Universidad de la República
Facultad de Ingeniería - IMERL

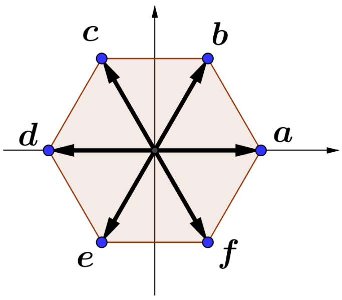
Geometría y Álgebra Lineal 1
Segundo Semestre de 2023

Práctico 5

Geometría en el espacio. Rectas y planos.

1. Puntos y vectores

1. **Polígonos regulares.** Considere el hexágono regular centrado en el origen que se muestra en la figura.



   a) ¿Cuánto da la suma de los vectores a,b,c,d,e y f?

   b) ¿Qué ocurre si sumamos todos menos a?

   c) Discutir qué ocurre con el triángulo regular a,c,e.

2. Ecuación del plano y de la recta

1. Hallar ecuaciones paramétricas y ecuaciones implícitas (o reducidas) de las siguientes rectas:

   a) la que pasa por el punto $P=(1,2,5)$, con vector director $v=(2,1,3)$;

   b) la que pasa por los puntos $A=(4,3,0)$ y $B=(1,0,1)$.

2. Hallar ecuaciones paramétricas y reducidas de los siguientes planos:

   a) el que pasa por el punto $(1,1,1)$ y tiene a $(2,-1,1)$ y $(1,0,-1)$ como vectores directores;

   b) el que pasa por los puntos $(1,1,1)$, $(2,2,3)$ y $(1,1,-2)$;

   c) el que pasa por el punto $(1,1,1)$ y contiene a la recta dada por $\begin{cases} x+y+z+2=0, \\ x-y-z-2=0. \end{cases}$

3. *a*) Demostrar que si $u=(u_1,u_2,u_3)$ y $v=(v_1,v_2,v_3)$ son dos vectores no colineales, es decir, ninguno es múltiplo del otro, el sistema de ecuaciones paramétricas

$$\begin{cases} x = p_1 + \lambda u_1 + \mu v_1 \\ y = p_2 + \lambda u_2 + \mu v_2 \\ z = p_3 + \lambda u_3 + \mu v_3 \end{cases} \tag{1}$$

   es compatible si y sólo si el determinante

$$\begin{vmatrix} x-p_1 & y-p_2 & z-p_3 \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{vmatrix} = 0.$$

b) Concluir que el plano de ecuaciones paramétricas tiene una ecuación reducida de la forma

$$\begin{vmatrix} u_2 & u_3 \\ v_2 & v_3 \end{vmatrix}(x-p_1) - \begin{vmatrix} u_1 & u_3 \\ v_1 & v_3 \end{vmatrix}(y-p_2) + \begin{vmatrix} u_1 & u_2 \\ v_1 & v_2 \end{vmatrix}(z-p_3) = 0.$$

c) Usar este resultado para hallar una ecuación reducida del plano cuyas ecuaciones paramétricas son

$$\left\{ \begin{array}{l} x = -1 + \lambda - \mu, \\ y = 2 + \lambda + \mu, \\ z = -1 - \lambda - 2\mu. \end{array} \right. .$$

4. Hallar la intersección de los siguientes planos:

$$2x - 3y + 4z = -2, \qquad \left\{ \begin{array}{l} x = 2 - \lambda + \mu, \\ y = -1 - \lambda + 2\mu, \\ z = -2 - 2\lambda - \mu. \end{array} \right.$$

5. Se consideran los planos de ecuaciones

$$2x + y + z - 2 = 0, \quad \left\{ \begin{array}{l} x = 1 + 2\lambda + 2\mu, \\ y = -3 + \lambda - \mu, \\ z = \lambda + \mu, \end{array} \right. ,$$

y las rectas de ecuaciones

$$\left\{ \begin{array}{r} x + y - 3z = -6, \\ x + 2y - 4z = -8, \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} x = 3 + \lambda, \\ y = 4 + \lambda, \\ z = 1 - 3\lambda \end{array} \right. .$$

Hallar la intersección de cada una de las dos rectas con cada uno de los dos planos.

6. Hallar ecuaciones paramétricas de la recta que no corta a ninguno de los planos de ecuaciones

$$x + y + z = 1, \quad x - y = 3,$$

y que pasa por el punto $(10, 11, 12)$.

7. Sean π el plano dado por $\pi : x + y + z = 3$ y r la recta dada por $r : (x, y, z) = (0, 0, 0) + \lambda(a, b, 1)$. Discutir la intersección de r y π en función de a y b.