Vectores y matrices

1. Definiciones

1.1. Vector

Se llama vector *v* de tamaño *n* de entradas v_i a un ordenamiento lineal de números

$$v = (v_1 \quad v_2 \quad \dots \quad v_n)$$

Notación: En el vector *v* con entradas v_i el índice *i* indica la posición en el vector.

1.2. Matriz

Una definición intuitiva es: Se llama matriz A de *m* filas por *n* columnas (*m* × *n*) de entradas a_{ij} a un ordenamiento rectangular de números

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & & a_{2n} \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

Notación: En general en la matriz A con entradas a_{ij}, el primer índice indica la posición en la fila y el segundo la columna a la que pertenece la entrada.

El conjunto de todas las matrices *m* × *n* lo indicaremos como $\mathcal{M}_{m\times n}$.

Llamaremos matriz columna (fila) a una matriz $X \in \mathcal{M}_{m\times 1}$ ($\mathcal{M}_{1\times n}$).[1] Otro nombre que podemos darle es vector (fila) a la matriz fila, y vector columna a la matriz columna.

Diremos que dos matrices son iguales si tienen el mismo tamaño y las mismas entradas en las mismas posiciones. Dicho de otro modo, si A y B son dos matrices *m*×*n* entonces $A = B \Leftrightarrow a_{ij} = b_{ij}\ \forall\, i = 1, \dots, m, j = 1, \dots, n.$[2]

1.3. Matriz identidad

Llamaremos matriz identidad de tamaño *n* a la matriz de *n*×*n*

$$I_n = \begin{pmatrix} 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$$

Donde cada entrada i_{ij} cumple que: $\begin{cases} 1 \; si \; i = j \\ 0 \; si \; i \neq j \end{cases}$

Proposición 1.1: $I_n . A = A . I_n = A, \forall\, A \in \mathcal{M}_{nxn}$

1.4. Inversa de una matriz

Sea *A* una matriz *n*×*n*. Diremos que la matriz *A* es invertible si y solo si existe *B* matriz *n*×*n* tal que $A.B = I_n$ y $B.A = I_n$ donde I_n es la matriz identidad *n*×*n*. A la matriz *B* se le llama la inversa de *A* y se utiliza la notación $B = A^{-1}$.

---

[1] El símbolo ∈ significa *pertenece a*.
[2] El símbolo ∀ significa *para todo*, y el símbolo ⇔ significa *si y solo sí*.

2. Operaciones básicas

2.1. Suma

Sean A y B dos matrices $m{\times}n$, se define la suma $+: \mathcal{M}_{m\times n} \times \mathcal{M}_{m\times n} \rightarrow \mathcal{M}_{m\times n}$ de modo que $A + B = C$ donde $c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$. Es decir, el valor de cada posición de la matriz suma se calcula como la suma de los elementos de la misma posición de las matrices de entrada.

Ejemplos:

$$(1 \quad -2 \quad 3 \quad 0 \quad -2) + (1 \quad 1 \quad -0{,}5 \quad 2 \quad 3) = (2 \quad -1 \quad -2{,}5 \quad 2 \quad 1)$$

Observación: La suma de vectores se puede ver como un caso particular de suma de matrices.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0{,}5 \\ 3 & -2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 0{,}5 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

Propiedades:

- Conmutativa: $A + B = B + A, \forall\, A, B \in \mathcal{M}_{mxn}$.
- Asociativa: $(A + B) + Z = A + (B + Z), \forall\, A, B, Z \in \mathcal{M}_{mxn}$.
- Neutro de la suma: Existe $O \in \mathcal{M}_{mxn}$ tal que $A + O = O + A = A, \forall\, A \in \mathcal{M}_{mxn}$.
- Existencia de opuesto: Para cada $A, B \in \mathcal{M}_{mxn}$ existe $B \in \mathcal{M}_{mxn}$ tal que $A + B = 0$ (Notación: $B = -A$).

2.2. Producto de número por matriz

Sea λ ∈ R un número y $A \in \mathcal{M}_{m\times n}$ una matriz se define el producto de λ por A como $\lambda \cdot A = B$ donde $b_{ij} = \lambda a_{ij}$. Es decir, se debe multiplicar independientemente el valor de cada una de las posiciones de la matriz por el número.

Ejemplos:

$$5 \cdot (1 \quad 3 \quad -2) = (5 * 1 \quad 5 * 3 \quad 5 * (-2)) = (5 \quad 15 \quad -10)$$

Observación: La multiplicación de un vector por un número se puede ver como un caso particular del producto de un número por una matriz.

$$2 \cdot \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 * 2 & 2 * 0 \\ 2 * (-1) & 2 * 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ -2 & 6 \end{pmatrix}$$

Propiedades:

- Asociativa del producto: $(\alpha\beta)A = \alpha(\beta A), \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$ y $A \in \mathcal{M}_{mxn}$.
- Neutro del producto: $1.A = A, \forall\, A \in \mathcal{M}_{mxn}$.
- Distributiva: $(\alpha + \beta)A = \alpha A + \beta A, \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$ y $A \in \mathcal{M}_{mxn}$.
- Distributiva: $\alpha(A + B) = \alpha A + \alpha B, \forall \alpha \in \mathbb{R}$ y $\forall\, A, B \in \mathcal{M}_{mxn}$.

2.3. Producto entre matrices

Sea $A \in \mathcal{M}_{mxp}$ y $B \in \mathcal{M}_{pxn}$ se define el producto entre matrices como $\cdot: \mathcal{M}_{m\times p} \times \mathcal{M}_{p\times n} \rightarrow \mathcal{M}_{m\times n}$ de modo que $A \cdot B = C$, donde $c_{ij} = \sum_{h=1}^{p} a_{ih} b_{hj}$.

Ejemplos:

$$\begin{pmatrix}3 & 2 & -1\end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix}3 \\ 2 \\ -1\end{pmatrix} = \big(3 * 3 + 2 * 2 + (-1) * (-1)\big) = (14)$$

Observación: La multiplicación de un vector fila por un vector columna se puede pensar como un caso particular del producto entre matrices.

$$\begin{pmatrix}1 & 2 & -1 \\ 3 & -2 & 0\end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix}2 & 0 \\ -1 & 3 \\ 4 & -3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1 * 2 + 2 * (-1) + (-1) * 4 & 1 * 0 + 2 * 3 + (-1) * (-3) \\ 3 * 2 + (-2) * (-1) + 0 * 4 & 3 * 0 + (-2) * 3 + 0 * (-3)\end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix}-4 & 9 \\ 8 & -6\end{pmatrix}$$

2.4. Matriz traspuesta

Sea *A* una matriz *n×m*, se define la matriz traspuesta de *A* como la matriz *m×n At*, con $at_{ij} = a_{ji}$.

Ejemplo:

$$\text{Transpuesta}\left[\begin{pmatrix}-2 & 0 \\ 1 & 0{,}5 \\ 3 & -4\end{pmatrix}\right] = \begin{pmatrix}-2 & 1 & 3 \\ 0 & 0{,}5 & -4\end{pmatrix}$$

$$\text{Transpuesta}\left[\begin{pmatrix}-2 \\ 1 \\ 3\end{pmatrix}\right] = \begin{pmatrix}-2 & 1 & 3\end{pmatrix}$$

Observación: La transpuesta de un vector columna es un vector (fila).

3. Bibliografía

Resumen extraído de *Geometría y Algebra Lineal I*, Instituto de Matemática y Estadística “Prof. Rafael Laguardia”, Facultad de ingeniería, Universidad de la República.