Universidad de la República **Geometría y Álgebra Lineal 1**
Facultad de Ingeniería - IMERL **Segundo Semestre de 2023**

Práctico 2

Matrices, operaciones entre matrices, y aplicaciones

Denotaremos por I_n y 0_n respectivamente a la matriz identidad y la matriz nula de tamaño $n \times n$. En caso que se sobrentienda el tamaño, las denotaremos simplemente por I y 0.

1. Matrices

1. Construir las siguientes matrices

$$a) \quad A = ((a_{ij})) \in \mathcal{M}_{3\times 4},\ a_{ij} = i + j \qquad b) \quad B = ((b_{ij})) \in \mathcal{M}_{3\times 3},\ b_{ij} = \begin{cases} i & i \leq j \\ 0 & i > j \end{cases}$$

2. Consideremos matrices A y B de dimensión 4×5 y matrices C, D y E de dimensiones 5×2, 4×2 y 5×4 respectivamente. Todas las matrices tienen sus entradas en el mismo conjunto numérico. Determine cuáles de las siguientes operaciones están definidas:

$$BA, \quad AC + D, \quad AE + B, \quad AB + B, \quad E(A + B), \quad EAC.$$

En caso de estarlo, indique las dimensiones de la matriz resultante.

3. Se consideran las matrices:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ -1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 3 & 1 & 5 \end{pmatrix} \quad D = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -3 & 2 & -1 \\ -2 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad E = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 6 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

Realizar las siguientes operaciones: AB, BC, $B + B^t$, AA^t, A^tA, $(AB)C$, $A(BC)$ y $DE - ED$.

4. Sea $\delta(i_0, j_0) \in \mathcal{M}_{n\times n}$ definida por $\delta(i_0, j_0)_{i,j} = \begin{cases} 1 & \text{si } i = i_0 \text{ y } j = j_0 \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$

   a) Dada $A \in \mathcal{M}_{n\times n}$, describir la matriz $\delta(1,1)A$ en función de los valores $a_{i,j}$. Repetir para $A\delta(1,1)$.

   b) Dada $A \in \mathcal{M}_{n\times n}$, describir la matriz $\delta(1,2)A$ en función de los valores $a_{i,j}$. Repetir para $A\delta(1,2)$.

   c) Describir $\delta(i_0, j_0)A$ para i_0, j_0 cualesquiera.

5. Determinar si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas. Justificar.

   a) Si la primera y tercera columna de B son iguales, también lo son la primera y tercera columna de AB;

   b) Si la primera y tercera fila son iguales en B, también lo son en AB;

   c) Si la primera y tercera fila son iguales en A, también lo son en AB;

   d) Si A y B son matrices $n \times n$ entonces

      1) $(AB)^2 = A^2B^2$;
      2) $(A + B)^2 = A^2 + 2AB + B^2$
      3) $(A + B)(A - B) = A^2 - B^2$

   e) Si $A \neq O_n$ y $AB = AC \Rightarrow B = C$

   f) Si el producto AB entre las matrices A y B está definido entonces también lo está el producto BA.

2. Operadores en matrices y matrices especiales

1. **Trasposición de matrices**

   a) Demostrar que $(A+B)^t = A^t + B^t$, $(\alpha A)^t = \alpha A^t$ y $(AB)^t = B^t A^t$ (siendo A y B conformables).

   b) Sea A una matriz de tamaño $n \times n$ tal que $A^t = \lambda A$ donde $\lambda \neq \pm 1$. Mostrar que A es 0_n.

   c) Sean A y B matrices cuadradas tales que $A = qB^t$ y $B = pA^t$, para un par de números p, q. Probar que $A = 0 = B$ o $pq = 1$.

2. **Traza de una matriz**

   Sea A una matriz cuadrada. Se define la **traza** $tr(A)$ de la matriz A como la suma de todos los elementos de su diagonal. Entonces, si $A = ((a_{ij}))$ es una matriz $n \times n$ tendremos

   $$tr(A) = a_{11} + \cdots + a_{nn} = \sum_{i=1}^{n} a_{ii}.$$

   a) Probar que si A y B son matrices cuadradas $n \times n$:

   $$tr(A+B) = tr(A) + tr(B), \qquad tr(\alpha A) = \alpha\, tr(A), \qquad tr(A) = tr(A^t)$$

   b) Sabiendo que $tr(AB) = tr(BA)$, demostrar que no existen matrices cuadradas A y B $n \times n$ tales que $AB - BA = I_n$.

   c) Sea A una matriz de $n \times n$. Probar que $tr(AA^t) \geq 0$ y $tr(AA^t) = 0$ si solo si $A = 0_n$.

3. Geometría

En los ejercicios de esta sección los puntos del plano se representarán como matrices 2×1. Por ejemplo el punto (1,3) se representará como $\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 3 \end{pmatrix}^t$ y a veces también como $(1,3)^t$.

1. **Matriz de la simetría respecto a la recta $x = y$.**
   Sea $S : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ la función definida por

   $$S\left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}.$$

   a) Representar en el plano los siguientes puntos $\begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix}^t$, $\begin{pmatrix} 0 & 1 \end{pmatrix}^t$, $\begin{pmatrix} 1 & 1 \end{pmatrix}^t$ y $\begin{pmatrix} 1 & -1 \end{pmatrix}^t$, y sus respectivas imágenes por la función S. Para estos puntos dibujar un flecha entre p y $S(p)$. Interpretar geométricamente.

   b) Bosquejar las siguientes figuras y sus imágenes por S.

   a) $x = 5$ *b*) $x + y = 0$ *c*) $x - y = 0$ *d*) $x - y = 2$

   c) Probar que la función S es biyectiva y calcular su inversa.

2. **Matriz de giro de ángulo θ.**

   Para un número $\theta \in [0, 2\pi)$ se considera la matriz $G_\theta = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$, y se define la función $R_\theta : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ mediante la fórmula

   $$R_\theta\left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right) = G_\theta \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}.$$

a) Calcular para $(1,0)^t$ y $(0,1)^t$ sus imágenes al aplicar R_θ e interpretar geométricamente el resultado (Sugerencia: bosquejar en el plano los puntos y sus imágenes).

b) Dados θ y ψ, ¿cuál es el resultado Z de calcular $Y = R_\theta(X)$ siendo $X = (1,0)^t$ y luego $Z = R_\psi(Y)$? ¿Cómo se interpreta esto geométricamente?

c) Comparar el resultado anterior con la acción de la función $R_{\theta+\psi}$. ¿Qué famosas fórmulas trigonométricas pueden deducirse de estas manipulaciones?

4. Aplicaciones

1. Una empresa constructora tiene contratos para construir 3 estilos de casa: moderno, nórdico y colonial. La cantidad de material a emplear en cada tipo de casa está dado por la siguiente tabla (en ciertas unidades):

	Hierro	Madera	Vidrio	Pintura	Ladrillos
Moderno	5	20	16	7	17
Nórdico	7	18	12	9	21
Colonial	6	25	8	5	13

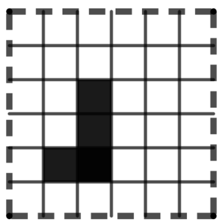
a) Utilizar un producto de matrices para determinar cuántas unidades de cada material serán empleadas si va a construir 5, 7 y 12 casas de tipo moderno, nórdico y colonial, respectivamente.

b) Si los precios por unidad de hierro, madera, vidrio, pintura y ladrillos son 15, 8, 5, 1 y 10.¿Cuál es el precio unitario de cada tipo de casa?

c) ¿Cuál es el costo total del material a emplear?

d) ¿Cómo sería la función de costo si quiero construir M casas de tipo moderno, N de tipo nórdico y C de tipo colonial?

2. **Imágenes** En este ejercicio se estudiará como a partir de operaciones de matrices podemos manipular una imagen. Una imagen en blanco y negro (sin grises) puede representarse como una matriz de ceros y unos, donde un 0 representa un bit negro mientras que un 1 representa uno blanco.



$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Figura 1: Imagen de ejemplo (donde cada cuadrado representa un bit) junto a su matriz

a) Asumiendo que lo importante es la parte negra y se quiere trasladar un lugar hacia la derecha. Encontrar $B \in \mathcal{M}_{6\times 6}(\mathbb{R})$ tal que AB sea una solución al problema.

b) Suponga ahora que se quiere reflejar la imagen (como si se viera en un espejo). Encontrar $B \in \mathcal{M}_{6\times 6}(\mathbb{R})$ tal que AB sea una solución al problema.

c) Determine alguna forma de pasar de la imagen a su negativo (intercambiar bits blancos y negros) a partir de operaciones con matrices.