Práctico 11

Transformaciones lineales. Núcleo e imagen. Teorema de las dimensiones.

1. Concepto y ejemplos de transformaciones lineales

1. En los siguientes casos determinar si la función T es una transformación lineal:
   a) $T\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ tal que $T(x,y,z) = (y-x, z+y)$.
   b) $T\colon \mathcal{C}[0,1] \to \mathbb{R}$ tal que $T(f) = f(0)$, donde $\mathcal{C}[0,1] = \{f\colon [0,1] \to \mathbb{R}$ tal que f es continua$\}$.
   c) Dado $v \in \mathbb{R}^3$ fijo, la función $T\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ tal que $T(u) = \langle u, v\rangle$.
   d) $T\colon \mathcal{M}_{n\times n} \to \mathbb{R}$ tal que $T(A) = \text{rango}(A)$.
   e) $T\colon \mathcal{M}_{n\times n} \to \mathcal{M}_{n\times n}$ tal que $T(A) = A^t$.
   f) Dados V un $\mathbb{R}$-espacio vectorial de dimensión n y B una base de V, la función $T\colon V \to \mathbb{R}^n$ tal que $T(v) = \text{coord}_B(v)$.

2. a) Sea $T\colon \mathbb{R}_2[x] \to \mathbb{R}^2$ una transformación lineal tal que

   $$T(1) = (1,0),\ \ T(x) = (1,1),\ \ T(x^2) = (0,0),$$

   donde $\mathbb{R}_2[x]$ es el espacio de polinomios de grado menor o igual que 2. Hallar $T(p)$ para todo p.

   b) Sea $T\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ una transformación lineal tal que

   $$T(1,0,0) = (2,1,0),\ T(1,1,0) = (-1,2,3),\ T(1,1,1) = (0,0,1).$$

   ¿Existe una única transformación lineal que verifique las condiciones dadas?. Justifique su respuesta. Si es afirmativa, entonces hallar $T(3,2,1)$.

   c) Determinar si existe alguna transformación $T\colon \mathbb{R}_2[x] \to \mathbb{R}^2$ que satisfaga

   $$T(1) = (1,0),\ T(1+x) = (1,1),\ T(1+x+x^2) = (0,0),\ T(3+2x+x^2) = (2,1).$$

   En caso de que exista, alguna hallarlas todas.

3. En los siguientes casos hallar la expresión analítica de las transformaciones lineales que cumplen las condiciones dadas, y determinar cuántas hay:
   a) $T\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ tal que $T(1,1,-1) = (2,1,0),\ \ T(1,2,1) = (-1,2,3),\ \ T(1,0,-3) = (0,0,1)$;
   b) $T\colon \mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}^2$ tal que

   $$T(M_1) = (1,-1),\ T(M_2) = (1,1),\ T(M_3) = (1,1),\ T(M_4) = (3,1),\ T(M_5) = (1,-3),$$

   donde

   $$M_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix},\ M_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 2 \end{pmatrix},\ M_3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix},\ M_4 = \begin{pmatrix} 3 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix},\ M_5 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

2. Núcleo e imagen de una transformación lineal

4. Hallar el núcleo e imagen de las siguientes transformaciones lineales:

   a) $T\colon \mathbb{R}_3[x] \to \mathbb{R}^2$ tal que $T(p) = (p(1) + p(-1), p(0))$.

   b) $T\colon \mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ tal que $T(A) = tr(A)$.

5. Se consideran las transformaciones $T\colon \mathbb{R}^3 \to \mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$ tal que

$$T(x,y,z) = \begin{pmatrix} x-y & y \\ y & y-z \end{pmatrix},$$

   y

$$S\colon \mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}_3[x]$$

   definida por

$$S(A)(x) = (1 \;\; x)A\begin{pmatrix} x \\ x^2 \end{pmatrix}.$$

   Verificar que T y S son lineales, y hallar el núcleo y la imagen de T, S y $S \circ T$.

6. Dada $A \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$, definimos la transformación lineal $T_A\colon \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R}) \to \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$ como $T(M) = AM$. Demostrar que T_A es invertible si sólo si A es invertible.

3. Teorema de las dimensiones

7. Sean $T\colon V \to \mathbb{R}$ y $S\colon V \to \mathbb{R}$ transformaciones lineales, donde $\dim(V) = n$. Demostrar que:

   a) $\dim(N(T)) = n$ ó $n-1$.

   b) $N(T) = N(S)$ si y sólo si existe un número real $\alpha \neq 0$ tal que $T = \alpha S$.

   c) Sea $T\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ tal que $T(x,y,z) = x+y+z$. Hallar $S\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, lineal, sabiendo que $N(T) = N(S)$ y $S(1,0,0) = 2$.

8. Decidir si las dos afirmaciones siguientes son verdaderas o falsas, dando una demostración o un contraejemplo según corresponda.

   a) Si $T\colon V \to W$, lineal, es tal que existe un conjunto $A = \{v_1, \dots, v_r\} \subset V$ linealmente independiente que cumple que $T(A) = \{T(v_1), \dots, T(v_r)\}$ es también linealmente independiente, entonces es inyectiva.

   b) Si $T\colon V \to W$, lineal es tal que existe una base $B = \{v_1, \dots, v_n\}$ de V, que cumple que $T(B) = \{T(v_1), \dots, T(v_n)\}$ es también linealmente independiente, entonces es inyectiva.

9. Sean V y W espacios vectoriales con $\dim(V) < \dim(W)$, y $T\colon V \to W$ y $S\colon W \to V$ transformaciones lineales.

   a) Demostrar que T no es sobreyectiva.

   b) Demostrar que S no es inyectiva.

10. Sean U, V y W espacios vectoriales, y $T\colon V \to W$ y $S\colon W \to U$ transformaciones lineales.

    a) Demostrar que $N(T) \subset N(S \circ T)$

    b) Si $S \circ T$ es inyectiva, demostrar que T es inyectiva.

    c) Demostrar que $Im(S \circ T) \subset Im(S)$

    d) Si $S \circ T$ es sobreyectiva, demostrar que S es sobreyectiva.

    e) Sean A una matriz $n \times m$ y B una matriz $m \times n$, con $n < m$. Demostrar que BA no es invertible.