

Control de monitoreo 1

Ejercicio 1 (Kleinberg & Tardos, Capítulo 1, Ejercicio resuelto 2). Consideramos una generalización del problema de emparejamiento estable entre un conjunto M y un conjunto W , ambos de tamaño n , en la cual existe un conjunto F de parejas *prohibidas*, $F \subset M \times W$, que no son admisibles en la solución. En esta versión del problema, la noción de *inestabilidad* debe definirse de manera diferente al caso usual; en particular un emparejamiento estable puede no ser perfecto. La figura 1.1 presenta una adaptación del algoritmo de Gale-Shapley para solucionar este problema (**potencialmente defectuosa**).

```
1 Marcar  $p$  como libre para todo  $p \in M \cup W$ 
2 while Existe algún par de  $(M \times W) \setminus F$  que aún no fue propuesto do
3   Tomamos  $w \in W$  de mayor preferencia para  $m$ , con  $(m, w) \notin F$ ,
   tal que  $m$  aún no se propuso a  $w$ 
4   if  $w$  está libre then
5     emparejar  $m$  con  $w$ 
6   else if  $w$  prefiere  $m$  a su actual pareja  $m'$  then
7     formar una nueva pareja
8 end
```

Figura 1.1: Generalización potencialmente defectuosa del algoritmo de Gale-Shapley para el caso en que existen parejas prohibidas.

Sea S el emparejamiento que produce este algoritmo para una determinada instancia de este problema. Queremos probar la siguiente proposición con respecto al algoritmo, para lo cual consideramos la demostración a continuación (**potencialmente defectuosa**).

Proposición. No existen $m, m' \in M$, $w \in W$, tales que $(m, w) \in S$, w prefiere a m' antes que m , $(m', w) \notin F$ y m' no forma ninguna pareja en S .

Demostración. Supongamos que la tesis no es cierta, es decir, que sí existen m, m' , y w en las condiciones descritas. En algún momento m' se tiene que haber propuesto a w (de lo contrario

no se habría terminado el ciclo del paso 2). En ese momento, w debería haber dejado a m para formar pareja con m' , ya que prefiere a m' . Esto contradice el hecho de que m es la pareja final de w .

- (a) Analice la corrección del algoritmo de la figura 1.1. Indique (si los hay) aspectos no definidos, ambigüedades, errores, u otros defectos que pueda identificar. Explique cómo los corregiría.

Atención: No reescriba completamente un algoritmo diferente, corrija el de la figura.

- (b) Analice la demostración considerada para la proposición anterior. Indique (si los hay) los defectos que pueda identificar. Explique cómo los solucionaría.