Resumen de la semana 3

Ecuaciones diferenciales

4 de septiembre de 2020

¡Es tiempo de otro resumen semanal! ¿Qué pasó esta semana en el curso? Los videos teóricos de resumen de Laplace están completos, podés encontrarlos acá y también los de ecuaciones autónomas con matrices diagonales, que podés encontrar acá. Además, en este video pueden encontrar una motivación a este tema. ¿Ya hiciste el cuestionario de autoevaluación? Está bueno para ver si entendiste el tema.

En las clases de práctico concluimos con el práctico 2, mientras que en el teórico terminamos de explicar la transformada de Laplace y empezamos con ecuaciones autónomas en varias variables.

1. La transformada de Laplace

Como vimos durante esta semana, la transformada de una función f se define como

$$\mathcal{L}f(s) = \int_0^\infty f(t)e^{-st}dt$$

Recuerden que, como los valores $f(t)$ con $t < 0$ no forman parte de la definición, por convención consideramos que $f(t) = 0$ para todo $t < 0$.

Lo primero que hicimos fue probar algunas propiedades:

1. *(Traslación en frecuencia)* $\mathcal{L}[f(t)e^{\alpha t}] = \mathcal{L}f(s-\alpha)$
2. *(Traslación en el tiempo)* $\mathcal{L}[f(t-a)] = \mathcal{L}f(s)e^{-as}$
3. *(T. de Laplace de la derivada)* $\mathcal{L}[f'(t)](s) = s\mathcal{L}f(s) - f(0)$
4. *(Derivada de la transformada de Laplace)* $\mathcal{L}[f]'(s) = \mathcal{L}[-tf(t)](s)$
5. Si f y g son continuas en $[0,\infty)$ y $\mathcal{L}f = \mathcal{L}g$ entonces $f(t) = g(t)$ para todo $t \geq 0$

Estas propiedades nos permitieron calcular la transformada de Laplace de algunas funciones simples (ver práctico 2, ejercicio 3 o página final de las notas de teórico).

La propiedad 3 es especialmente importante porque dada una ecuación diferencial, aplicando la transformada de Laplace de los dos lados, podemos convertirla en una ecuación polinomial. La propiedad 5 nos asegura que podemos "invertir" la transformada.

Un ejemplo

Supongamos que queremos resolver el siguiente PVI:

$$\begin{cases} f'' - f' - 6f = e^{3t} \\ f(0) = f'(0) = 0 \end{cases}$$

Podemos entonces aplicar la transformada de Laplace de los dos lados de la igualdad, y, por linealidad, tenemos que

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}f'' - \mathcal{L}f' - 6\mathcal{L}[f] &= \mathcal{L}[e^{3t}] \\
s^2\mathcal{L}f - sf(0) - f'(0) - s\mathcal{L}f + f(0) - 6\mathcal{L}f &= \frac{1}{s-3} \\
(s^2 - s - 6)\mathcal{L}f &= \frac{1}{s-3} \\
\mathcal{L}f(s) &= \frac{1}{(s-3)(s^2-s-6)} \\
\mathcal{L}f(s) &= \frac{1}{(s-3)^2(s+2)}
\end{aligned}$$

donde en rojo usamos la propiedad 3 dos veces y en mostaza una vez. Descomponiendo en fracciones simples e invirtiendo la transformada (usando la propiedad 5), tenemos que

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}f(s) &= \frac{-1}{25}\frac{1}{s-3} + \frac{1}{5}\frac{1}{(s-3)^2} + \frac{1}{25}\frac{1}{s+2} \\
f(t) &= \frac{-1}{25}e^{3t} + \frac{1}{5}te^{3t} + \frac{1}{25}e^{-2t}
\end{aligned}$$

donde en azul usamos la propiedad 1 y en violeta usamos la propiedad 4. Como ejercicio pueden intentar resolver esta ecuación diferencial calculando la homogénea y encontrando una particular (¡van a ver que les va a llevar muchas más cuentas!).

2. Ecuaciones autónomas

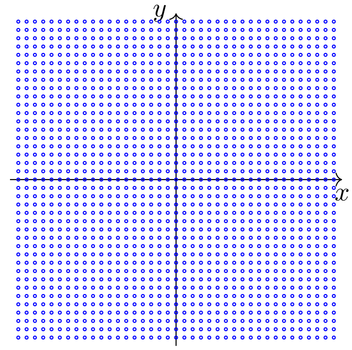
En esta parte no vamos a trabajar con funciones de $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, sino que vamos a trabajar con funciones de $\mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$. La idea es intentar entender (y resolver) ecuaciones de la forma

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

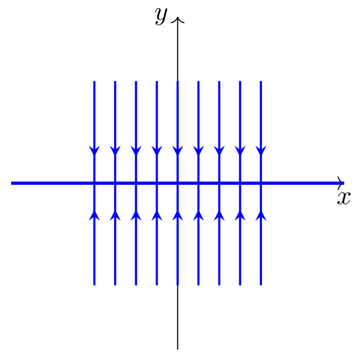
o, en su forma más compacta, $\dot{X} = AX$. Es importante notar que esto se puede pensar como un **sistema de ecuaciones diferenciales**, en el que tenemos dos incógnitas, $x(t)$ e $y(t)$.

En esta oportunidad vamos a trabajar con matrices diagonales, si bien ponemos ejemplos con valores determinados, estos son todos los tipos de diagrama de fase que se pueden dar: un valor propio 0, valores propios de signos iguales y valores propios de signos opuestos.

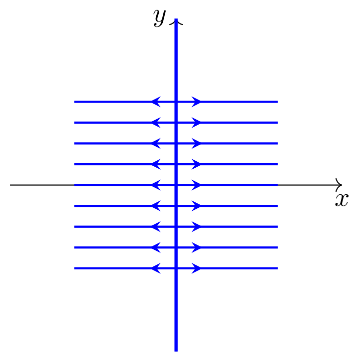
$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ $\quad \begin{cases} \dot{x} = 0 \\ \dot{y} = 0 \end{cases}$



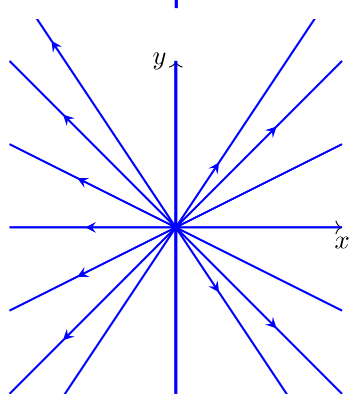
$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ $\quad \begin{cases} \dot{x} = 0 \\ \dot{y} = -y \end{cases}$



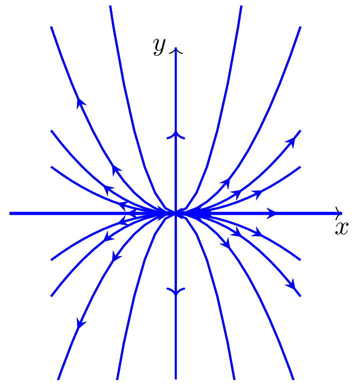
$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ $\quad \begin{cases} \dot{x} = x \\ \dot{y} = 0 \end{cases}$



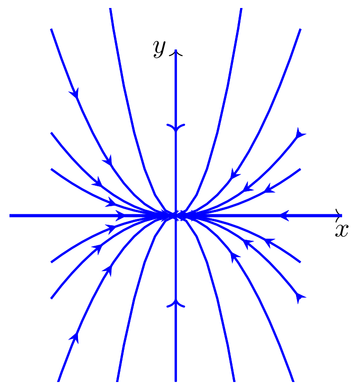
$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ $\quad \begin{cases} \dot{x} = x \\ \dot{y} = y \end{cases}$



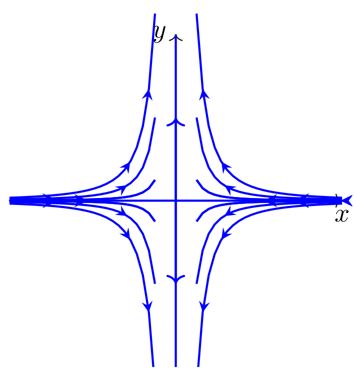
$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \qquad \begin{cases} \dot{x} = x \\ \dot{y} = 2y \end{cases}$$



$$\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} \qquad \begin{cases} \dot{x} = -x \\ \dot{y} = -2y \end{cases}$$



$$\begin{pmatrix} -3 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} \qquad \begin{cases} \dot{x} = -3x \\ \dot{y} = 4y \end{cases}$$



$$\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & -4 \end{pmatrix} \qquad \begin{cases} \dot{x} = 3x \\ \dot{y} = -4y \end{cases}$$