

## Práctico 1 - Números complejos.

- Determinar los valores de  $i^k$  para todo  $k$  entero.
- Expresar los siguientes números complejos en forma binómica ( $a + bi$  con  $a, b$  reales) y en notación polar ( $re^{i\theta}$  con  $r > 0$  y  $\theta$  real).

a)  $(1+i)^2$     b)  $\frac{1}{i}$     c)  $\frac{1}{1+i}$     d)  $(2+3i)(3-4i)$     e)  $(1+i)(1-2i)$     f)  $i^5 + i^{16}$

g)  $-1$     h)  $-3i$     i)  $1+i+i^2+i^3$     j)  $\frac{1}{2}(1+i)(1-i^{-8})$     k)  $\frac{1+i}{\sqrt{2}}$     l)  $\frac{1}{(1+i)^2}$

- Expresar en notación binómica:

a)  $e^{i\frac{\pi}{2}}$     b)  $3e^{\pi i}$     c)  $\frac{1-e^{\frac{\pi}{2}i}}{1+e^{\frac{\pi}{2}i}}$     d)  $(i+1)^{100}$

- Probar que para todo par de números complejos  $z_1$  y  $z_2$

a)  $|z_1| = |\bar{z}_1|$     b)  $|z_1 z_2| = |z_1| |z_2|$     c)  $|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|$     d) si  $z_1 \neq 0$   $\left| \frac{1}{z_1} \right| = \frac{1}{|z_1|}$

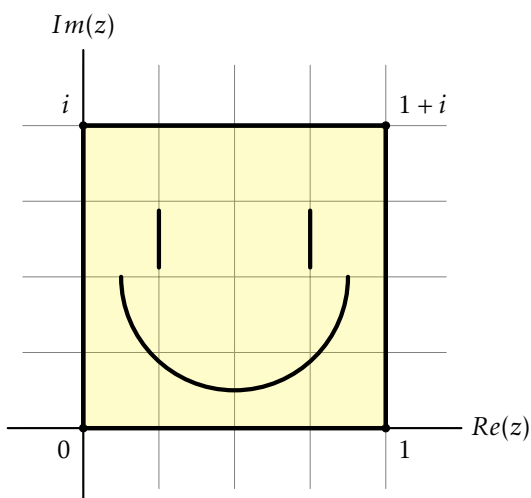
- Representar geoméricamente los complejos:

- $(1+i)^n - (1-i)^n$  para algunos valores naturales  $n$ .
- Las raíces quintas de 1 (es decir, los complejos  $z$  tales que  $z^5 = 1$ ).
- Las raíces décimas de 1.
- Los complejos  $z$  tales que  $z^6 = 8(\sqrt{3} - i)$ .

- Encontrar, en cada caso, el conjunto de los  $z \in \mathbb{C}$  que satisfacen las siguientes condiciones, y representar geoméricamente.

a)  $|z| > 1$     b)  $z - \bar{z} = i$     c)  $|z - i| = |z + i|$     d)  $\text{Im}(z) < 2$     e)  $|z - \bar{z}| = 2 \text{Re}(z - 1)$

- Bosquejar el resultado de aplicarle a la figura las siguientes funciones:



- a)  $f(z) = z + (1 + i)$ .  
 b)  $f(z) = (1 + i)z$ .  
 c)  $f(z) = z^2$ .  
 d)  $f(z) = e^z$ .
8. En  $\mathbb{C}$ , se consideran  $\{z_1, \dots, z_8\}$  las raíces octavas de  $2^8$ , es decir aquellas que cumplen  $z_k^8 = 2^8$  para cada  $k = 1, \dots, 8$ . Determinar cuáles de las siguientes afirmaciones son verdaderas y cuáles son falsas:
- a)  $z_i = 2$  para todo  $i = 1, \dots, 8$ .  
 b) Existen al menos dos raíces  $z_j, z_k$  tales que  $z_j = -z_k$ .  
 c) Existen al menos dos raíces  $z_l, z_m$  tales que  $\bar{z}_l = z_m$ .  
 d) Se cumple  $z_1 z_2 z_3 z_4 z_5 z_6 z_7 z_8 = 2^8$ .
9. Sea  $A = \left\{ \left( \cos\left(\frac{\pi}{7}\right) + i \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{7}\right) \right)^n / n \in \mathbb{N} \right\}$ . ¿Cuántos elementos tiene este conjunto de números complejos?
10. Sea  $P(z)$  un polinomio con coeficientes reales.
- a) Probar que  $P(\bar{z}) = \overline{P(z)}$  para todo  $z \in \mathbb{C}$ .  
 b) Probar que si  $z_0 = a + ib$  es raíz de  $P(z)$ , entonces  $\bar{z}_0 = a - ib$  también es raíz de  $P(z)$ .
11. Considere el polinomio  $P(z) = z^4 - 2z^3 + 6z^2 - 8z + 8$ . Sabiendo que  $P(z)$  tiene una raíz imaginaria pura halle todas sus raíces.
12. Se considera el polinomio complejo  $P(z) = z^3 - 2z^2 + \frac{3}{2}z - \frac{1}{2}$ , y las siguientes afirmaciones:
- (I) Existen dos raíces tales que su suma es igual a la raíz restante.  
 (II) La distancia entre dos raíces distintas siempre es constante.  
 (III) El producto de todas las raíces es igual al inverso de la suma de todas sus raíces.
- Entonces:
- A) Solo las afirmaciones (I) y (III) son correctas.  
 B) Todas las afirmaciones son correctas.  
 C) Solo las afirmaciones (II) y (III) son correctas.  
 D) Ninguna afirmación es correcta.  
 E) Solo la afirmación (I) es correcta.

## Ejercicios Complementarios

- Probar que la fórmula de Bhaskara es válida para polinomios complejos.
- Probar que no existe una relación de orden total  $<$  en  $\mathbb{C}$  que cumpla los siguientes axiomas de orden
  - Para todo  $z \in \mathbb{C} \setminus 0$  se tiene que  $z > 0$  o  $-z > 0$ , pero no ambos.
  - Si  $z_1 > 0$  y  $z_2 > 0$  entonces  $z_1 + z_2 > 0$  y  $z_1 z_2 > 0$ .
 Sugerencia: utilizar que  $i^2 = -1$ .
- Sabemos que para todo  $z \in \mathbb{C} \exists \omega \in \mathbb{C}$  tal que  $\omega^2 = z$ . Discuta sobre posibles definiciones de una función raíz cuadrada, esto es  $f$  que cumpla que  $f(z)^2 = z$ . ¿Cuáles problemas identifica en  $f$ ?

4. Se define el *seno y coseno complejos* mediante

$$\cos(z) = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}, \quad \operatorname{sen}(z) = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}, \quad \forall z \in \mathbb{C}.$$

- a) Probar que las funciones seno y coseno complejas extienden a las funciones seno y coseno reales, en el sentido de que coinciden para  $z \in \mathbb{R}$ .
- b) Probar que  $\operatorname{sen}^2 z + \cos^2 z = 1, \forall z \in \mathbb{C}$ .
- c) Probar que  $\operatorname{sen}(-z) = -\operatorname{sen} z$  y  $\cos(-z) = \cos z, \forall z \in \mathbb{C}$ .
- d) Hallar los ceros en el plano complejo de las funciones seno y coseno.