$$

y si no se cuenta con los símbolos enviados :

$$g(e[k]) = x'_Q(kT_s)\hat{a}_0[k] - x'_I(kT_s)\hat{a}_1[k] \quad (9)$$

# Sincronización en fase y frecuencia

## Costas Loop

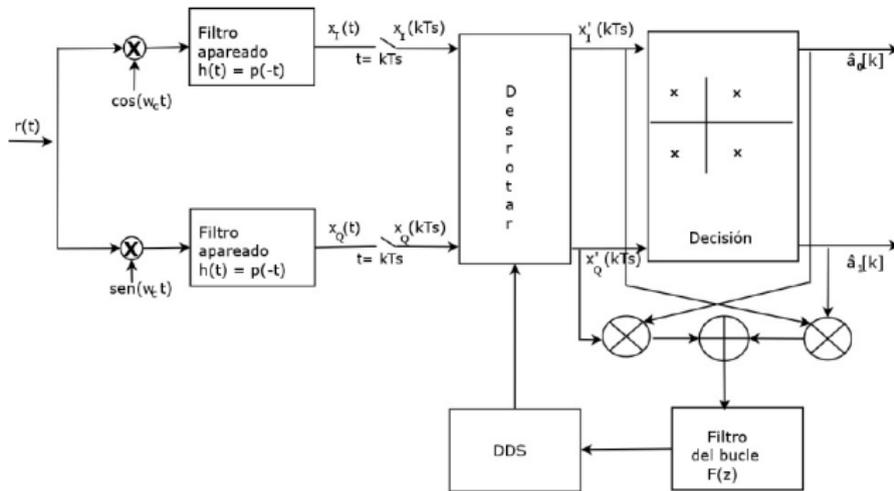


FIGURE – Costas Loop para QPSK

## Sincronización en fase y frecuencia estimador de máxima verosimilitud

Problema : estimación de los parámetros desconocidos del sistema ( el retardo  $\tau$  y la diferencia de fase  $\phi$  y otros que se deseen). Se denominará  $\theta = (\tau, \phi)$ .

$$r_b(t) = s_b(t, \theta) + \eta(t)$$

donde  $\eta(t)$  se asume que es ruido blanco gaussiano y  $s_b(t, \theta)$  es la señal que se envió en banda base más las modificaciones sufridas por el retardo del canal y la diferencia de fase, es decir :

$$s_b(t, \theta) = \sum_k a[k] p((t - kT_s) - \tau) e^{j\phi}$$

Luego de muestrear la señal en el receptor cada tiempo  $T$  se obtiene :

$$r_b(kT) = s_b(kT, \theta) + \eta(kT)$$

# Sincronización en fase y frecuencia

## Máxima verosimilitud

Se tienen  $L_0$  muestras. Las muestras del ruido son independientes. La función de verosimilitud de que se reciba la señal  $r$  dado que se envió  $\mathbf{s}_b(\theta)$

$$f(\mathbf{r}/\theta) = \left( \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_w^2}} \right)^{L_0} e^{-\frac{\sum_{k=0}^{L_0-1} (r_b(kT) - s_b(kT, \theta))^2}{2\sigma_w^2}} \quad (10)$$

Habitualmente se maximiza el logaritmo de esta función, la cual luego de eliminar los términos que no dependen de  $\theta$  se puede escribir como :

$$\Lambda(\mathbf{r}_b/\theta) = 2 \sum_{k=0}^{L_0-1} \text{Re} [r_b(kT) s_b^*(kT, \theta)] - \sum_{k=0}^{L_0-1} |s_b(kT, \theta)|^2$$

$$s_b(kT, \theta) = \sum_i a[i] p((kT - iT_s) - \tau) e^{j\phi}$$

## Sincronización en fase y frecuencia

### Máxima verosimilitud

El objetivo es :

$$\max_{\theta} \Lambda(\mathbf{r}_b / \theta)$$

$$\frac{\partial \Lambda}{\partial \theta} = \sum_i \mathcal{R}_e \left( q^*(i) x'(i, \theta) \right) \Rightarrow \text{error} : \sum_i q_o(i) x'_q(i, \hat{\theta}) - q_i(i) x'_i(i, \hat{\theta}) = 0$$

s: sustituyo  $x'(i) \in e^{-j\theta}$

$$\Rightarrow \hat{\phi} = \arg \left\{ \sum_{i=0}^{L_0/N-1} a[i]^* x(iT_s - \tau) \right\} \quad (7.41)$$

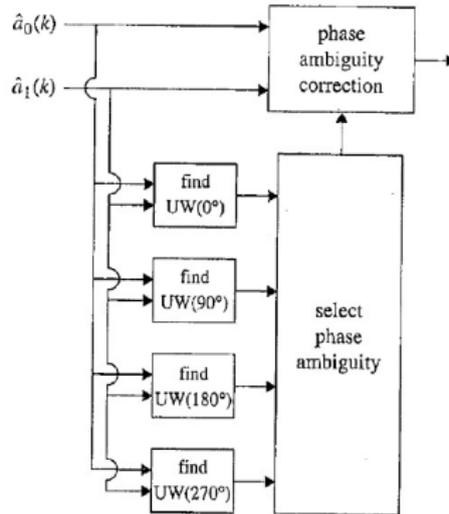
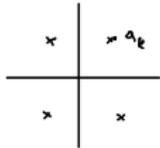
En el caso de una sistema con modulación MQAM, si se denomina  $x_I(iT_s - \tau)$  a la componente en fase de  $x(iT_s - \tau)$  y  $x_Q(iT_s - \tau)$  a su componente en cuadratura y  $a_0[i]$  a la parte real de  $a[i]$  y  $a_1[i]$  a su parte imaginaria entonces:

$$\hat{\phi} = \arg \left\{ \sum_{i=0}^{L_0/N-1} a[i]^* x(iT_s - \tau) \right\} = \frac{\sum_{i=0}^{L_0/N-1} a_0[i] x_Q(iT_s - \tau) - a_1[i] x_I(iT_s - \tau)}{\sum_{i=0}^{L_0/N-1} a_0[i] x_I(iT_s - \tau) + a_1[i] x_Q(iT_s - \tau)} \quad (7.42)$$

# Sincronización en fase y frecuencia

## Ambigüedad en la fase

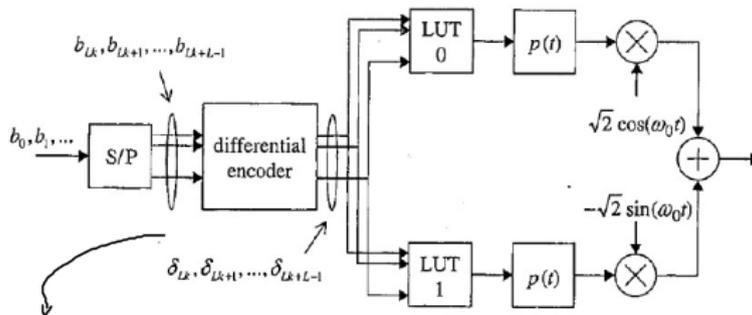
Dos soluciones posibles. 1. Palabra única.



# Sincronización en fase y frecuencia

## Ambigüedad en la fase

### 1. Codificación Diferencial



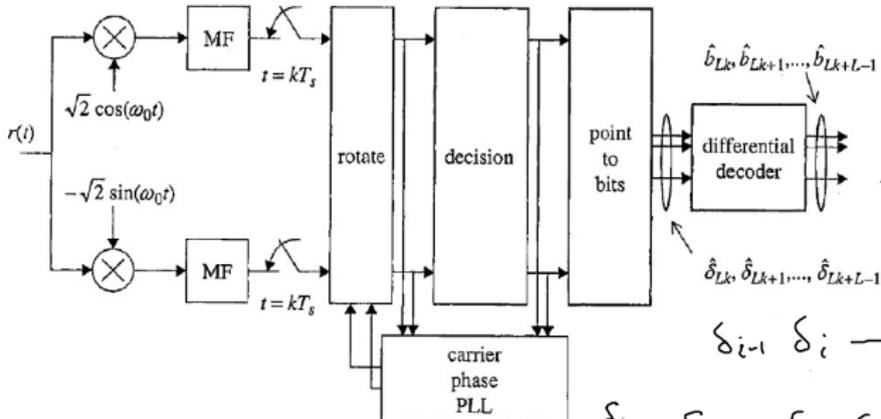
bpsk :  $b_i \delta_{i-1} \rightarrow \delta_i$

QPSK :  $b_{2i} b_{2i+1} \delta_{2i-1} \delta_{2i-2} \rightarrow \delta_{2i} \delta_{2i+1}$

# Sincronización en fase y frecuencia

## Ambigüedad en la fase

### Decodificador Diferencial



$\delta_{i-1} \delta_i \rightarrow b_i$  BPSK  
 $\delta_{2i-2} \delta_{2i-1} \delta_{2i} \delta_{2i+1} \rightarrow b_{2i} b_{2i+1}$   
 QPSK

