Práctico 4

Determinantes y Regla de Cramer

1. Determinantes

1. Calcular los siguientes determinantes:

$$a) \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 0 \end{vmatrix} \quad b) \begin{vmatrix} 0 & 0 & \operatorname{sen}(\theta) \\ \operatorname{sen}(\theta) & \operatorname{cos}(\theta) & \operatorname{tan}(\theta) \\ -\operatorname{cos}(\theta) & \operatorname{sen}(\theta) & -\operatorname{cos}(\theta) \end{vmatrix} \quad c) \begin{vmatrix} e^{2a} & 0 & e^a \\ e^a & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix}$$

$$d) \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & 3 & 2 \\ -1 & -3 & 0 & 4 \\ 0 & 4 & -1 & -3 \end{vmatrix} \quad e) \begin{vmatrix} 2 & 4 & -5 & 2 & 1 & 5 \\ 0 & -1 & 7 & 3 & -3 & 4 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ -3 & 4 & 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 5 & 3 & -1 & 4 & 3 \\ 5 & 1 & 3 & 0 & 0 & -1 \end{vmatrix}$$

2. Sabiendo que

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = 5,$$

calcular los siguientes determinantes:

$$\begin{vmatrix} d & e & f \\ g & h & i \\ a & b & c \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} -a & -b & -c \\ 2d & 2e & 2f \\ -g & -h & -i \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} a & b & c \\ d-3a & e-3b & f-3c \\ 2g & 2h & 2i \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} a+5c & 3b & c \\ d+5f & 3e & f \\ 2g+10i & 6h & 2i \end{vmatrix}.$$

3. Calcule el determinante de las siguientes matrices y determine para cuáles valores de k son invertibles.

$$a) \begin{pmatrix} k & -k & 3 \\ 0 & k+1 & 1 \\ k & -8 & k-1 \end{pmatrix} \quad b) \begin{pmatrix} k-4 & 0 & 0 \\ 1 & k & 2 \\ 3 & 3 & k-1 \end{pmatrix}.$$

4. Sean $A, B \in \mathcal{M}_{n \times n}$, tales que $\det(A) = 3$ y $\det(B) = -2$. Calcular los siguientes determinantes:

$$a) \det(-AB) \quad b) \det(A^2) \quad c) \det(B^{-1}A) \quad d) \det(2A) \quad e) \det(3B^T) \quad f) \det(AA^T)$$

5. Calcular los determinantes

$$d_n = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & \cdots & 1 & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 & 0 \end{vmatrix},$$

para $n = 2, 3, \dots$, donde se supone que la matriz con determinante d_n tiene n filas y n columnas.

6. Sean A matriz $n \times n$, B una matriz $n \times m$ y C una matriz $m \times m$. Con O indicaremos una matriz $m \times n$ cualquier dimensión cuyas entradas son todas nulas. Demostrar que

$$\det \begin{pmatrix} A & B \\ O & C \end{pmatrix} = \det(A) \det(C).$$

2. Regla de Cramer

1. Resolver usando la regla de Cramer $AX = b$ donde A y b viene dados por:

$$A = \begin{pmatrix} 6 & 2 & -4 \\ 5 & 6 & -2 \\ 5 & 2 & -3 \end{pmatrix}, \quad y \quad b = \begin{pmatrix} 14 \\ 19 \\ 12 \end{pmatrix}.$$

2. Considere $\alpha \in \mathbb{R}$ y las matrices T y b dadas por

$$T = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 0 \\ 3 & 5 & 4 \\ 3 & \alpha^2 & 2 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} -2\alpha \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

- Hallar todos los valores de α para los que el sistema $TX = b$ tiene infinitas soluciones.
- Encontrar todos los valores de α para los que el sistema $TX = b$ tiene solución única y hallar la solución.
- Para qué valores del α se cumple que T^{-1} existe y se verifica que $\det(4T^{-1}) = 8$.