Resumen Semana 2

1. **Variables separables** En la primera semana trabajamos principalmente con ecuaciones lineales. Sin embargo, también podemos hallar la solución general de otro tipo de ecuaciones.

   a) **Definición** Un ejemplo de esto son las ecuaciones de **variables separables**, estas son ecuaciones diferenciales que podemos expresar de la forma

   $$y' = f(y)g(x)$$

   b) **Metodo de Resolución** Para resolver estas ecuaciones pasamos dividiendo f obteniendo la expresión

   $$\frac{y'}{f(y)} = g(x)$$

   e, integrando de los dos lados,

   $$\int \frac{y(x)'}{f(y(x))} = \int g(x)$$

   luego, realizando el cambio de variable $y = y(x), dy = y'(x)dx$ tenemos que si G es una primitiva de g y F es una primitiva de $1/f$, entonces

   $$F(y(x)) = G(x) + C$$

   donde G es una primitiva de g. Si F es una primitiva de f. Luego, si F es invertible podemos hallar la solución a la ecuación diferencial escribiendo

   $$y(x) = F^{-1}(G(x) + C)$$

   c) **Ejemplo**

   La ecuación

   $$y' = \frac{1}{xy}$$

   es de variables separables, en este caso $g(x) = x$ y $f(y) = 1/y$.

   Para resolver, despejamos e integramos obteniendo la siguiente igualdad:

   $$\int yy'dx = \int 1/x$$

   Esto nos dice que

   $$y(x)^2/2 = log(|x|) + C$$

   Tomando raíz cuadrada obtenemos que

   $$y(x) = \pm\sqrt{2log|x| + K},$$

   con $K = 2C$ una constante cualquiera. Una pregunta que está bueno cuestionarse es: *¿para qué valores de x esta solución está bien definida?*.

2. **Transformada de Laplace**

   Cuando hablamos de una *transformada* hablamos de una función que devuelve funciones. Se puede pensar como una caja negra que recibe una función y devuelve otra.

a) **Definición** La transformada de Laplace de una función continua a trozos $f : [0, \infty) \to \mathbb{R}$ es

$$\mathcal{L}[f](s) = \int_0^\infty f(t)e^{-st}dt$$

cuando esta es convergente.

b) **Observación**

Si

$$\int_0^\infty f(t)e^{-\alpha t}dt$$

converge entonces $\mathcal{L}[f](s)$ está bien definida para todo $s > \alpha$. Esta transformada cumple varias propiedades interesantes de las que hablaremos la semana que viene.

c) **Observación**

Si pedimos que las funciones sean continuas se puede probar que la transformada de Laplace es invertible (es decir que podemos recuperar la función original luego de aplicar la transformada), por lo que nos puede ayudar a resolver ecuaciones diferenciales por medio de aplicar la transformada a una ecuación y luego aplicar su inversa. La semana que viene nos vamos a dedicar a trabajar con esta construcción