1 Solución ejercicios de desarrollo 3

Regla de la cadena y coordenadas polares

Consideremos la función $z = f(x,y)$ diferenciable con respecto a las variables x e y que se compone de la funciónes $x = x(u,v)$, $y = y(u,v)$, también diferenciables con respecto a las variables u y v. Ya sabemos por la regla de la cadena que las derivadas respecto de u y v de la función compuesta se pueden calcular y obtenemos:

$$\frac{\partial f}{\partial u} = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial u}$$

$$\frac{\partial f}{\partial v} = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial v}$$

Aplicación: Uno de los cambios de variable más usando en el cálculo es el cambio de coordenadas cartesianas a coordenadas polares. Consideremos el caso de una función diferenciable $z = f(x,y)$ y las funciones usuales del cambio de varaible dadas por

$$x = x(r,\phi) = rcos\phi$$

$$y = y(r,\phi) = rsen\phi$$

1. Determine las expresiones de $\dfrac{\partial f}{\partial r}$ y $\dfrac{\partial f}{\partial \phi}$.

$$\frac{\partial f}{\partial r} = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial r} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial r}$$

$$\frac{\partial f}{\partial r} = \frac{\partial f}{\partial x}cos\phi + \frac{\partial f}{\partial y}sen\phi$$

$$\frac{\partial f}{\partial r} = \left\langle (\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}), (cos\phi, sen\phi) \right\rangle$$

Observación: Notemos que la derivada parcial de la función respecto a la variable r es el producto punto del gradiente de la función f (En el caso de que la función f sea diferenciable) por el vector unitario $(cos\phi, sen\phi)$.

$$\frac{\partial f}{\partial \phi} = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial \phi} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial \phi}$$

$$\frac{\partial f}{\partial \phi} = -rsen\phi\frac{\partial f}{\partial x} + rcos\phi\frac{\partial f}{\partial y}$$

2. Una de las ecuaciones más importantes en la ingeniería es la ecuación de Laplace:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0$$

Supongamos que $z = f(x,y)$ es una función de dos variables que satisface la ecuación de Laplace. Demostrar que $z = f(x-2y, 2x+y)$ también la satisface.

Definimos las funciones de dos variables

$$u = u(x,y) = x - 2y$$

$$v = v(x,y) = 2x + y$$

Notamos que las funciones u y v como funciones de las variables x y y son funciones diferenciables. Por el teorema de la regla de la cadena

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial v}\frac{\partial v}{\partial x}$$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial z}{\partial u} + 2\frac{\partial z}{\partial v}$$

Calculemos ahora las derivadas de segundo orden

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial u} + 2\frac{\partial z}{\partial v}\right) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial u}\right) + 2\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial v}\right)$$

Observación: z depende de las variables u y v. Y estas a su vez de las variables x e y. Por lo tanto esa relación de dependencia también se hace presente en $\frac{\partial z}{\partial u}$ y $\frac{\partial z}{\partial v}$. Es decir, las funciones $\frac{\partial z}{\partial u}$ y $\frac{\partial z}{\partial v}$ también dependen de las variables x e y. En consecuencia:

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial u}\right) = \frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{\partial z}{\partial u}\right)\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{\partial z}{\partial u}\right)\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial^2 z}{\partial u^2}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial^2 z}{\partial v \partial u}\frac{\partial v}{\partial x}$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial v}\right) = \frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{\partial z}{\partial v}\right)\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{\partial z}{\partial v}\right)\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial^2 z}{\partial u \partial v}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial^2 z}{\partial v^2}\frac{\partial v}{\partial x}$$

Por lo tanto

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 z}{\partial u^2} + 4\frac{\partial^2 z}{\partial u \partial v} + 4\frac{\partial^2 z}{\partial v^2}$$

Razonando de manera análoga obtenemos que:

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 4\frac{\partial^2 z}{\partial u^2} - 4\frac{\partial^2 z}{\partial u \partial v} + \frac{\partial^2 z}{\partial v^2}$$

Entonces

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 5\frac{\partial^2 z}{\partial u^2} + 5\frac{\partial^2 z}{\partial v^2} = 5\left(\frac{\partial^2 z}{\partial u^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial v^2}\right) = 0$$

pues, por hipótesis la función original satisface la ecuación de Laplace.

3. Dada una función $f : U \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ (suficientemente diferenciable), se le asocia a ella su laplaciano, denotado por $\nabla^2 f$ y definido por

$$\nabla^2 f = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$$

(Obsérvese que la Ecuación de Laplace del ejemplo anterior es $\nabla^2 f = 0$)

¿Cúal es la expresión del laplaciano en coordenadas polares?

Si $z = f(x,y)$ y las funciones usuales del cambio de variable dadas por

$$x = x(r,\phi) = rcos\phi$$
$$y = y(r,\phi) = rsen\phi$$

por el item [1]

$$\frac{\partial f}{\partial r} = \frac{\partial f}{\partial x}cos\phi + \frac{\partial f}{\partial y}sen\phi$$

$$\frac{\partial f}{\partial \phi} = -rsen\phi\frac{\partial f}{\partial x} + rcos\phi\frac{\partial f}{\partial y}$$

Aplicando el mismo razonamiento de tener en cuenta la depedencia de las variables para calcular las derivadas parciales de segundo orden que se usó en el item [2] tenemos:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial r^2} = \frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{\partial f}{\partial r}\right) = cos^2\phi\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + 2sen\phi cos\phi\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y} + sen^2\phi\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial \phi^2} = \frac{\partial}{\partial \phi}\left(\frac{\partial f}{\partial \phi}\right) = r^2sen^2\phi\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} - 2r^2sen\phi cos\phi\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y} + r^2cos^2\phi\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} - rcos\phi\frac{\partial f}{\partial x} - rsen\phi\frac{\partial f}{\partial y}$$

Entonces

$$\nabla^2 f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 f}{\partial \phi^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial f}{\partial r}$$