

Respuesta temporal, sistema de orden 2, t_s , t_l

Transparencias

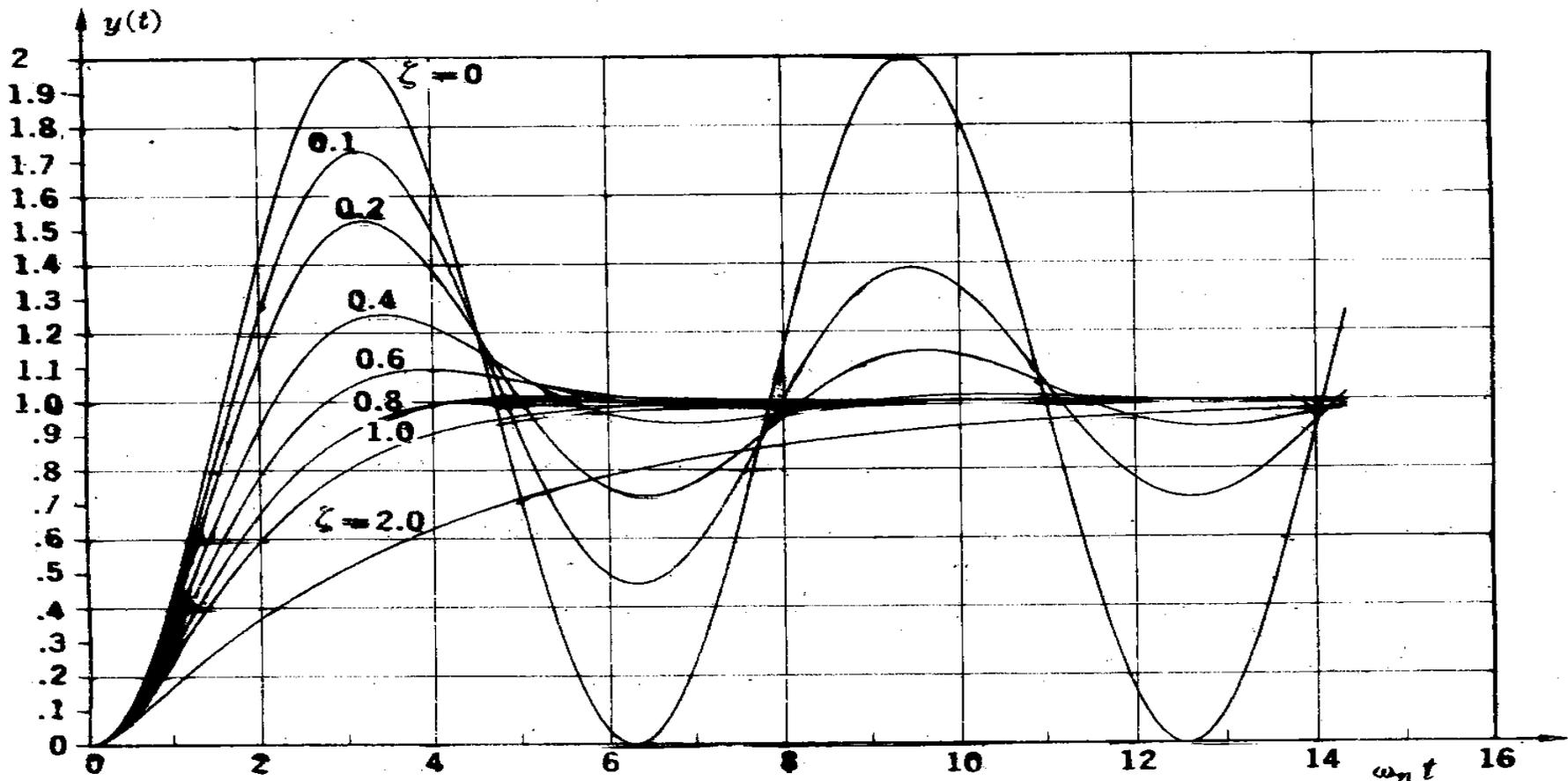
Sistemas y Control

R. Canetti 2020

Respuesta a escalón, sistema de segundo orden.

Sist.: $H(s) = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2}$ Respuesta: $y(t) = 1 - \frac{1}{\sqrt{1-\zeta^2}} e^{-\zeta\omega_n t} \text{sen}(\omega_d t + \text{artg}(\frac{\sqrt{1-\zeta^2}}{\zeta}))$

La gráfica muestra la respuesta del sistema subamortiguado ($0 < \zeta < 1$) vs. tiempo generalizado $\omega_n t$



Estimación del tiempo de asentamiento t_s .

Aproximación por envolvente.

- Para estimar el tiempo de asentamiento se usa una estimación conservadora: se aproxima por el tiempo en que la envolvente

$$1 \pm \frac{1}{\sqrt{1-\zeta^2}} e^{-\zeta \omega_n t}$$

entra dentro de la banda del +/- 5%.

De esta manera se asegura que la señal envuelta en su interior también entra dentro de la banda.

- Nótese que es una estimación conservadora: la señal de interés puede haber entrado en la banda en forma permanente, antes que la envolvente.
- Luego se aproximará la envolvente por una envolvente más sencilla: $1 \pm e^{-\zeta \omega_n t}$

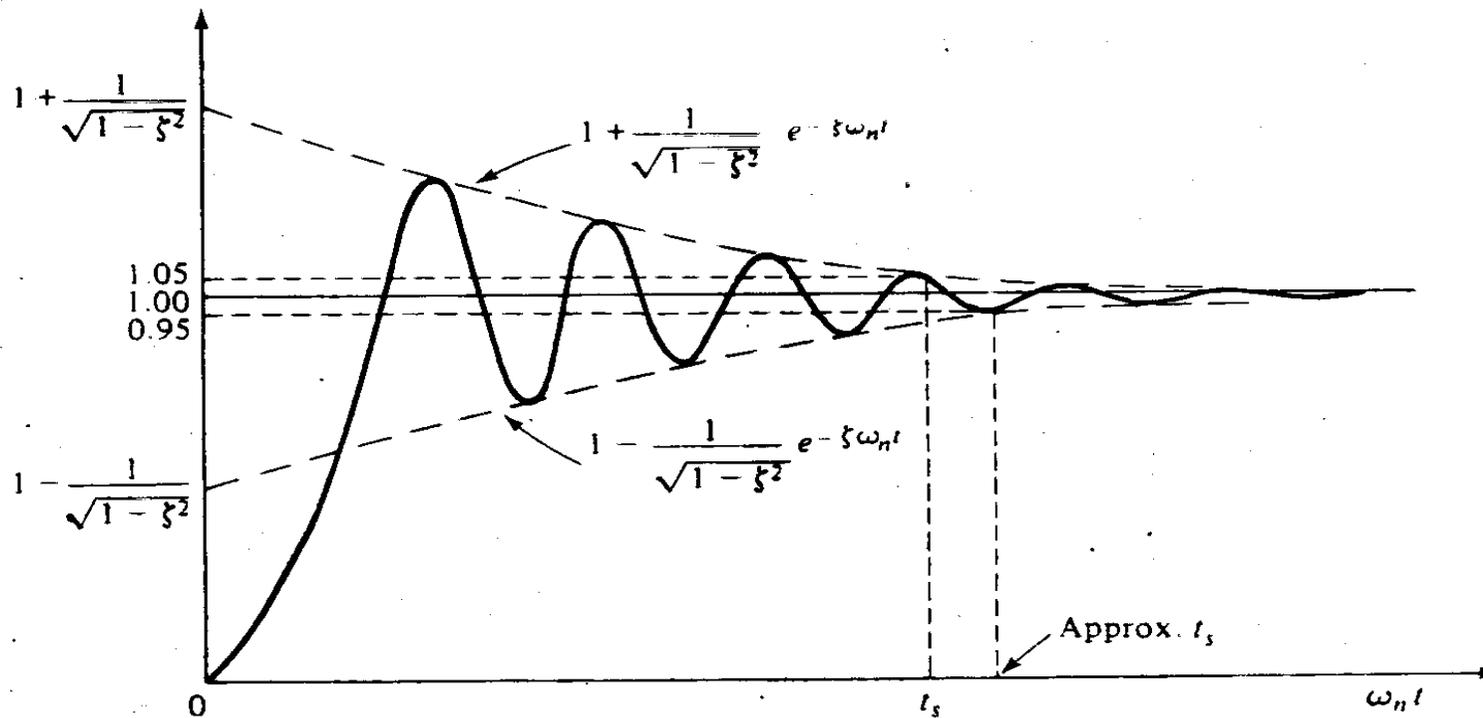


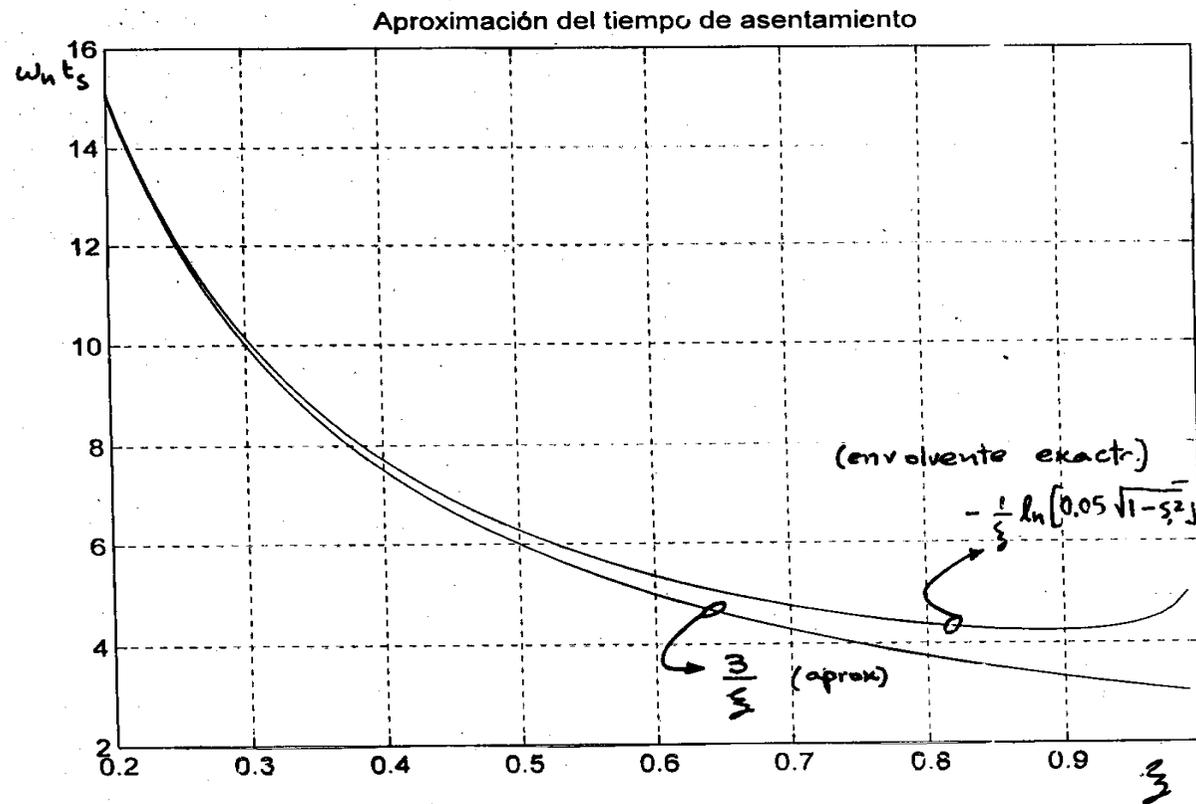
Figure 6-19 Approximation of settling time using the envelope of the decaying step response of a second order system ($0 < \zeta < 1$).

Se busca entonces cuando $\frac{1}{\sqrt{1-\zeta^2}} e^{-\zeta\omega_n t} = 0.05$ Además, si $\zeta < 0.8$ puede aproximarse bien por $e^{-\zeta\omega_n t} = 0.05 \rightarrow \boxed{t_s \approx \frac{3}{\zeta \cdot \omega_n}}$ (como el sistema de 1^{er}.orden)

Hemos hecho dos aproximaciones:

- Estimar el t_s por la envolvente exacta. Es una sobre-estimación de t_s .
- Estimar la envolvente por otra envolvente: $e^{-\xi \omega_n t}$. Es una sub-estimación.

¿qué tan buena es esta última aproximación? La figura muestra las dos aproximaciones de t_s .



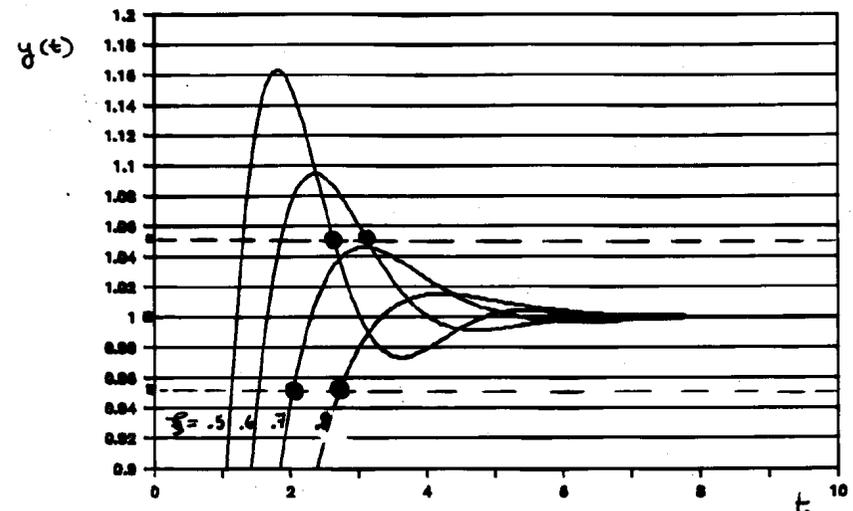
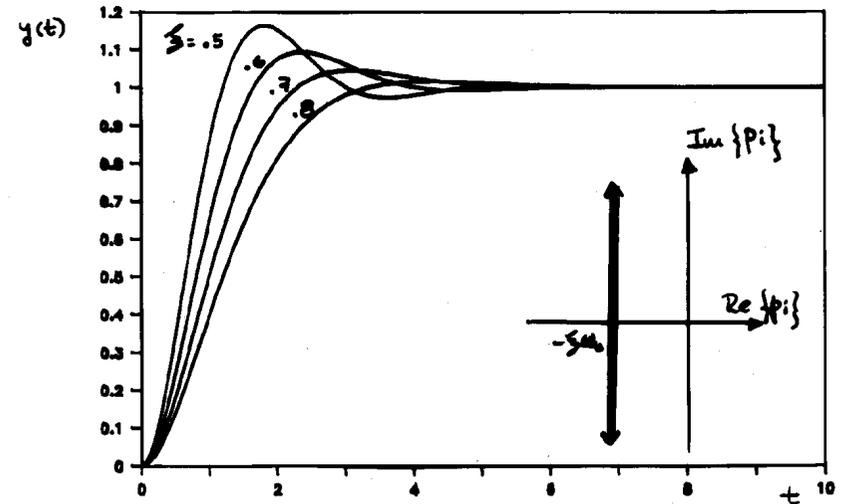
Como $t_s \approx \frac{3}{\zeta \cdot \omega_n}$

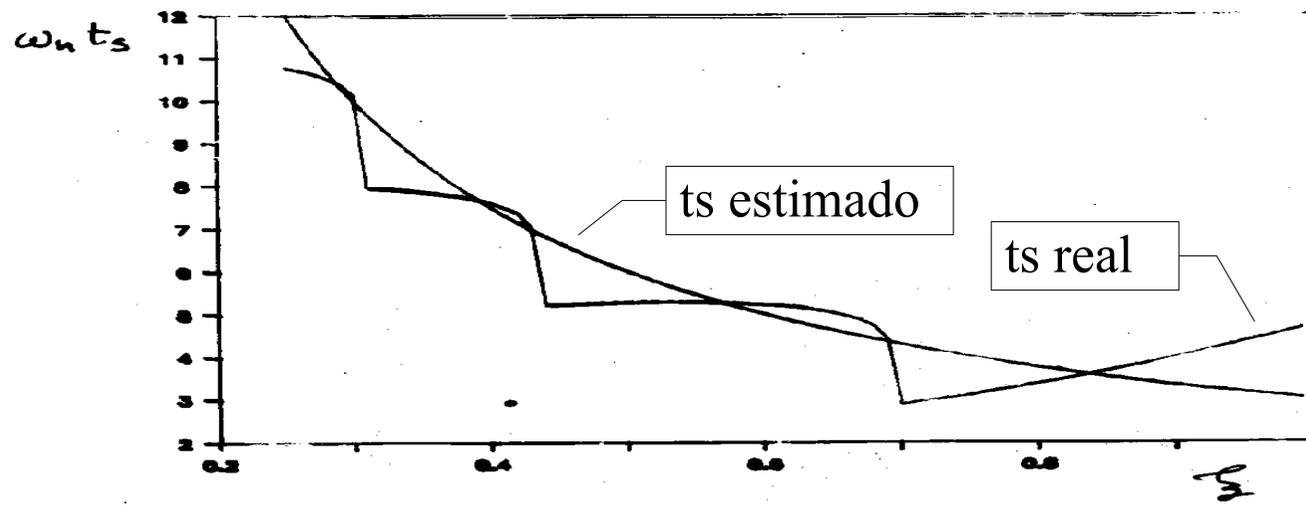
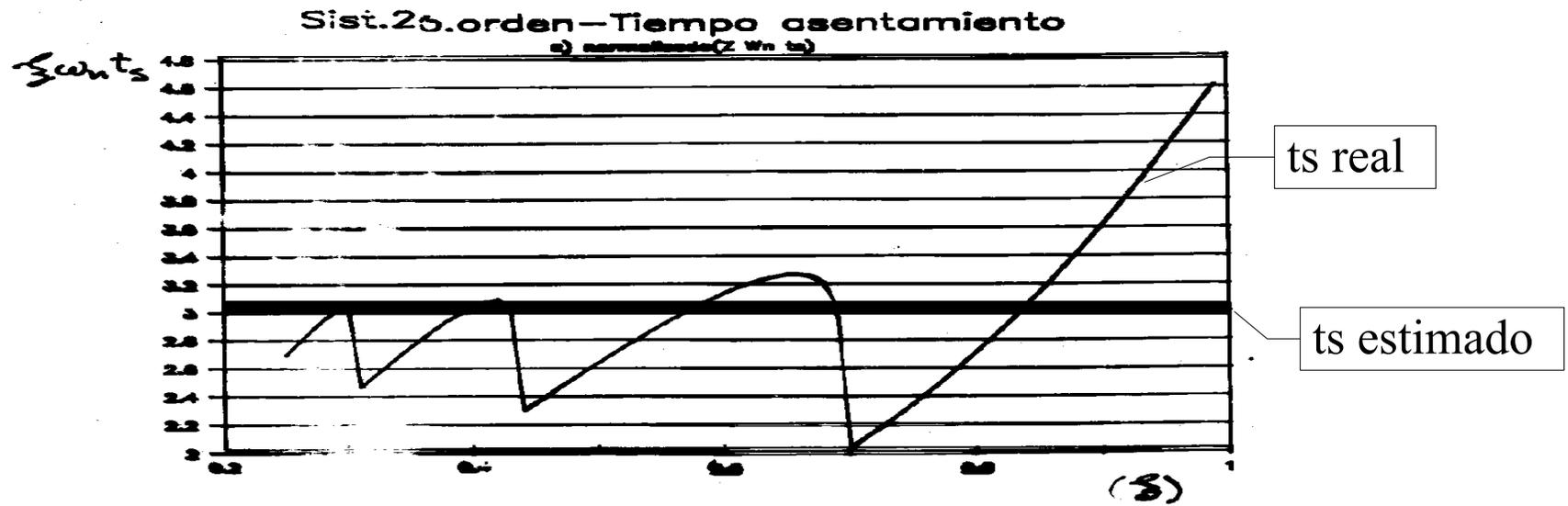
Los sistemas de segundo orden que estamos estudiando tienen dado su tiempo de asentamiento solo por la parte real de los polos.

Es decir, el lugar geométrico de los polos complejos conjugados que corresponden a sistemas de orden 2 con el mismo tiempo de asentamiento aproximado es la recta

$$\text{Re} \{p_i\} = -\zeta \omega_n = -3/t_s$$

SIST. 2º ORDEN.
Resp. a escalón para $\omega_n = \text{cte.}$





Comparación entre ts real y estimado.

Tiempo de levantamiento (t_l, t_r) del 0 al 100%

El t_l de 10% a 90% no tiene una expresión analítica sencilla. En cambio, en el sistema de segundo orden estudiado, el t_l en que se alcanza el 100% del valor asintótico final se puede calcular:

$$y(t) = 1 - \frac{1}{\sqrt{1-\zeta^2}} e^{-\zeta\omega_n t} \operatorname{sen}\left(\omega_d t + \operatorname{artg}\left(\frac{\sqrt{1-\zeta^2}}{\zeta}\right)\right)$$

El primer corte con 1, se produce en el primer cero del segundo sumando.

$$\operatorname{Sen}(\dots) = 0 \text{ cuando } \left(\omega_d t + \operatorname{artg}\left(\frac{\sqrt{1-\zeta^2}}{\zeta}\right)\right) = l\pi \quad l = 0, 1, 2, \dots$$

El primer corte con $t > 0$ es cuando $l=1$

$$t_{l \text{ 0-100\%}} = \frac{\pi - \beta}{\omega_d}$$

Tiempo de levantamiento t_l , t_r (10%-90%) - No se dispone de una expresión analítica sencilla. Veamos posibles aproximaciones (tomadas de B.C. Kuo),

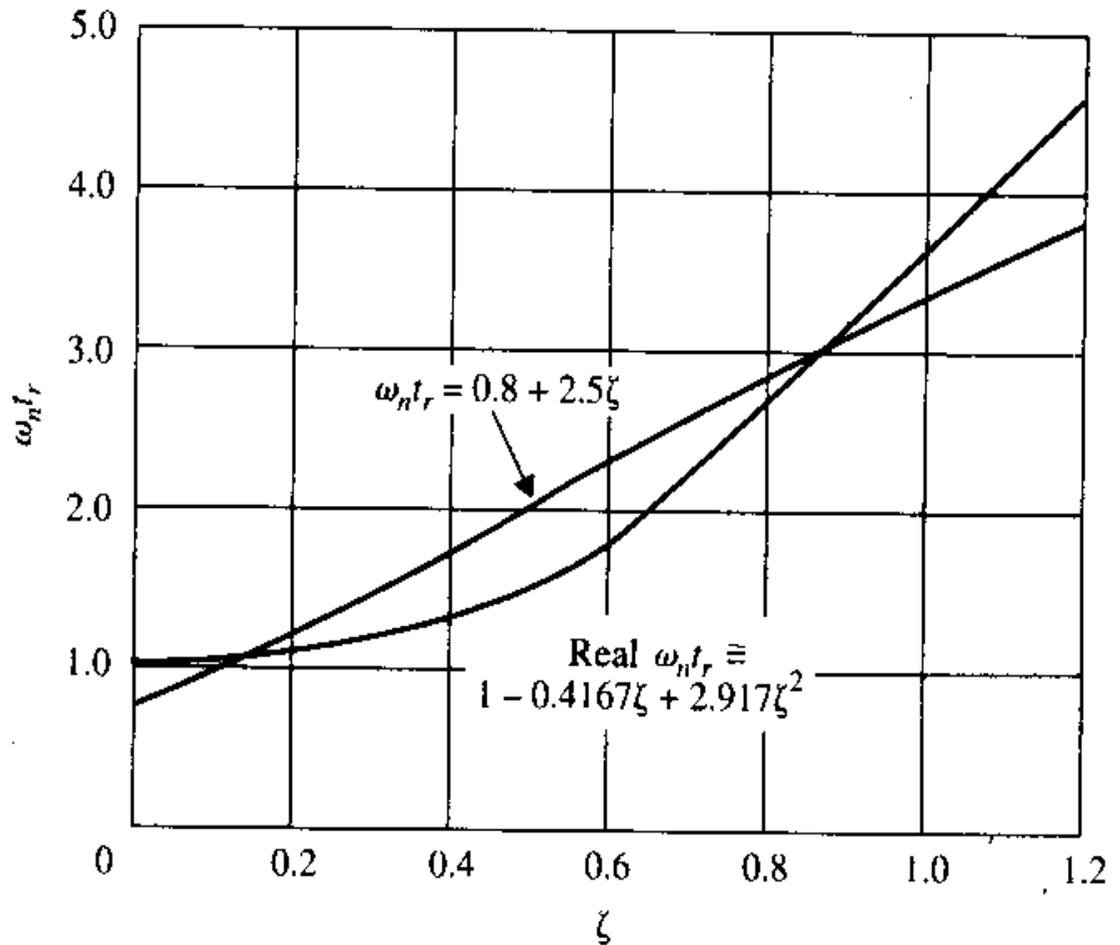


Figura 7-21 Tiempo de levantamiento normalizado contra ζ para el sistema prototipo de segundo orden.

También puede usarse otra aproximación numérica para t_l , t_r (10%-90%)
(M.Hakas, A. Fonseca) :

$$\omega_n t_l = 0.366 e^{2\zeta} + 0,6536 \quad si \quad 0 < \zeta < 1$$

$$\omega_n t_l = 2 \ln(9) \zeta - \frac{1,0364}{\zeta} \quad si \quad \zeta > 1$$

Retardo: t_d

Aproximaciones tomadas de B.C. Kuo,

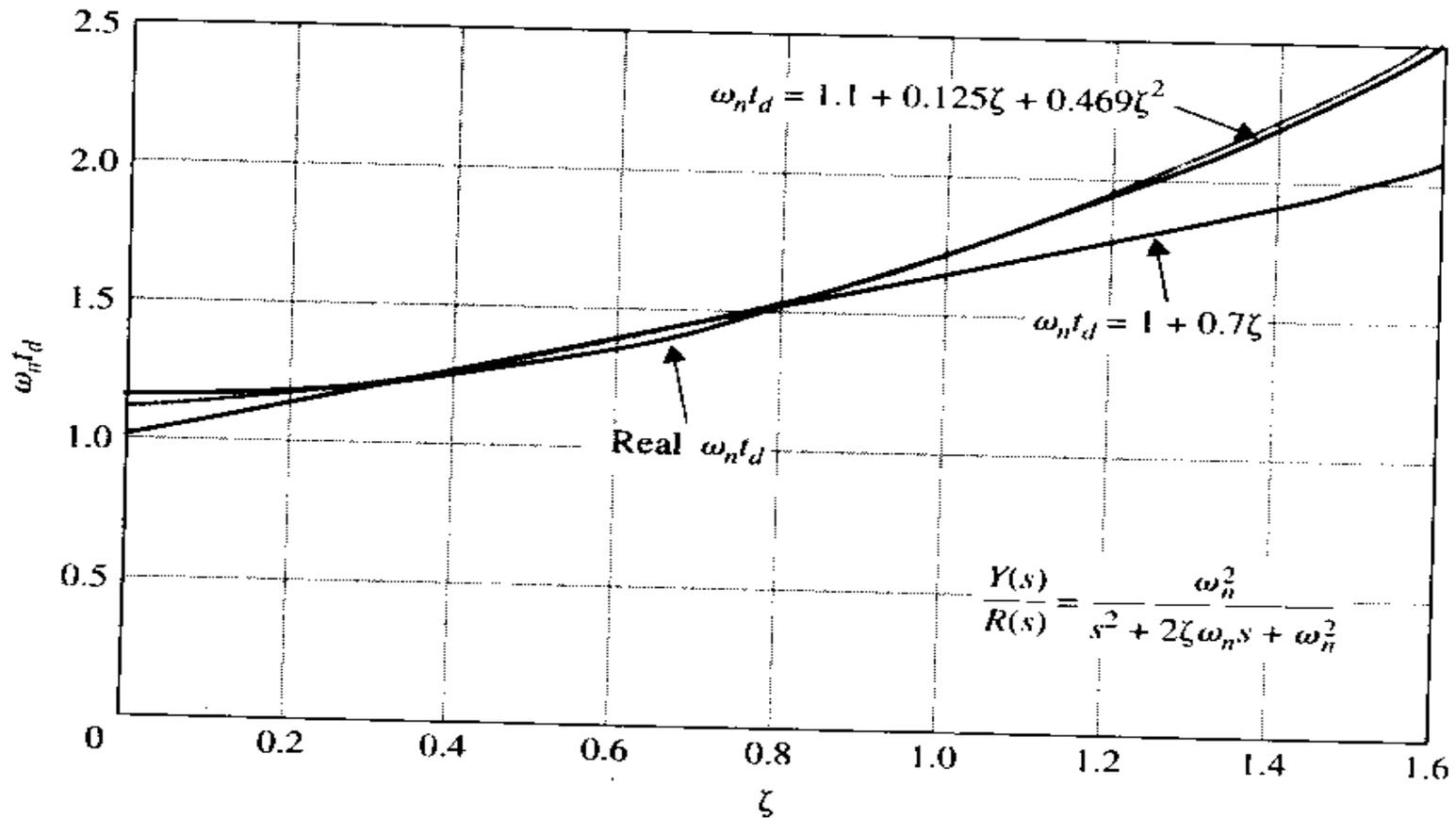


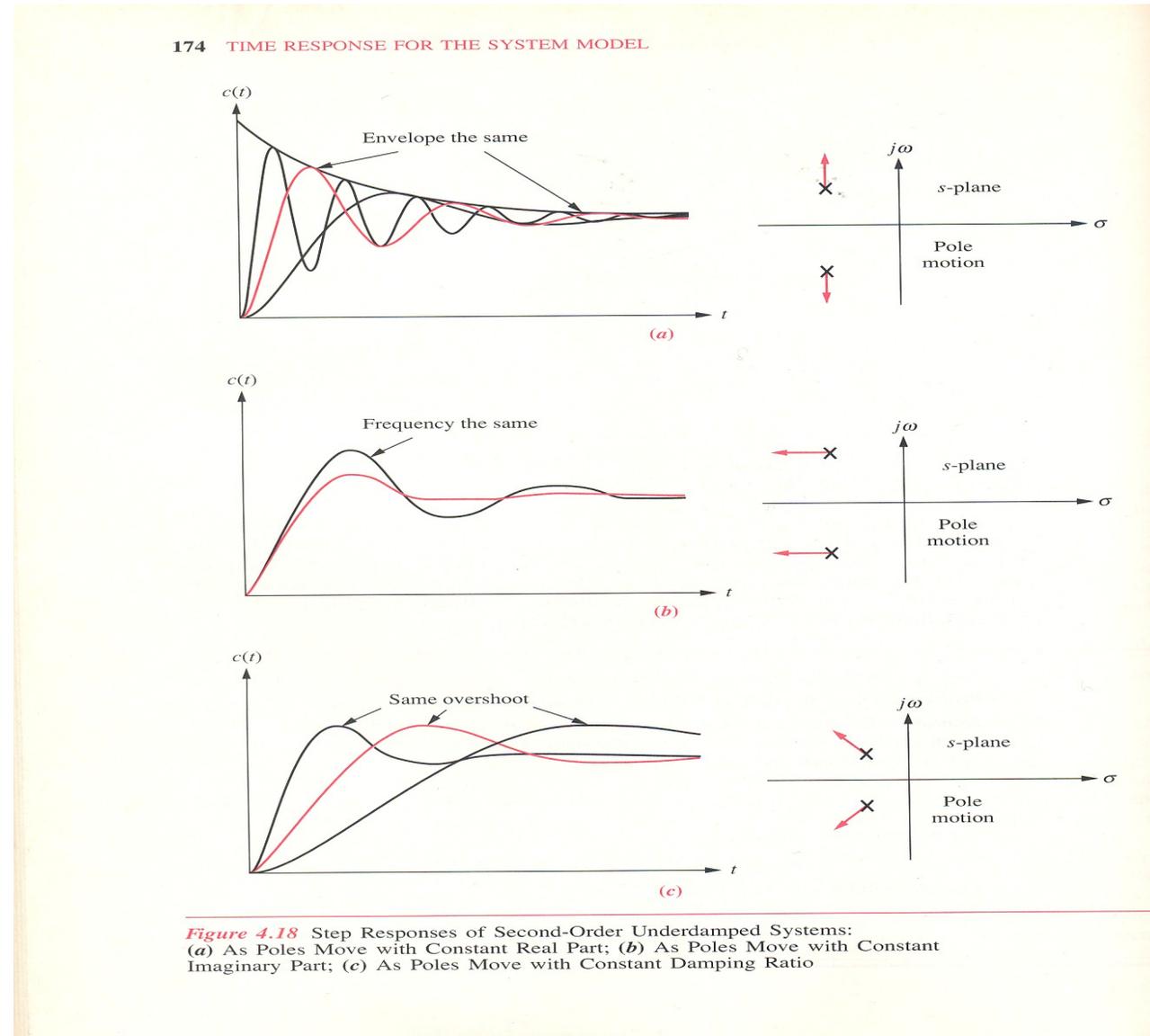
Figura 7-20 Tiempo de retardo normalizado contra ζ para el sistema prototipo de segundo orden.

Las figuras muestran el efecto de desplazar los polos del sistema de orden 2 sobre segmentos de rectas particulares.

a) misma parte real.

b) misma parte imaginaria.

c) misma rel. De amortiguamiento ζ .



Respuesta del sistema de orden 2 con un cero

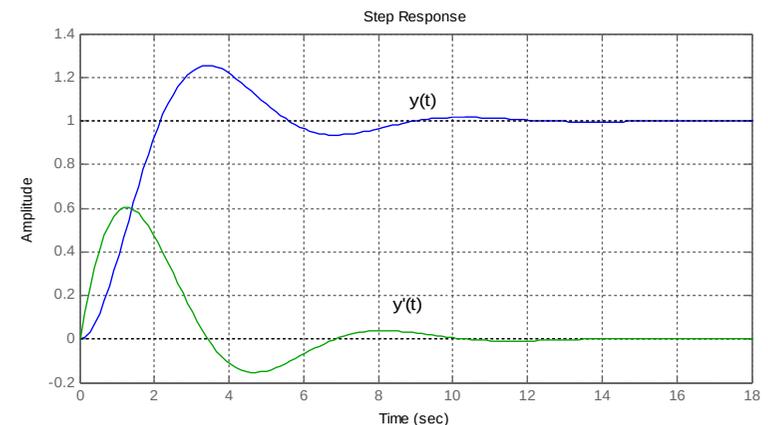
Si $H(s)$ tiene ahora un cero:

$$H(s) = \frac{\omega_n^2 (\alpha s + 1)}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2}$$

La respuesta a escalón es $y(t) + \alpha \cdot y'(t)$ donde $y(t)$ es la respuesta a escalón ya calculada (sistema sin ceros) y $y'(t)$ su derivada (respuesta a impulso).

$$y(t) = 1 - \frac{e^{-\zeta\omega_n t}}{\sqrt{1-\zeta^2}} \operatorname{sen}\left(\omega_n \sqrt{1-\zeta^2} t + \operatorname{artg} \frac{\sqrt{1-\zeta^2}}{\zeta}\right)$$

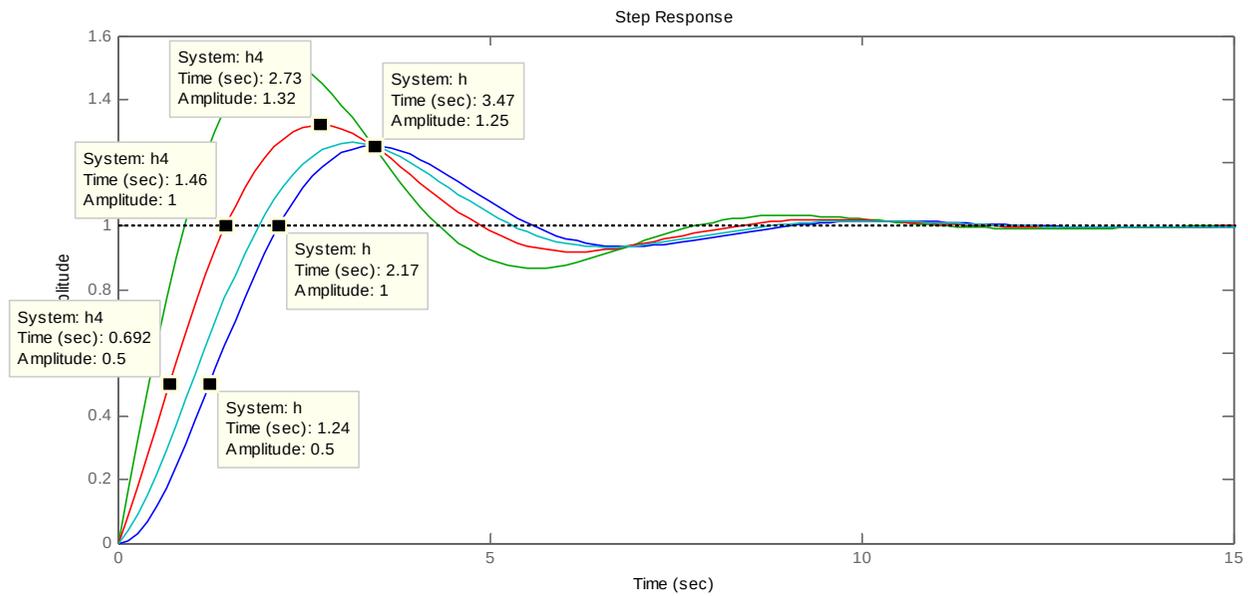
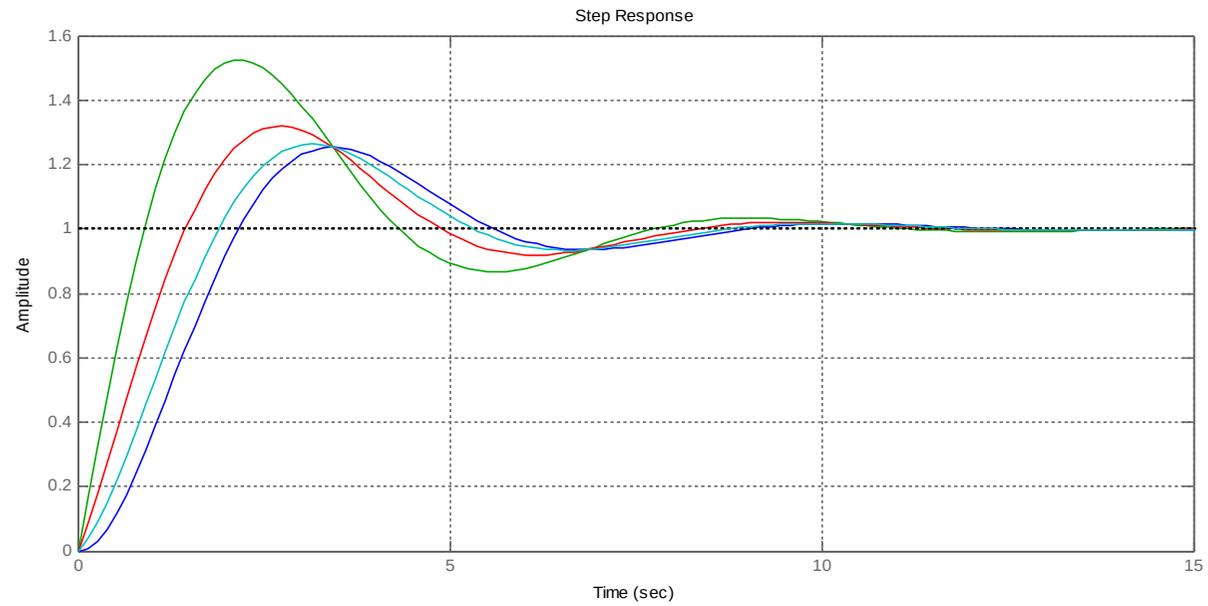
$$y'(t) = \frac{\omega_n}{\sqrt{1-\zeta^2}} e^{-\zeta\omega_n t} \operatorname{sen}(\omega_n \sqrt{1-\zeta^2} t)$$



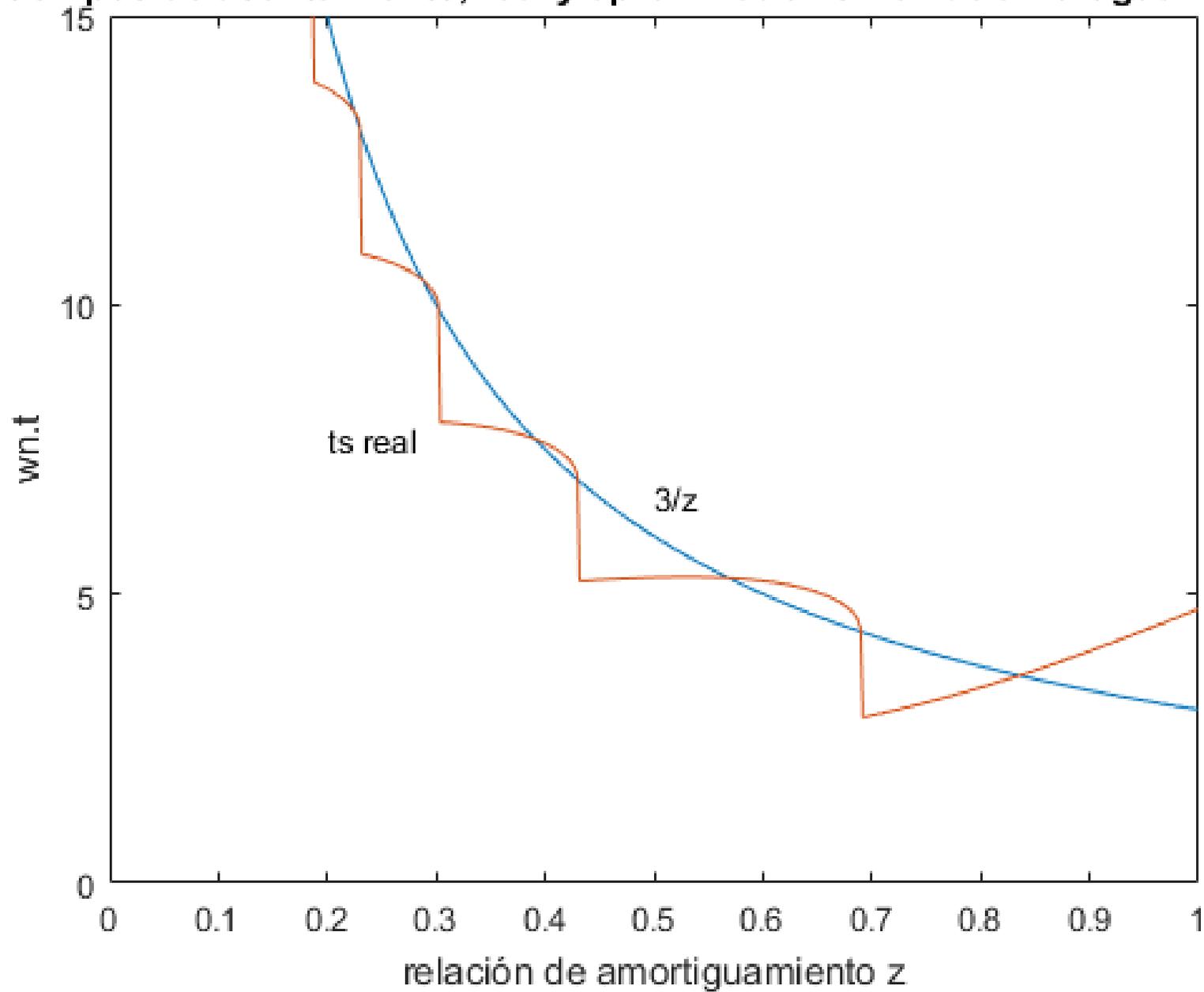
La figura muestra ambas funciones. Obsérvese que:

- 1) Al ser su derivada, $y'(t)$ es nula en los máximos y mínimos de $y(t)$
- 2) El decaimiento exponencial es el mismo, y depende solo de la parte real de los polos.

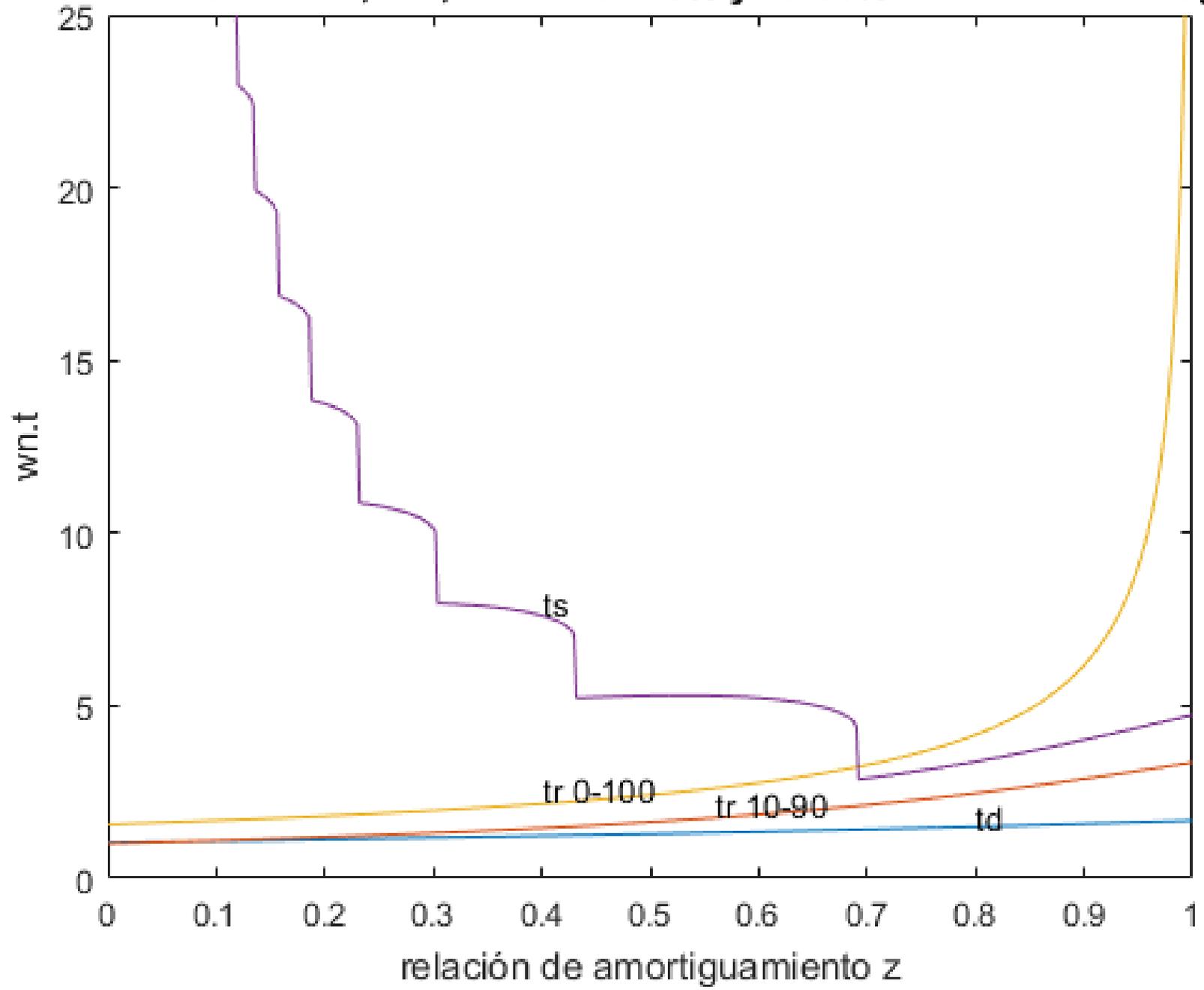
3) La frecuencia real de las oscilaciones es la misma: $\omega_d = \omega_n \sqrt{\zeta^2 - 1}$



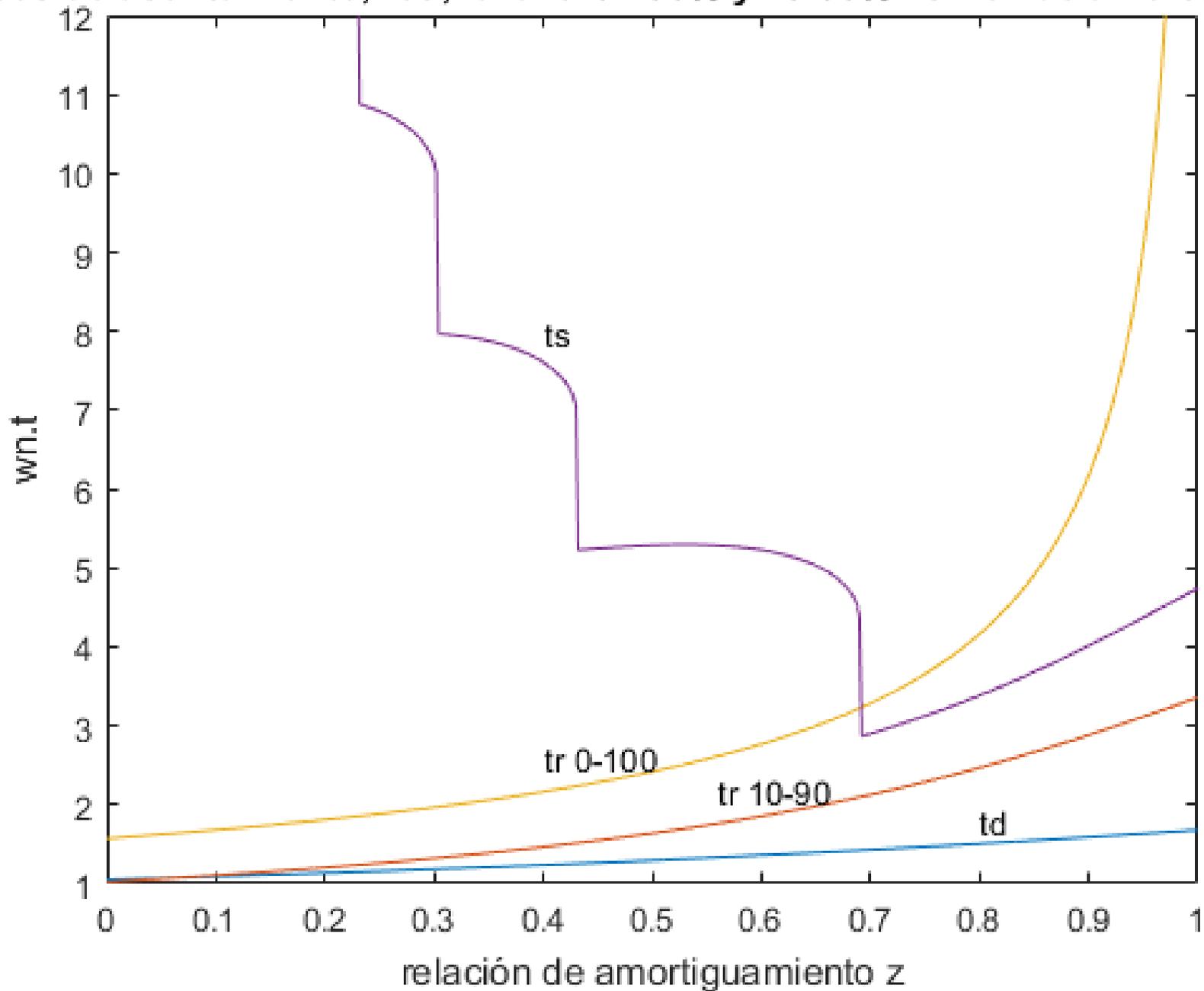
tiempos de asentamiento, real y aproximado vs. rel. de amortiguamiento



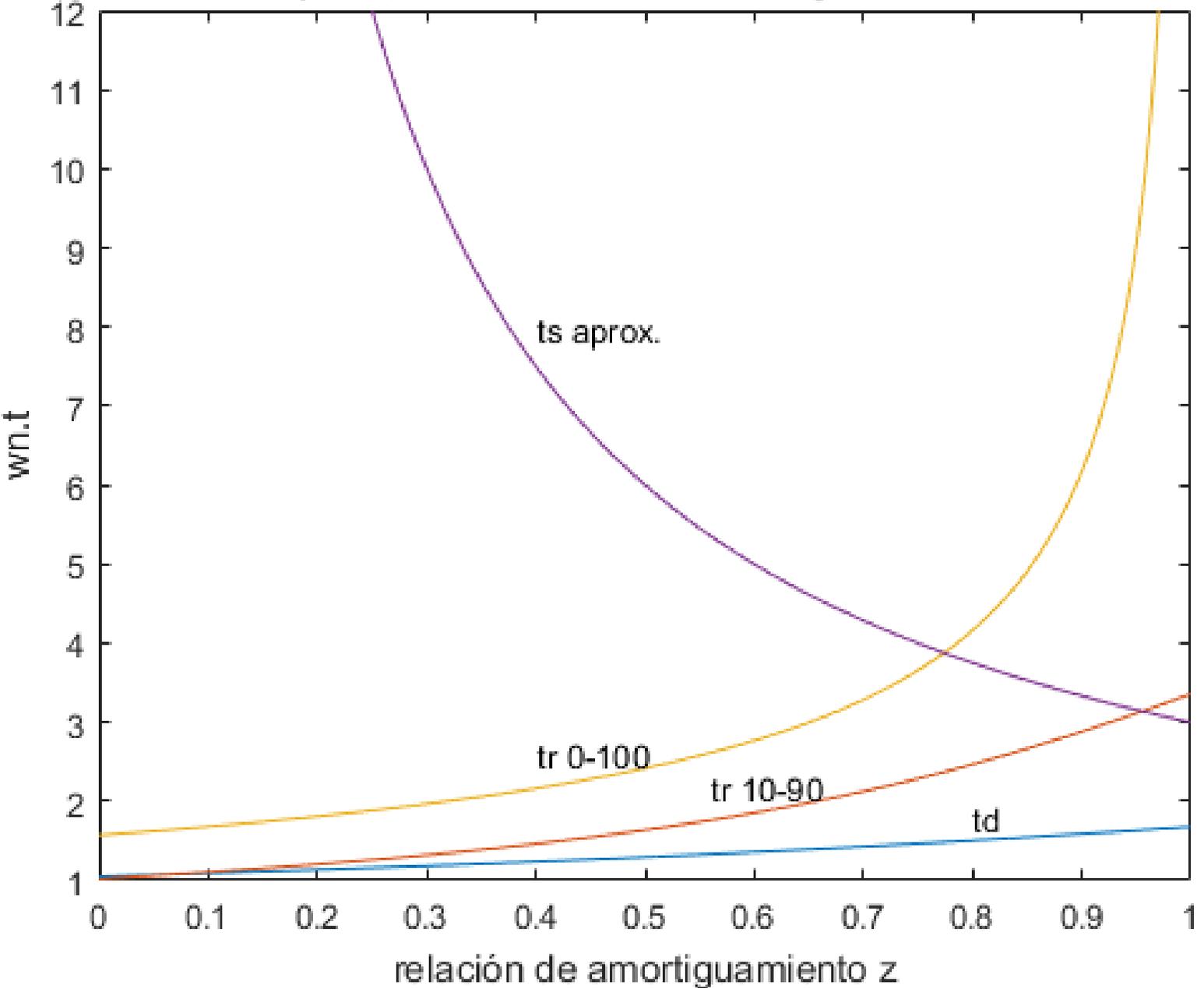
tiempos de asentamiento, ret., levant. 0-100% y 10-90% vs. rel. de amortiguamie



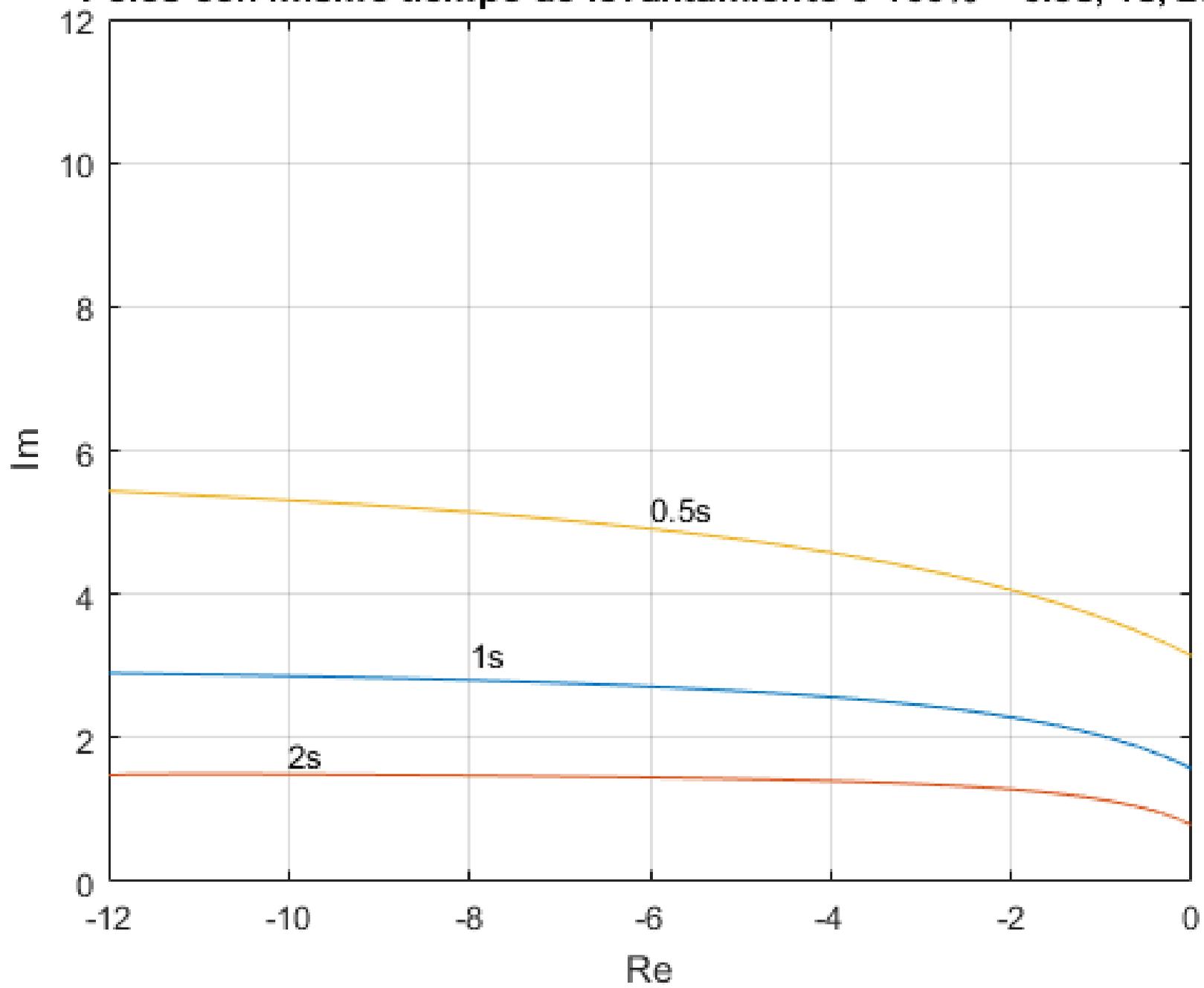
tiempos de asentamiento, ret., levant. 0-100% y 10-90% vs. rel. de amortiguamiento



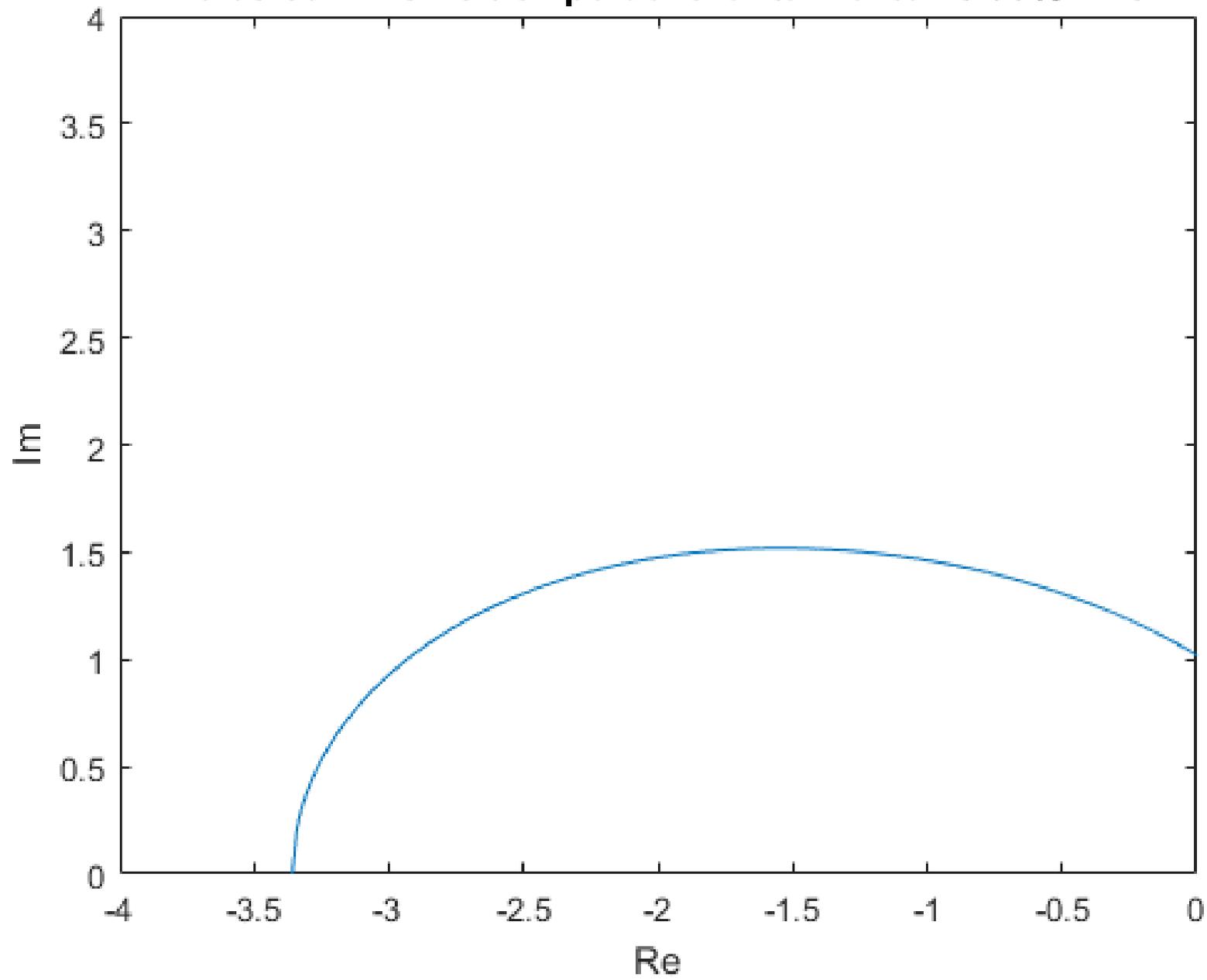
os de asentamiento aprox., levantamiento 0-100% y 10-90% vs. rel. de amortigu



Polos con mismo tiempo de levantamiento 0-100% = 0.5s, 1s, 2s



Polos con mismo tiempo de levantamiento 10-90% = 1s



Polos con $tr_{0-100\%} = 1s$, $tr_{10-90\%} = 1s$, $ts = 1s$

