Práctico 7

Espacios y Subespacios Vectoriales

1. Probar que los siguientes conjuntos con las operaciones que se definen son $\mathbb{R}$-espacios vectoriales.

   a) El conjunto $\mathbb{R}^n$, de los vectores de n coordenadas, con la suma y el producto por escalares coordenada a coordenada.

   b) El conjunto $\mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$, de las matrices cuadradas de tamaño n, con la suma y el producto por escalares entrada a entrada.

   c) El conjunto $\mathcal{F} = \{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}\}$, formado por las funciones reales de variable real, definiendo la suma como $(f+g)(x) = f(x)+g(x)$ y el producto por escalares como $(\lambda \cdot f)(x) = \lambda \cdot f(x)$.

2. Probar que, en ninguno de los siguientes casos, las operaciones de suma y producto por escalares definidas hacen de $(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}, +, \cdot)$ un espacio vectorial.

   a) $(x_1,y_1)+(x_2,y_2) = (3y_1+3y_2, -x_1-x_2), \quad \lambda(x_1,y_1) = (3\lambda y_1, x_1);$

   b) $(x_1,y_1)+(x_2,y_2) = (x_1+x_2, 0), \quad \lambda(x_1,y_1) = (\lambda x_1, \lambda y_1);$

   c) $(x_1,y_1)+(x_2,y_2) = (x_1, x_2+y_2), \quad \lambda(x_1,y_1) = (\lambda x_1, \lambda y_1);$

   d) $(x_1,y_1)+(x_2,y_2) = (|x_1+x_2|, |y_1+y_2|), \quad \lambda(x_1,y_1) = (|\lambda x_1|, |\lambda y_1|).$

3. Sea $V \subset \mathbb{R}^3$ dado por $V = \{(x,y,1) : x,y \in \mathbb{R}\}$.
   Definimos la suma $+_V$ como:
   $$(x_1,y_1,1) +_V (x_2,y_2,1) = \left(\frac{x_1+x_2}{2}, \frac{y_1+y_2}{2}, 1\right);$$
   y definimos $\times_V$ como:
   $$\lambda \times_V (x_1,y_1,1) = (\lambda x, \lambda y, 1).$$
   Determinar si $(V, \mathbb{R}, +_V, \times_V)$ es un espacio vectorial.

4. Sea V un $\mathbb{K}$-espacio vectorial. A partir de los axiomas de espacio vectorial, probar las siguientes propiedades (se pueden ver los axiomas en las notas).

   a) El neutro de la suma es único. Es decir, si $v_1, v_2 \in V$ verifican que $v_1 + v = v_2 + v = v$ para todo $v \in V$ entonces $v_1 = v_2$.

   b) El opuesto es único. Es decir, dado $v \in V$, si $v + v_1 = v + v_2 = O_V$, entonces $v_1 = v_2$.

   c) Sea $0 \in \mathbb{K}$ (el neutro del cuerpo con respecto a la suma). Para todo $v \in V$ se tiene que $0v = O_V$.

   d) Sea $O_V \in V$ (el neutro del espacio vectorial). Para todo $\lambda \in \mathbb{K}$ se tiene que $\lambda O_V = O_V$

5. Determinar si los subconjuntos de $\mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{K})$ son subespacios vectoriales.

   a) El conjunto de las matrices simétricas, es decir, $\{A \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{K}) : A^T = A\}$.

   b) El conjunto de las matrices antisimétricas, $\{A \in \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{K}) : A^T = -A\}$.

   c) El conjunto de las matrices invertibles.

   d) El conjunto de las matrices no invertibles.

   e) El conjunto de matrices de rango k, para $k = 0, 1, \ldots, n$;

   f) El conjunto de matrices de traza 0 (recordar que la traza de una matriz es la suma de los elementos de la diagonal).

6. Determinar en qué condiciones los siguientes conjuntos S son subespacios de $\mathbb{R}^3$.

   a) Fijo $(a,b,c) \neq (0,0,0)$, $S = \{(x,y,z) : \langle (x,y,z),(a,b,c)\rangle = d\}$.
   b) Fijo $(a,b,c) \neq (0,0,0)$ y $v \in \mathbb{R}^3$, $S = \{(x,y,z) : (x,y,z) \wedge (a,b,c) = v\}$.
   c) Fijo $r \in \mathbb{R}$, $S = \{(x,y,z) : \|(x,y,z)\| = r\}$.

7. En cada caso, determinar si S es subespacio vectorial del espacio vectorial dado.

   a) Para el espacio vectorial $V = \mathbb{R}^3$ considerar:
      1) $S = \{(a,b,c) \in V;\ a+b+c = 2\}$;
      2) $S = \{(a,b,c) \in V;\ 3a-2 = 3b+c\}$;
      3) $S = \{(a,b,c) \in V;\ a = b = c\}$;

   b) Para el espacio vectorial $V = \mathbb{R}^n$ considerar:
      1) $S = \{(x_1,\dots,x_n) \in V;\ x_1 \geq 0\}$;
      2) $S = \{(x_1,\dots,x_n) \in V;\ x_1 = x_2 = \cdots = x_n\}$;
      3) $S = \{(x_1,\dots,x_n) \in V;\ x_1 = x_2 = \cdots = x_n = 1\}$;

   c) Para el espacio vectorial $V = \mathbb{R}_n[x]$, formado por los polinomios de grado menor o igual que n y con coeficientes reales, considerar:
      1) $S = \{p \in \mathbb{R}_n[x];\ p(\alpha) = 0\}$, donde $\alpha \in \mathbb{R}$ es un valor fijo;
      2) $S = \{p \in \mathbb{R}_n[x];\ p(\alpha) = p'(\alpha) = 0\}$, donde $\alpha \in \mathbb{R}$ es un valor fijo;
      3) $S = \{p \in \mathbb{R}_n[x];\ \text{el grado de } p \text{ es } n\}$;

   d) Para el espacio vectorial $\mathcal{F} = \{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}\}$, formado por las funciones reales de variable real, considerar:
      1) $S = \{f \in \mathcal{F};\ f(1) = f(0)\}$;
      2) $S = \{f \in \mathcal{F};\ f(x^2) = f(x)^2,\ \forall x \in \mathbb{R}\}$;
      3) $S = \{f \in \mathcal{F};\ f \text{ es par}\}$.

8. **Intersección de una colección de subespacios.**

   a) Sea $\{S_i\}_{i\in I}$ una colección subespacios de un espacio vectorial V. Mostrar que la intersección $S = \bigcap_{i\in I} S_i$ de todos los subespacios es un subespacio vectorial.
   b) Sean $x_0,\dots,x_n$ números reales. Mostrar que el conjunto de las funciones f reales y continuas tales que $f(x_i) = 0$ para $i = 0,1,\dots,n$ es un espacio vectorial real.

9. **Espacios vectoriales de funciones.** Para el espacio vectorial $\mathcal{F} = \{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}\}$, formado por las funciones reales de variable real, determinar si los siguientes subconjuntos son subespacios.

   a) $S = \{f \in \mathcal{F} :\ f \text{ es continua}\}$;
   b) $S = \{f \in \mathcal{F} :\ f \text{ es derivable}\}$;
   c) $S = \{f \in \mathcal{F} :\ f \text{ es derivable y } f' = -f\}$;
   d) $S = \{f \in \mathcal{F} :\ f \text{ es acotada}\}$.

10. **Suma de subespacios.** Sea V un $\mathbb{K}$-espacio vectorial y W_1, W_2 dos subespacios de V. Se define el subconjunto de V dado por:

$$W = \{v \in V :\ \text{tal que existen } w_1 \in W_1 \text{ y } w_2 \in W_2 \text{ con } v = w_1 + w_2\}.$$

   a) Probar que W es un subespacio de V.
   b) Mostrar que W contiene a W_1 y W_2.
   c) Probar que cualquier otro subespacio S que contenga a W_1 y W_2 también debe contener a W.
   Se dice que W es la suma de los subespacios W_1 y W_2.