

### Práctico 3 - Sucesiones

1. Estudiar monotonía, acotación y convergencia de las siguientes sucesiones  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ , donde:

$$a) \ a_n = 1 + \frac{1}{n} \quad b) \ a_n = 1 + \frac{(-1)^n}{n} \quad c) \ a_n = n + \frac{1}{n} \quad d) \ a_n = \frac{n}{\sqrt{n^2 + 1}} \quad e) \ a_n = \frac{n^2}{2^n}$$

2. Sean  $a_n$  y  $b_n$  dos sucesiones reales convergentes tal que  $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = A$  y  $\lim_{n \rightarrow +\infty} b_n = B$ .

a) Probar que la sucesión  $c_n = a_n + b_n$  es convergente y  $\lim_{n \rightarrow +\infty} c_n = A + B$

b) Sea  $\lambda \in \mathbb{R}$ , probar que la sucesión  $\tilde{a}_n = \lambda a_n$  converge y  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \tilde{a}_n = \lambda A$

c) Probar que la sucesión  $d_n = a_n b_n$  converge y  $\lim_{n \rightarrow +\infty} d_n = AB$

d) Sea  $e_n$  una sucesión acotada y suponga que  $A = 0$ , probar que  $\lim_{n \rightarrow +\infty} e_n a_n = 0$

3. Encontrar los límites de las sucesiones  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ , donde

$$a) \ a_n = \frac{\cos(n)}{n} \quad b) \ a_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n} \quad c) \ a_n = \frac{2n-5}{n+3-5^{1/n}} \quad d) \ a_n = \sqrt[n]{\alpha^n + \beta^n} \ \alpha, \beta \in \mathbb{R}^+$$

$$e) \ a_n = \operatorname{sen}\left(\frac{1}{n}\right)\cos(n) \quad f) \ a_n = \frac{n^\alpha}{e^n}, \ \alpha \in \mathbb{R} \quad g) \ a_n = \frac{3^n + (-2)^n}{3^{n+1} + (-2)^{n+1}}$$

4. Las siguientes sucesiones son convergentes ( $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = L$ ), es decir que dado  $\varepsilon > 0$  existe  $n_0 \in \mathbb{N}$  (que depende de  $\varepsilon > 0$ ) tal que  $\forall n \geq n_0, |a_n - L| < \varepsilon$ . Determinar en cada caso el primer valor de  $n_0$  que corresponde a los siguientes valores de  $\varepsilon$ : 1; 0,1; 0,01.

$$a) \ a_n = \frac{1}{n} \quad b) \ a_n = \frac{n}{n+1} \quad c) \ a_n = \frac{(-1)^n}{n} \quad d) \ a_n = \frac{1}{n!} \quad e) \ a_n = \frac{2n}{n^3+1}$$

5. Estudiar los límites de las siguientes sucesiones. ¿Existen subsucesiones convergentes? Indicar los límites de las subsucesiones convergentes.

$$a) \ a_n = \frac{1 + (-1)^n}{2} \quad b) \ a_n = (-1)^n n \quad c) \ a_n = 3^{\cos(n\pi)} \quad d) \ a_n = \frac{n-1}{n+1} \cos \frac{2n\pi}{3}$$

$$e) \ a_n = n^2 (1 + (-1)^n) \quad f) \ a_n = n^{(-1)^n} \quad g) \ a_n = \frac{(-1)^n}{n} + \frac{1 + (-1)^n}{2}$$

6. Un punto se llama *de aglomeración* de una sucesión si existe una subsucesión que converge a este punto.

a) Dar un ejemplo de una sucesión cuyos puntos de aglomeración sean 1, 2, 3 y 4.

b) Dar un ejemplo de una sucesión cuyos puntos de aglomeración sean todos los naturales.

c) ¿Existe alguna sucesión cuyos puntos de aglomeración sean *exactamente* los del conjunto  $A = \{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\}$ ?

7. Sea  $a_n$  una sucesión tal que sus subsucesiones  $a_{2n}$ ,  $a_{2n+1}$  y  $a_{3n}$  convergen. Probar que  $a_n$  es convergente.

8. Sea  $A$  un subconjunto de números reales no vacío y acotado superiormente. Demostrar que  $L = \sup(A)$  si y solo si:

a)  $L \geq x, \forall x \in A$ .

b) Existe  $\{x_m\}$  una sucesión de  $A$  tal que  $\lim_{m \rightarrow +\infty} x_m = L$

9. Sea  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  una función. Probar que  $f$  está acotada si y solamente si para toda sucesión  $a_n$ , la sucesión  $b_n = f(a_n)$  está acotada.
10. Probar que si  $a_n$  converge a 0, entonces existe  $n_0 \in \mathbb{N}$  tal que  $a_n^2 < |a_n|$  para todo  $n \geq n_0$ .
11. Probar que si  $a_n$  converge a  $\alpha \in \mathbb{R}$  y  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  es continua en  $\alpha$ , entonces  $b_n = f(a_n)$  converge a  $f(\alpha)$ .

## Ejercicios Complementarios

1. Sea la sucesión definida por  $a_1 = 3$  y la siguiente recurrencia:

$$a_{n+1} = \frac{3(1 + a_n)}{3 + a_n}.$$

- a) Demostrar que  $a_n \geq 0$  y que  $a_n \leq 3, \forall n \geq 1$
- b) Demostrar que  $a_{n+1} \leq a_n, \forall n \geq 1$ .
- c) Deducir que  $a_n$  tiene límite, y calcularlo.
2. Considere la sucesión  $\sqrt{2}, \sqrt{2 + \sqrt{2}}, \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2}}}, \dots$
- a) Exprese la sucesión como una sucesión definida por recurrencia.
- b) Estudie las propiedades de monotonía y acotación, y calcule el límite de la sucesión.
3. Determinar si las siguientes sucesiones convergen, y en caso de convergencia calcular su límite.
- a)  $a_n = \frac{\alpha(n)}{n}$  donde  $\alpha(n)$  es la cantidad de números primos que dividen a  $n$
- b)  $b_N = \frac{\#\{n \in \mathbb{N} : n \leq N \text{ y } n \text{ es un cuadrado perfecto}\}}{N}$
4. a) Escribir la negación de acotación de una función.
- b) Demostrar que si una función  $f$  no está acotada, se puede encontrar una sucesión  $a_n$  en el dominio de  $f$  tal que  $f(a_n) \rightarrow \infty$ .
- c) Si ahora el dominio de la función es  $[a, b]$ , ¿qué se puede decir sobre la sucesión  $a_n$  construida en el ítem anterior?
- d) Si ahora además la función es continua, estudiar qué sucede con las imágenes de alguna subsucesión conveniente, y concluir que la función no puede ser no acotada.