Universidad de la República
Facultad de Ingeniería - IMERL

Geometría y Álgebra Lineal 1
Segundo Semestre de 2023

Práctico 3

Matrices invertibles y rango

1. Matrices invertibles

1. Determinar si las siguientes matrices son invertibles, y en caso de serlo calcular la inversa de la matriz.

$$a)\ \begin{pmatrix} -3 & -5 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \qquad b)\ \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} \end{pmatrix} \qquad c)\ \begin{pmatrix} 2 & 4 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \\ 1 & 4 & 0 \end{pmatrix} \qquad d)\ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

2. Las siguientes matrices son invertibles:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 6 & -2 & -3 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

   a) Calcular las inversas.

   b) Resolver los siguientes sistemas de ecuaciones lineales usando los cálculos de la parte anterior:

$$A\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad B\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

3. Se considera la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$.

   a) Hallar matrices elementales E_1 y E_2 tales que $E_2E_1A = I$.

   b) Hallar A^{-1}.

   c) Expresar A como el producto de matrices elementales.

4. Determinar si las siguientes afirmaciones son verdades o falsas, justificando en cada caso.

   a) Si A y B son invertibles y $\alpha \neq 0$ entonces αAB es invertible y $(\alpha AB)^{-1} = \frac{1}{\alpha}B^{-1}A^{-1}$.

   b) Si A es invertible entonces $(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$.

   c) Si A y B son invertibles entonces $A + B$ es invertible.

   d) Si A y B son invertibles y $A + B$ es invertible, entonces $(A + B)^{-1} = A^{-1} + B^{-1}$.

   e) Si A es invertible y AB no lo es, entonces B no es invertible.

5. Calcular la inversa de la siguiente matriz

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 3 & 3 & 3 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \\ n-1 & n-1 & n-1 & \dots & n-1 & 0 \\ n & n & n & \dots & n & n \end{pmatrix}.$$

6. **Matrices en bloques.**

   a) Sean $A \in \mathcal{M}_{n\times n}$ y $B \in \mathcal{M}_{m\times m}$ definimos la matriz $C \in \mathcal{M}_{(n+m)\times(n+m)}$ como

   $$C = \begin{pmatrix} A & 0_{n\times m} \\ 0_{m\times n} & B \end{pmatrix},$$

   donde $0_{r\times s}$ indica a la matriz nula de r filas y s columnas. Formalmente,

   $$c_{i,j} = \begin{cases} a_{i,j} & \text{si } i \le n, j \le n \\ b_{i-n,j-n} & \text{si } i > n, j > n \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}.$$

   Demostrar que si A y B son invertibles entonces C es invertible.

   b) Demostrar que si A y D son invertibles entonces

   $$\begin{pmatrix} A & B \\ 0 & D \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} A^{-1} & -A^{-1}BD^{-1} \\ 0 & D^{-1} \end{pmatrix}.$$

2. Rango de Matrices

1. *a*) Determine el rango de las matrices del ejercicio 1.1.

   b) Determine el rango de las siguientes matrices

   $$a)\ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix} \qquad b)\ \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \\ 9 & 10 & 11 & 12 \\ 13 & 14 & 15 & 16 \end{pmatrix} \qquad c)\ \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 & 2 \\ \sqrt{2} & \sqrt{2} & \sqrt{2} & \sqrt{2} & \sqrt{2} & \sqrt{2} & \sqrt{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & 4 & 4 & 4 & 4 & 4 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

2. Sea $A \in \mathcal{M}_{m\times n}$ y $b \in \mathcal{M}_{m\times 1}$. Indicar si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas y justificar en cada caso:

   a) $\text{rango}(A) \le m$

   b) $\text{rango}(A) = \text{mín}\{m, n\}$

   c) Si $\text{rango}(A) < n$ el sistema $AX = b$ es incompatible.

   d) El sistema $AX = b$ es compatible indeterminado si y solo si $\text{rango}(A) = \text{rango}(A|b) < n$.

   e) Si A es una matriz cuadrada de 2×2 invertible, entonces la matriz $B = A + 2Id$ (donde I es la matriz identidad de 2×2) también es invertible.

3. Sean A y $P \in \mathcal{M}_{n\times n}$ tal que P es invertible. Demostrar que el rango de A es igual al rango de PA.