# Transformada de Laplace (material de apoyo)

André Luiz Fonseca de Oliveira *
Michel Hakas †

**Resumen**

En este artículo se revisará los conceptos básicos para la utilización de la transformada de Laplace en la resolución de ecuaciones diferenciales lineales. Se tiene como objetivo básico el aprendizaje y comprensión de los siguientes tópicos:

- La transformada de Laplace. Definición y propiedades.
- Resolución de ecuaciones diferenciales.

# 1 La Transformada de Laplace

## 1.1 Definición

**Definición 1 (Transformada de Laplace unilateral).** La transformada de Laplace (unilateral) de la función $f(t)$ esta definida como

$$\mathcal{L}\left[f(t)\right] = F(s) = \int_{0^-}^{\infty} f(t)e^{-st}\,\mathrm{d}t \tag{1}$$

siendo $s$ una variable compleja ($s = \sigma + j\omega$).

*Observación* 1. La integral converge absolutamente en el semiplano $\sigma_a < \sigma$, donde $\sigma_a$ es denominada la *abscisa de convergencia*. En este semiplano $F(s)$ es analítica.

*Observación* 2. Condiciones suficientes:

- $f(t)$ es continua a tramos.
- f(t) es de orden exponencial.

$$\exists\, t_0, N, \hat{\sigma} \,/\, |f(t)| < Me^{\hat{\sigma}t}, \forall t > t_0$$

*Ejemplo* 1. Impulso unitario.

$$\mathcal{L}[\delta(t)] = \int_{0^-}^{\infty} \delta(t)e^{-st}\,\mathrm{d}t = \int_{0^-}^{0^+} \delta(t)\,\mathrm{d}t = 1.$$

*Observación* 3. Se tiene que $f(t)\delta(t-t_0) = f(t_0)\delta(t-t_0)$.

*Ejemplo* 2. Escalón unitario.

$$\mathbf{1}(t) = \left\{ \begin{array}{ll} 0, & t < 0 \\ 1, & t > 0 \end{array} \right. \Rightarrow \mathcal{L}[\mathbf{1}(t)] = \int_{0^+}^{\infty} e^{-st}\,\mathrm{d}t = \left.\frac{e^{-st}}{-s}\right|_{0^+}^{\infty} = \frac{1}{s}.$$

*andre@iie.edu.uy
†mich@iie.edu.uy

*Observación* 4. Las señales normalmente utilizadas en este texto son denominadas *causales*, o sea, estarán representadas por funciones del tipo

$$\hat{f}(t) = \begin{cases} 0, & t < 0 \\ f(t), & t > 0 \end{cases} \Rightarrow \hat{f}(t) = f(t)\mathbf{1}(t).$$

Por simplicidad muchas veces se notará simplemente $f(t)$.

*Ejemplo* 3. Sea la función $f(t) = e^{-at}\mathbf{1}(t)$.

$$\mathcal{L}[e^{-at}\,\mathbf{1}(t)] = \int_{0^+}^{\infty} e^{-at}e^{-st}\,\mathrm{d}t = \int_{0^+}^{\infty} e^{-(s+a)t}\,\mathrm{d}t = \left.\frac{e^{-(s+a)t}}{-(s+a)}\right|_{0^+}^{\infty} = \frac{1}{s+a}.$$

## 1.2 Propiedades

A continuación se detallará las principales propiedades de la transformada de Laplace.

1. *Linealidad.* Sean las funciones $f_1(t)$ y $f_2(t)$ con transformadas $F_1(s)$ y $F_2(s)$, respectivamente. Si se define $g(t) = c_1 f_1(t) + c_2 f_2(t)$, $c_1$ y $c_2$ complejos se tiene que

$$\mathcal{L}\left[g(t)\right] = \mathcal{L}\left[c_1 f_1(t) + c_2 f_2(t)\right] = c_1 F(s) + c_2 F_2(s), \quad \forall\, c_1, \quad \forall\, c_2. \tag{2}$$

   *Ejemplo* 4. Sea $f(t) = \left(e^{-t} + e^{-2t}\right)\mathbf{1}(t)$.

$$\mathcal{L}[f(t)] = F(s) = \frac{1}{s+1} + \frac{1}{s+2} = \frac{2s+3}{(s+1)(s+2)}.$$

   *Ejemplo* 5. Considere la función $f(t) = \mathrm{sen}(\omega t)\mathbf{1}(t)$.

$$\mathcal{L}[f(t)] = \mathcal{L}\left[\frac{e^{j\omega t} - e^{-j\omega t}}{j2}\right] = \frac{1}{j2}\left[\frac{1}{s - j\omega} - \frac{1}{s + j\omega}\right] = \frac{\omega}{s^2 + \omega^2}.$$

   Análogamente se puede demostrar que

$$\mathcal{L}[\cos(\omega t)\mathbf{1}(t)] = \frac{s}{s^2 + \omega^2}.$$

2. *Diferenciación real.* Sea la función $f(t)$ con transformada de Laplace $F(s)$. Se tiene que

$$\mathcal{L}\left[\frac{df(t)}{dt}\right] = sF(s) - f(0^-). \tag{3}$$

   *Ejemplo* 6. Sea $f(t) = \mathbf{1}(t)$. En este caso se tiene que

$$\mathcal{L}\left[\frac{d\mathbf{1}(t)}{dt}\right] = \begin{cases} \mathcal{L}\left[\delta(t)\right] = 1 \\ s\frac{1}{s} - 0 = 1 \end{cases}$$

   *Ejemplo* 7.

$$\mathcal{L}\left[\frac{d\delta(t)}{dt}\right] = s.$$

   *Ejemplo* 8.

$$\mathcal{L}\left[\frac{d\left(\mathrm{sen}(\omega t)\mathbf{1}(t)\right)}{dt}\right] = \begin{cases} s\mathcal{L}\left[\mathrm{sen}(\omega t)\mathbf{1}(t)\right] - 0 = s\omega/(s^2 + \omega^2) \\ \mathcal{L}\left[\omega\cos(\omega t)\mathbf{1}(t)\right] = \omega s/(s^2 + \omega^2) \end{cases}$$

*Ejemplo* 9.

$$\mathcal{L}\left[\frac{d\left(\cos(\omega t)\mathbf{1}(t)\right)}{dt}\right] = \begin{cases} s\mathcal{L}\left[\cos(\omega t)\mathbf{1}(t)\right] - 0 = s^2/(s^2+\omega^2) \\ \mathcal{L}\left[-\omega\,\mathrm{sen}(\omega t)\mathbf{1}(t) + \delta(t)\right] = -\omega^2/(s^2+\omega^2) + 1 = s^2/(s^2+\omega^2) \end{cases}$$

3. *Diferenciación compleja.* Sea la función $f(t)$ con transformada de Laplace $F(s)$. Entonces, excepto en los polos de $F(s)$,

$$\mathcal{L}\left[t f(t)\right] = -\frac{dF(s)}{ds}. \tag{4}$$

En forma genérica

$$\mathcal{L}\left[t^n f(t)\right] = (-1)^n \frac{d^n F(s)}{ds^n}. \tag{5}$$

*Ejemplo* 10. Sea la función rampa unitaria $f(t) = t\mathbf{1}(t)$.

$$\mathcal{L}\left[t\mathbf{1}(t)\right] = -\frac{d}{ds}\left(\frac{1}{s}\right) = \frac{1}{s^2}.$$

4. *Integración real.* Sea la función $f(t)$ con transformada de Laplace $F(s)$. Se tiene que

$$\mathcal{L}\left[\int_{0^-}^{t} f(t)\,dt\right] = \frac{F(s)}{s}. \tag{6}$$

Si se considera la transformada de la primitiva (sin límites de integración)

$$\mathcal{L}\left[\int f(t)\,dt\right] = \frac{F(s)}{s} + \frac{1}{s}\left(\int f(t)\,dt\right)_{t=0^-}. \tag{7}$$

*Ejemplo* 11. Considere la función parabólica $f(t) = t^2/2\mathbf{1}(t)$.

$$f(t) = \frac{t^2}{2} = \int_{0^-}^{t} \tau d\tau \Rightarrow \mathcal{L}\left[\frac{t^2}{2}\right] = \frac{1}{s}\frac{1}{s^2} = \frac{1}{s^3}.$$

5. *Traslación en el tiempo.* Sea la función $f(t)$ con transformada de Laplace $F(s)$. Se tiene que

$$\mathcal{L}\left[f(t-t_0)\,\mathbf{1}(t-t_0)\right] = e^{-t_0 s}F(s). \tag{8}$$

*Ejemplo* 12.

$$\mathcal{L}\left[\mathbf{1}(t-t_0)\right] = \frac{e^{-t_0 s}}{s}.$$

*Ejemplo* 13. Considere la función $g(t) = 2\mathbf{1}(t-1) + 2\mathbf{1}(t-3) - 2\mathbf{1}(t-5) - 2\mathbf{1}(t-7)$.

$$\mathcal{L}\left[g(t)\right] = \frac{2}{s}\left(e^{-s} + e^{-3s} - e^{-5s} - e^{-7s}\right).$$

6. *Traslación en frecuencia.* Sea la función $f(t)$ con transformada de Laplace $F(s)$. Se tiene que

$$\mathcal{L}\left[e^{-s_0 t}f(t)\right] = F(s+s_0). \tag{9}$$

*Ejemplo* 14.

$$\mathcal{L}\left[\cos(\omega t)\, f(t)\right] = \mathcal{L}\left[\frac{e^{j\omega t}}{2} f(t) + \frac{-j\omega t}{2} f(t)\right] = \frac{1}{2}\left[F(s-j\omega) + F(s+j\omega)\right]$$

*Ejemplo* 15. Sea la función $g(t) = t\cos(\omega t)\, \mathbf{1}(t)$. Por el resultado del ejemplo anterior

$$\mathcal{L}\left[g(t)\right] = \frac{1}{2}\left[\frac{1}{(s-j\omega)^2} + \frac{1}{(s+j\omega)^2}\right] = \frac{s^2-\omega^2}{(s^2+\omega^2)^2}$$

7. *Cambio en la escala de tiempo.* Sea la función $f(t)$ con transformada de Laplace $F(s)$. Sea la señal $f(ct)$ con $c > 0$.

$$\mathcal{L}\left[f(ct)\right] = \frac{1}{c} F\left(\frac{s}{c}\right). \tag{10}$$

*Ejemplo* 16.

$$\mathcal{L}\left[e^{-3(2t)}\mathbf{1}(2t)\right] = \frac{1}{2}\frac{1}{(s/2)+3} = \frac{1}{s+6} = \mathcal{L}\left[e^{-6t}\mathbf{1}(t)\right]$$

8. *Transformada del producto de convolución.* Sean dos señales $f_1(t)$ y $f_2(t)$. El operador *producto de convolución* genera una nueva señal $g(t)$ tal que

$$g(t) = f_1(t) * f_2(t) = \int_0^t f_1(t-\tau) f_2(\tau) d\tau = \int_0^t f_2(t-\tau) f_1(\tau) d\tau = f_2(t) * f_1(t). \tag{11}$$

La transformada de Laplace de $g(t)$ está dada por

$$\mathcal{L}\left[g(t)\right] = \mathcal{L}\left[f_1(t) * f_2(t)\right] = F_1(s)\, F_2(s), \tag{12}$$

siendo $F_1(s)$ y $F_2(s)$ las transformadas de $f_1(t)$ y $f_2(t)$, respectivamente.

*Ejemplo* 17.

$$\mathcal{L}\left[\delta(t) * f(t)\right] = 1 \times F(s) = F(s) = \mathcal{L}\left[f(t)\right] \Rightarrow \delta(t) * f(t) = f(t).$$

*Ejemplo* 18. Sea la función $f(t) = t\mathbf{1}(t)$.

$$\mathcal{L}\left[\mathbf{1}(t) * \mathbf{1}(t)\right] = \frac{1}{s}\frac{1}{s} = \frac{1}{s^2} = \mathcal{L}\left[t\, \mathbf{1}(t)\right] \Rightarrow \mathbf{1}(t) * \mathbf{1}(t) = t\, \mathbf{1}(t).$$

9. *Teorema del valor inicial.*

$$lim_{s\to+\infty} sF(s) = f(0^+). \tag{13}$$

La función $f(t)$ no debe contener impulsos o singularidades de orden más alto en $t = 0$.

*Ejemplo* 19.

$$\mathbf{1}(0^+) = lim_{s\to+\infty}\, s\frac{1}{s} = 1.$$

*Ejemplo* 20.

$$\mathcal{L}\left[\cos(\omega t)\mathbf{1}(t)\right] = \frac{s}{s^2+\omega^2}, \quad lim_{s\to+\infty} \frac{s^2}{s^2+\omega^2} = 1 = \cos(0^+)\mathbf{1}(0^+)$$

10. *Teorema del valor final.* Sea una señal $f(t)$ tal que existe

$$lim_{t\to+\infty} f(t).$$

Entonces

$$lim_{s\to0^+} sF(s) = lim_{t\to+\infty} f(t). \tag{14}$$

Para que exista el límite $sF(s)$ debe tener todos sus polos con parte real estrictamente negativa.

*Ejemplo* 21.

$$lim_{t\to+\infty}\, \mathbf{1}(t) = lim_{s\to0}\, s\frac{1}{s} = 1.$$

*Ejemplo* 22. Sea $f(t) = K\left(1 - e^{-at}\right)\mathbf{1}(t)$.

$$\mathcal{L}\left[f(t)\right] = F(s) = \frac{K}{s} - \frac{K}{s+a} = \frac{Ka}{s(s+a)}, \quad lim_{t\to+\infty}\, f(t) = lim_{s\to0}\, sF(s) = K.$$

# 2 Transformación inversa

Dada la función $F(s)$ la transformada inversa permite conocer la función $f(t)$ que tiene a $F(s)$ como transformada de Laplace.

$$F(s) = \mathcal{L}\left[f(t)\right] \Rightarrow f(t) = \mathcal{L}^{-1}\left[F(s)\right].$$

## 2.1 Expansión en fracciones simples

Cuando $F(s)$ es una función racional (división de polinomios en $s$), el método más práctico de la obtención de la transformada inversa es mediante la *expansión en fracciones simples.*

Una función racional

$$F(s) = \frac{a_m s^m + a_{m-1}s^{m-1} + \dots a_1 s + a_0}{s^n + b_{n-1}s^{n-1} + \dots b_1 s + b_0}$$

es denominada *estrictamente propia* si el orden del polinomio en el denominador es mayor que el del polinomio en el numerador ($n > m$).

El método de expansión en fracciones simples puede ser utilizado en el caso de funciones estrictamente propias. Cuando la función racional no cumpla este requerimiento se deberá realizar la división entre los polinomios del numerador y denominador de forma a expresar la función como la suma de un polinomio en $s$ y una función estrictamente propia.

### 2.1.1 Polo real simple

Para cada polo real simple $p_a$ la expansión posee un término del tipo $A/(s - p_a)$. Esto ocasiona la existencia de un término del tipo $Ae^{p_a t}$ en la transformada inversa.

Los coeficientes de la expansión son calculados como

$$F(s) = \frac{n(s)}{d(s)} = \frac{n(s)}{(s - p_a)\hat{d}(s)} = \frac{A}{s - p_a} + \frac{\hat{n}(s)}{\hat{d}(s)}$$

en donde los polinomios $(s - p_a)$ y $\hat{d}(s)$ son primos entre si ($s = p_a$ es un polo simple). Luego

$$(s - p_a)F(s)\big|_{s=p_a} = \left[A + \frac{\hat{n}(s)(s - p_a)}{\hat{d}(s)}\right]_{s=p_a} = A.$$

Genéricamente

$$A = (s - p_a)F(s)\big|_{s=p_a} \tag{15}$$

*Ejemplo* 23.

$$
\begin{aligned}
F(s) &= \frac{2(s+10)}{(s+1)(s+4)} = \frac{A}{s+1} + \frac{B}{s+4},\\
A &= (s+1)F(s)\big|_{s=-1} = \frac{2(-1+10)}{(-1+4)} = 6,\\
B &= (s+4)F(s)\big|_{s=-4} = \frac{2(-4+10)}{(-4+1)} = -4,\\
F(s) &= \frac{6}{s+1} - \frac{4}{s+4} \Rightarrow f(t) = \left(6e^{-t} - 4e^{-4t}\right)\mathbf{1}(t).
\end{aligned}
$$

### 2.1.2 Polos complejos conjugados simples

Cada par de polos complejos conjugados (siempre aparecen en par debido a que los coeficientes del polinomio del denominador son reales) determinan la existencia de un término del tipo $Ge^{\sigma t}\cos(\omega t + \theta)$ en la transformada inversa.

El cálculo de las constantes de la expansión ($G$ y $\theta$) puede ser realizado de distintas formas. Considere los polos $s = \sigma \pm j\omega$.

$$
F(s) = \frac{n(s)}{(s-\sigma-j\omega)(s-\sigma+j\omega)\hat{d}(s)} = \frac{A}{s-\sigma-j\omega} + \frac{A^*}{s-\sigma-j\omega} + \frac{\hat{n}(s)}{\hat{d}(s)}
$$

siendo $A$ y $A^*$ complejos conjugados. Esta forma de cáculo es similar a la de 2.1.1. Se tiene que

$$
A = (s-\sigma-j\omega)F(s)\big|_{s=\sigma+j\omega} = re^{j\theta} \quad \text{y} \quad A^* = (s-\sigma+j\omega)F(s)\big|_{s=\sigma-j\omega} = re^{-j\theta}
$$

$$
\Rightarrow f(t) = g(t) + \left[Ae^{(\sigma+j\omega)t} + A^*e^{(\sigma-j\omega)t}\right]\mathbf{1}(t) = g(t) + re^{\sigma t}\left[e^{j(\omega t+\theta)} + e^{-j(\omega t+\theta)}\right]\mathbf{1}(t)
$$

$$
\Rightarrow f(t) = g(t) + 2re^{\sigma t}\cos(\omega t+\theta)\,\mathbf{1}(t) = g(t) + Ge^{\sigma t}\cos(\omega t+\theta)\,\mathbf{1}(t).
$$

siendo $g(t) = \mathcal{L}^{-1}\left[\hat{n}(s)/\hat{d}(s)\right]$ y $G = 2r$.

*Ejemplo* 24.

$$
F(s) = \frac{s}{(s+1)(s^2+2s+2)} = \frac{s}{(s+1)(s+1-j)(s+1+j)} = \frac{A}{s+1} + \frac{B}{s+1-j} + \frac{B^*}{s+1+j}
$$

$$
\begin{aligned}
A &= \frac{-1}{(-1)^2 + 2(-1) + 2} = -1,\\
B &= \frac{-1+j}{(-1+j+1)(-1+j+1+j)} = \frac{1}{2} - \frac{j}{2},\\
C &= \frac{-1-j}{(-1-j+1)(-1-j+1-j)} = \frac{1}{2} + \frac{j}{2},
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
f(t) &= \left[-e^{-t} + \frac{1-j}{2}e^{-t+jt} + \frac{1+j}{2}e^{-t-jt}\right]\mathbf{1}(t)\\
&= \left[-e^{-t} + \frac{\sqrt{2}}{2}e^{-j\pi/4}e^{-t+jt} + \frac{\sqrt{2}}{2}e^{j\pi/4}e^{-t-jt}\right]\mathbf{1}(t)\\
&= \left[-e^{-t} + \sqrt{2}\,e^{-t}\frac{1}{2}\left(e^{j(t+\pi/4)} + e^{-j(t-\pi/4)}\right)\right]\mathbf{1}(t)\\
\Rightarrow f(t) &= \left[1 + \sqrt{2}\cos\left(t - \frac{\pi}{4}\right)\right]e^{-t}\mathbf{1}(t).
\end{aligned}
$$

Una forma alternativa de cálculo sería

$$
\begin{aligned}
F(s) &= \frac{n(s)}{(s-\sigma-j\omega)(s-\sigma+j\omega)\hat{d}(s)} = \frac{n(s)}{[(s-\sigma)^2+\omega^2]\,\hat{d(s)}} \\
&= \frac{As+B}{[(s-\sigma)^2+\omega^2]} + \frac{\hat{n}(s)}{\hat{d}(s)} \\
&= \frac{A(s-\sigma)+B+A\sigma}{(s-\sigma)^2+\omega^2} + \frac{\hat{n}(s)}{\hat{d}(s)} \\
&= A\frac{s-\sigma}{(s-\sigma)^2+\omega^2} + \frac{B+A\sigma}{\omega}\,\frac{\omega}{(s-\sigma)^2+\omega^2} + \frac{\hat{n}(s)}{\hat{d}(s)}
\end{aligned}
$$

$$
\Rightarrow f(t) = g(t) + \left[A\cos(\omega t) + \frac{B+A\sigma}{\omega}\,\mathrm{sen}(\omega t)\right] e^{\sigma t}\mathbf{1}(t) = g(t) + Ge^{\sigma t}\cos(\omega t+\theta)\mathbf{1}(t).
$$

*Ejemplo* 25.

$$
F(s) = \frac{s}{(s+1)(s^2+2s+2)} = \frac{s}{(s+1)\,[(s+1)^2+1]} = \frac{-1}{s+1} + \frac{As+B}{(s+1)^2+1}
$$

$$
-s^2-2s-2+As^2+As+Bs+B = s \Rightarrow A=1, \quad B=2
$$

$$
\begin{aligned}
\Rightarrow F(s) &= \frac{-1}{s+1} + \frac{s+2}{(s+1)^2+1} \\
&= \frac{-1}{s+1} + \frac{s+1}{(s+1)^2+1} + \frac{1}{(s+1)^2+1} \\
f(t) &= \left[e^{-t} + e^{-t}\cos(t) + e^{-t}\mathrm{sen}(t)\right]\mathbf{1}(t) \\
&= [1+\cos(t)+\mathrm{sen}(t)]\,e^{-t}\mathbf{1}(t) \\
&= \left[1+\sqrt{2}\cos\left(t-\frac{\pi}{4}\right)\right] e^{-t}\mathbf{1}(t).
\end{aligned}
$$

### 2.1.3 Polos múltiples

En el caso de la existencia de polos con multiplicidad $m$ habrán $m$ términos en la expansión en fracciones simples de la forma $A_j/(s-p)^j$, $j=1,\ldots,m$.Los coeficientes de la expansión pueden ser calculados como

$$
A_j = \frac{1}{(m-j)!}\frac{d^{m-j}}{ds^{m-j}}\left[(s-p)^m F(s)\right]\Big|_{s=p}, \quad j=1,\ldots,m.
$$

Esto implica la existencia de $m$ términos en la transformada inversa, cada uno de la forma

$$
\frac{A_j}{(j-1)!}\,t^{j-1}\,e^{pt}, \quad j=1,\ldots,m.
$$

*Ejemplo* 26.

$$
F(s) = \frac{3}{(s+1)^2(s+2)} = \frac{A}{s+2} + \frac{B}{(s+1)^2} + \frac{C}{s+1}
$$

$$
A = \frac{3}{(-2+1)^2} = 3, \quad B = \frac{3}{-1+2} = 3,\ C = \frac{d}{ds}\left[\frac{3}{s+2}\right]\Bigg|_{s=-1} = \frac{-3}{(s+2)^2}\Bigg|_{s=-1} = -3,
$$

$$
\Rightarrow f(t) = \left[3e^{-2t} + 3te^{-t} - 3e^{-t}\right]\mathbf{1}(t).
$$

*Ejemplo* 27.

$$F(s) = \frac{s^3+5}{(s+1)^4} = \frac{A_1}{s+1} + \frac{A_2}{(s+1)^2} + \frac{A_3}{(s+1)^3} + \frac{A_4}{(s+1)^4}$$

$$A_4 = \left(s^3+5\right)\Big|_{s=-1} = 4, \qquad A_3 = \tfrac{1}{(4-3)!}\left(3s^2\right)\Big|_{s=-1} = \tfrac{1}{1!}\,3 = 3,$$

$$A_2 = \tfrac{1}{(4-2)!}\left(6s\right)\big|_{s=-1} = \tfrac{1}{2!}\,-6 = -3, \quad A_2 = \tfrac{1}{(4-1)!}\left(6\right)\big|_{s=-1} = \tfrac{1}{3!}\,6 = 1$$

$$\Rightarrow f(t)\left[\left(1-3t+\frac{3}{2}t^2+\frac{2}{3}t^3\right)e^{-t}\right]\mathbf{1}(t).$$

# 3 Resolución de ecuaciones diferenciales lineales

En esta sección se estudiará la aplicación de la transformada de Laplace en la resolución de ecuaciones diferenciales del tipo

$$\frac{d^n y}{dt^n} + a_{n-1}\frac{d^{n-1}y}{dt^{n-1}} + \cdots + a_1\frac{dy}{dt} + a_0 y = u(t)$$

siendo $u(t)$ una función dada y considerando condiciones iniciales

$$\frac{d^{n-1}y}{dt^{n-1}}(0^-) = \alpha_{n-1}, \ldots, \frac{dy}{dt}(0^-) = \alpha_1, y(0^-) = \alpha_0$$

Se obtendrá la como solución la función $y(t)$, $t > 0$, que satisface la ecuación diferencial.

*Ejemplo* 28. Sea la ecuación diferencial

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 4\frac{dx}{dt} + 3x = u(t)$$

siendo $u(t) = e^{-2t}\mathbf{1}(t)$ y las condiciones iniciales nulas. Aplicando la transformada de Laplace se tiene que

$$\mathcal{L}\left[\frac{d^2x}{dt^2}\right] + 4\mathcal{L}\left[\frac{dx}{dt}\right] + \mathcal{L}\left[3x\right] = \mathcal{L}\left[e^{-2t}\mathbf{1}(t)\right]$$

$$s^2X(s) + 4sX(s) + 3X(s) = \frac{1}{s+2} \Rightarrow \left(s^2+4s+3\right)X(s) = \frac{1}{s+2}$$

$$X(s) = \frac{1}{(s+2)(s^2+4s+3)} = \frac{1}{(s+2)(s+1)(s+3)} = \frac{1/2}{s+1} - \frac{1}{s+2} + \frac{1/2}{s+3}$$

$$\Rightarrow x(t) = \left[\frac{1}{2}\,e^{-t} - e^{-2t} + \frac{1}{2}\,e^{-3t}\right]\mathbf{1}(t).$$

*Ejemplo* 29. Sea la ecuación diferencial del ejemplo anterior, pero ahora con entrada $u(t) = 0$ y condiciones iniciales $x(0^-) = 1$ y $\dot{x}(0^-) = 2$. En este caso

$$\mathcal{L}\left[\frac{d^2x}{dt^2}\right] + 4\mathcal{L}\left[\frac{dx}{dt}\right] + \mathcal{L}\left[3x\right] = 0$$

$$\left[s^2X(s) - sx(0^-) - \dot{x}(0^-)\right] + 4\left[sX(s) - x(0^-)\right] + 3X(s) = 0$$

$$\left(s^2 + 4s + 3\right)X(s) = s + 2 + 4 = s + 6$$

$$X(s) = \frac{s+6}{(s+1)(s+3)} = \frac{5/2}{s+1} - \frac{3/2}{s+3}$$

$$\Rightarrow x(t) = \left[\frac{5}{2}\,e^{-t} - \frac{3}{2}\,e^{-3t}\right]\mathbf{1}(t).$$

*Ejemplo* 30. Considere una vez más la ecuación diferencial

$$\frac{d^2x}{dt^2} + 4\frac{dx}{dt} + 3x = u(t).$$

Se considera una entrada $u(t) = e^{-2t}\mathbf{1}(t)$ y condiciones iniciales $x(0^-) = 1$ y $\dot{x}(0^-) = 2$.

$$\left[s^2X(s) - sx(0^-) - \dot{x}(0^-)\right] + 4\left[sX(s) - x(0^-)\right] + 3X(s) = \frac{1}{s+2}$$

$$X(s) = \frac{s+6}{(s+1)(s+3)} + \frac{1}{(s+1)(s+2)(s+3)}$$

$$\Rightarrow x(t) = x_h(t) + x_f(t) = \left[3e^{-t} - e^{-2t} - e^{-3t}\right]\mathbf{1}(t).$$

# Ejercicios

*Ejercicio* 1. Halle la transformada de Laplace de las siguientes funciones:

$$f_1(t) = \left(e^{-0{,}4t} + 2\right)\mathbf{1}(t), \quad f_2(t) = \left(-2e^{-0{,}25t} + 5e^{t}\right)\mathbf{1}(t), \quad f_3(t) = \left(e^{-0{,}2t}\mathrm{sen}(5t)\right)\mathbf{1}(t),$$

$$f_4(t) = \left(5\cos\left(10t + \frac{\pi}{3}\right)\right)\mathbf{1}(t), \quad f_5(t) = \left(te^{-2{,}5t}\right)\mathbf{1}(t), \quad f_6(t) = \left(t^2e^{-t} + 3e^{-4t}\right)\mathbf{1}(t).$$

*Ejercicio* 2. Halle la transformada inversa de Laplace para las siguientes funciones:

$$F_1(s) = \frac{10}{s(s+1)}, \quad F_2(s) = \frac{5}{s(s+1)^2}, \quad F_3(s) = \frac{s+1}{s(s^2+s+1)}, \quad F_4(s) = \frac{6s+3}{s^2},$$

$$F_5(s) = \frac{5s+2}{(s+1)(s+2)^2}, \quad F_6(s) = \frac{1}{s^2(s^2+25)}, \quad F_7(s) = \frac{s+2}{s+1}, \quad F_8(s) = \frac{2s^2+7s+10}{s^2+3s+2}.$$

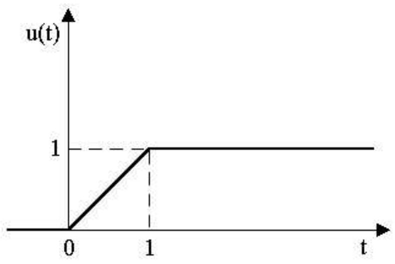
*Ejercicio* 3. Obtener fórmulas generales para las transformadas inversas de las siguientes funciones (todos los parámetros son positivos y $0 < \zeta < 1$):

$$F_1(s) = \frac{K}{(Ts+1)}, \quad F_2(s) = \frac{K}{s\,(Ts+1)}, \quad F_3(s) = \frac{\omega_n^2}{s\,(s^2+2\zeta\omega_n s+\omega_n^2)}, \quad F_4(s) = \frac{\omega_n^2}{s\,(s^2+2\zeta\omega_n s+\omega_n^2)},$$

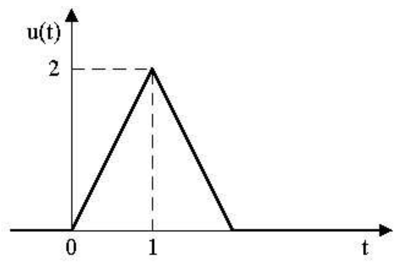
$$F_5(s) = \frac{Ka^2}{(s+a)^2}, \quad F_6(s) = \frac{Ka^2}{s\,(s+a)^2}, \quad F_7(s) = \frac{Kab}{(s+a)\,(s+b)}, \quad F_8(s) = \frac{Kab}{s\,(s+a)\,(s+b)},$$

$$F_9(s) = \frac{bc}{a}\frac{K\,(s+a)}{(s+b)\,(s+c)}, \qquad F_{10}(s) = \frac{(As+B)}{(s^2+\omega_n^2)}, \quad F_{11}(s) = \frac{(As+B)}{(s^2+2\zeta\omega_n s+\omega_n^2)}, \quad F_{12}(s) = \frac{1}{s^n}$$

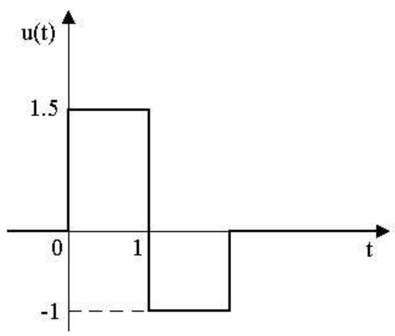
*Ejercicio* 4. Obtenga la transformada de Laplace para las funciones indicadas en las figuras 1(a) - 1(d).



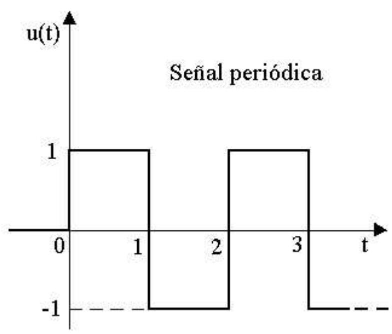

(a) Ejercicio 4-1




(b) Ejercicio 4-2




(c) Ejercicio 4-3



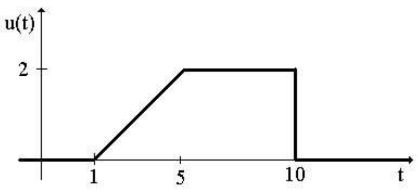

(d) Ejercicio 4-4

Figura 1: Ejercicio 4

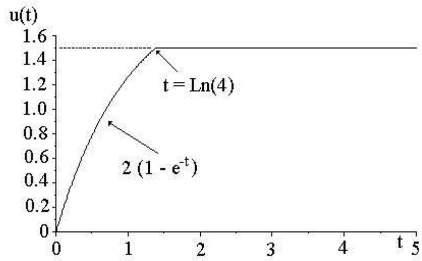
*Ejercicio* 5. Obtenga la transformada de Laplace para las funciones indicadas en las figuras 2(a) - 2(d).

*Ejercicio* 6. Considere la función $f(t)$, tal que $\mathcal{L}\,[f(t)] = F(s)$.

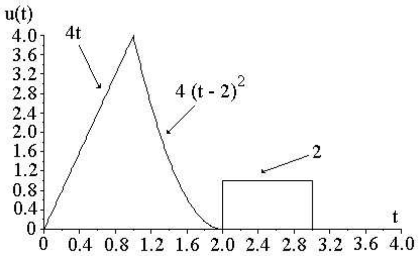
6.1 Expresar $\mathcal{L}\,[f(t)\cos(\omega t)]$ en función de $F(s)$.



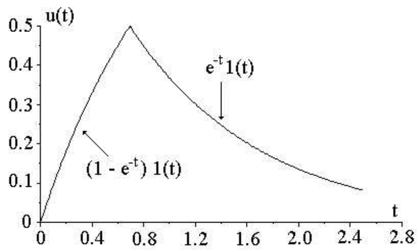

(a) Ejercicio 5-1




(b) Ejercicio 5-2




(c) Ejercicio 5-3




(d) Ejercicio 5-4

Figura 2: Ejercicio 5

6.2 Considere la función $g(t) = t\cos(\omega t)$. Realizar una gráfica de esta función. Utilizando el resultado anterior *(6.a)* calcular $\mathcal{L}\left[g(t)\right]$.

6.3 Considere la función $h(t) = e^{-t}\cos(\omega t)$. Realizar una gráfica de esta función. Utilizando el resultado anterior *(6.a)* calcular $\mathcal{L}\left[h(t)\right]$.

*Ejercicio* 7. Resuelva las ecuaciones diferenciales propuestas a continuación:

7.1

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} + 5x = 1, \quad x(0^-) = 0 \tag{16}$$

7.2

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} + 5x = 0, \quad x(0^-) = -1$$

7.3

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} + 5x = e^{-0,5t}, \quad x(0^-) = 5$$

7.4

$$\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2} + 4\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} + 3x = 0, \quad x(0^-) = 3, \, \dot{x}(0^-) = 0$$

7.5

$$\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2} + 4\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} + 3x = 5 \quad x(0^-) = 3,\, \dot{x}(0^-) = 0,$$

7.6

$$2\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2} + 8\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} + 6x = 2, \quad x(0^-) = 3,\, \dot{x}(0^-) = 0$$

7.7

$$\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2} + 2\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} + x = 1, \quad x(0^-) = 0,\, \dot{x}(0^-) = 0$$

7.8

$$\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2} + 2\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} + x = 1, \quad x(0^-) = 1,\, \dot{x}(0^-) = 1$$

7.9

$$\frac{\mathrm{d}^3x}{\mathrm{d}t^3} + 4\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2} + 5\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} + 2x = e^{-5t}, \quad x(0^-) = 1,\, \dot{x}(0^-) = 1,\, \ddot{x}(0^-) = 0$$

7.10

$$\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2} + 4x = 0 \quad x(0^-) = 1,\, \dot{x}(0^-) = 0$$

7.11

$$\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2} + 4x = \mathrm{sen}(2t) \quad x(0^-) = 1,\, \dot{x}(0^-) = 0$$