

Señales y Sistemas

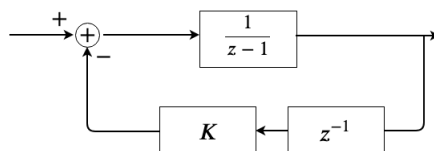
Práctico

Hoja de ejercicios adicionales de práctica para el segundo parcial

Cada ejercicio comienza con un símbolo indicando su dificultad de acuerdo a la siguiente escala: ♦ básico, ★ medio, * avanzado, y ✱ desafiante. Además puede tener un número, como (1.21) que indica el número de ejercicio del libro del curso, *Señales y Sistemas*, Oppenheim/Willsky, 2nd.edition.

♦ Ejercicio 1 (11.43)

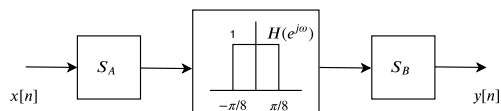
Se tiene el sistema realimentado (en lazo cerrado) de la figura:



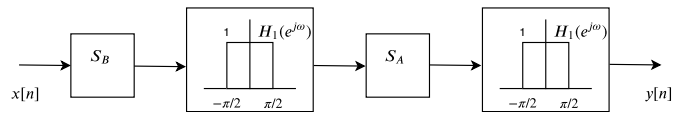
- Determinar si el sistema en lazo abierto es BIBO estable.
- Hallar la transferencia en lazo cerrado.
- Calcular los polos del sistema realimentado en función de K .
- Calcular $K_0 > 0$ tal que si $K = K_0$, los polos caen sobre la circunferencia de radio uno.
- Bosquejar el diagrama de ceros y polos para $K = K_0$.
- Determinar el rango de valores de K para los cuales los polos están fuera del círculo de radio uno.
- Hallar los valores de K para los cuales el sistema realimentado es estable. Notar que con $K = 0$ el sistema está en lazo abierto.

★ Ejercicio 2 (7.20)

Dos sistemas en tiempo discreto S_1 y S_2 tienen la función de realizar un filtro pasa bajos ideal con frecuencia $\pi/4$. El sistema S_1 se ilustra en la siguiente figura:



y el sistema S_2 en la siguiente figura:

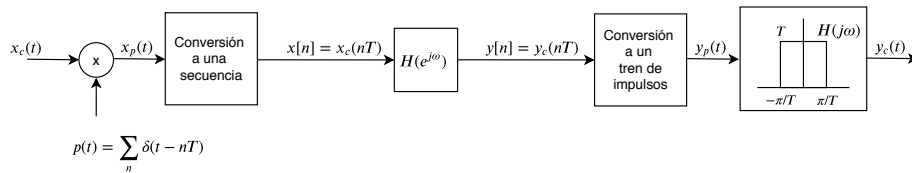


En estas figuras, S_A corresponde a un sistema que inserta un cero después de cada muestra de la entrada, mientras que S_B corresponde a un sistema de decimación que extrae una de cada dos muestras de su entrada.

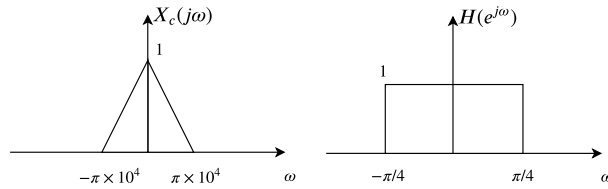
- (a) ¿La función del sistema S_1 corresponde al filtro ideal pasa bajos deseado?
- (b) ¿La función del sistema S_2 corresponde al filtro ideal pasa bajos deseado?

★ **Ejercicio 3 (7.29)**

En la siguiente figura se muestra el sistema completo para el filtro de una señal en tiempo continuo usando un filtro en tiempo discreto.



Si $X_c(j\omega)$ y $H(e^{j\theta})$ son como se muestra en la siguiente figura con $1/T = 20kHz$, dibujar $X_p(j\omega)$, $X(e^{j\theta})$, $Y(e^{j\theta})$, $Y_p(j\omega)$ y $Y_c(j\omega)$.

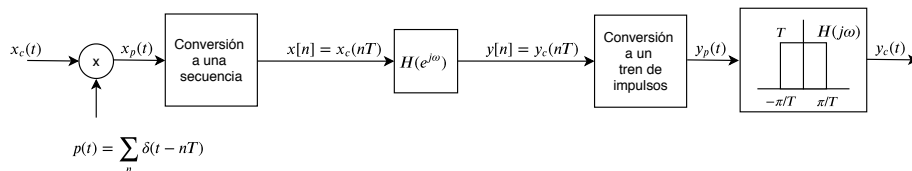


★ **Ejercicio 4 (7.31)**

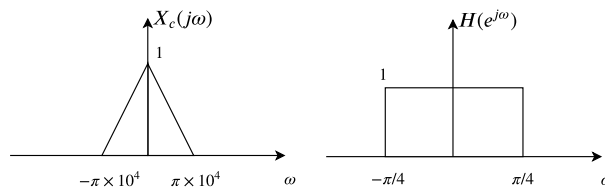
En la siguiente figura se muestra un sistema que procesa señales en tiempo continuo usando un filtro digital $h[n]$ que es lineal y causal con la ecuación de diferencias

$$y[n] = \frac{1}{2}y[n - 1] + x[n].$$

Para señales que son de banda limitada tales que $X_c(j\omega) = 0$ para $|\omega| > \pi/T$, el sistema de la figura resulta equivalente a un sistema LTI en tiempo continuo.



- (a) Si $X_c(j\omega)$ y $H(e^{j\theta})$ son como se muestra en la siguiente figura con $1/T = 20kHz$, dibujar $X_p(j\omega)$, $X(e^{j\theta})$, $Y(e^{j\theta})$, $Y_p(j\omega)$ y $Y_c(j\omega)$.



- (b) Determinar la respuesta en frecuencia $H_c(j\omega)$ del sistema equivalente completo con entrada $x_c(t)$ y salida $y_c(t)$.

★ **Ejercicio 5 (7.35)**

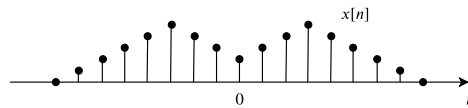
Considerar una secuencia de tiempo discreto $x[n]$ a partir de la cual se forman dos nuevas secuencias, $x_p[n]$ y $x_d[n]$, donde $x_p[n]$ corresponde a muestrear $x[n]$ en tiempo discreto con un período de muestreo de $N = 2$ y $x_d[n]$ corresponde a decimar $x[n]$ por un factor de $M = 2$, de manera que

$$x_p[n] = \begin{cases} x[n], & n = 0, \pm 2, \pm 4, \dots \\ 0, & n = \pm 1, \pm 3, \dots \end{cases}$$

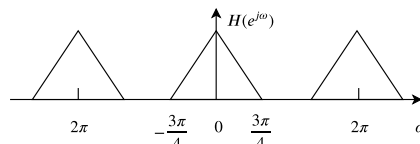
y

$$x_d[n] = x[2n].$$

- (a) Si $x[n]$ es como se ilustra en la siguiente figura, dibujar la secuencia $x_p[n]$ y $x_d[n]$.



- (b) Si $X(e^{j\theta})$ es como se muestra en la siguiente figura, dibujar $X_p(e^{j\theta})$ y $X_d(e^{j\theta})$.



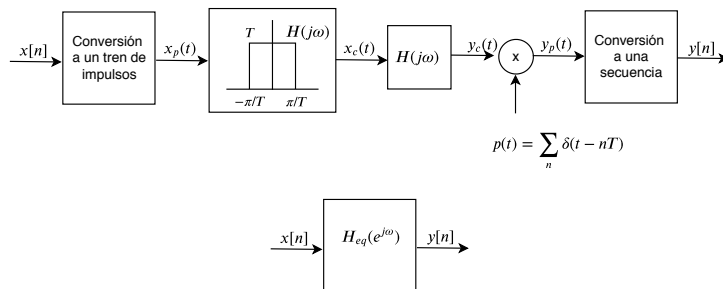
★ **Ejercicio 6 (7.43)**

En la primera figura se muestra un sistema para el cual la entrada y la salida son señales en tiempo discreto. La entrada en tiempo discreto $x[n]$ se convierte en un tren de impulsos en tiempo continuo $x_p(t)$. La señal en tiempo continuo $x_p(t)$ es entonces filtrada por un sistema LTI para producir la salida $y_c(t)$, la cual es entonces convertida a la señal en tiempo discreto $y[n]$. El sistema LTI con entrada $x_c(t)$ y la salida $y_c(t)$ es causal y está caracterizado por la ecuación

$$\frac{d^2 y_c(t)}{dt^2} + 4 \frac{dy_c(t)}{dt} + 3y_c(t) = x_c(t).$$

El sistema total es equivalente a un sistema LTI causal en tiempo discreto, como se indica en la segunda figura.

Determinar la respuesta en frecuencia $H(e^{j\theta})$ y la respuesta al impulso $h[n]$ del sistema LTI equivalente.



★ Ejercicio 7

Un sistema lineal, invariante en el tiempo y causal es modelado mediante la siguiente ecuación diferencial:

$$\frac{d^2 x(t)}{dt^2} + 2\zeta_0 \omega_A \frac{dx(t)}{dt} + \omega_A^2 x = \frac{d^2 y(t)}{dt^2} + 2\zeta_1 \frac{\omega_A}{10} \frac{dy(t)}{dt} + \frac{\omega_A^2}{100} y(t)$$

donde $x(t)$ es la entrada, $y(t)$ la salida, $1 > \zeta_0 > -1$, $1 > \zeta_1 > -1$ y $\omega_A > 0$.

- Hallar la transferencia del sistema, $H(s)$.
- Hallar condiciones en los parámetros ζ_0 , ζ_1 y ω_A para que se cumplan las siguientes condiciones:
 - Que el sistema sea BIBO estable.
 - La ganancia del sistema a la frecuencia $\omega_C = 100 \frac{rad}{s}$ sea nula.
- Realizar el diagrama de ceros y polos de $H(s)$ con los resultados obtenidos.
- Bosquejar la respuesta en frecuencia del sistema con los resultados obtenidos.

★ Ejercicio 8

Un sistema lineal, invariante en el tiempo y causal es modelado mediante la siguiente ecuación en diferencias:

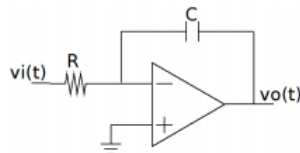
$$r_0^2 x[n-2] - 2r_0 \cos(\theta_0) x[n-1] + x[n] = \frac{r_0^2}{100} y[n-2] - 2\frac{r_0}{10} \cos(\pi/3) y[n-1] + y[n]$$

donde $x[n]$ es la entrada, $y[n]$ la salida, $r_0 > 0$, $\pi \geq \theta_0 \geq 0$.

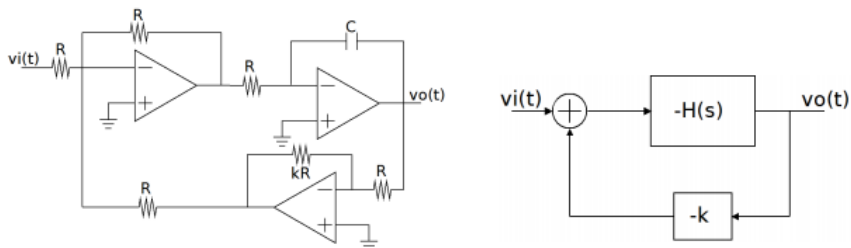
- Hallar la transferencia del sistema, $H(z)$.
- Hallar condiciones en los parámetros r_0 , θ_0 para que se cumplan las siguientes condiciones:
 - Que el sistema sea BIBO estable.
 - La ganancia del sistema a la frecuencia $\theta_C = \frac{\pi}{6}$ sea nula.
- Realizar el diagrama de ceros y polos de $H(z)$ con los resultados obtenidos.
- Bosquejar la respuesta en frecuencia del sistema con los resultados obtenidos.

★ **Ejercicio 9** (Teoría de circuitos 2018)

- (a) Hallar la transferencia $H(s)$ del circuito integrador de la figura y determinar si el sistema es estable BIBO.



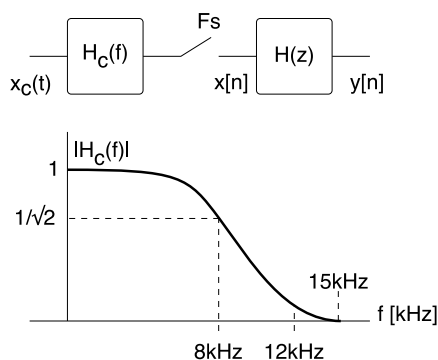
- (b) Hallar la respuesta al escalón $v_i(t) = Eu(t)$ con E constante.
 (c) Verificar que el siguiente circuito se corresponde con el diagrama de bloques mostrado a la derecha. Los operacionales que se agregan implementan el controlador proporcional y el sumador.



- (d) Hallar la respuesta al escalón $v_i(t) = Eu(t)$ con E constante. Analizar la estabilidad BIBO del sistema realimentado.

★ **Ejercicio 10**

Un sistema de muestreo tiene un filtro antisolapamiento $H_c(f)$ no ideal previo al muestreo. Se intentará compensar los efectos de este filtro mediante un filtro digital $H(z)$.



La frecuencia de muestreo es $F_s = 24\text{kHz}$. El filtro antisolapamiento $H_c(f)$ tiene las características mostradas en la figura: tiene ganancia 1 en frecuencia 0, ganancia $1/\sqrt{2}$ en 8 kHz, y ganancia despreciable a partir de 15 kHz. Los componentes que interesan de la señal $x_c(t)$ son los que están de 0 hasta 8 kHz. Componentes por encima de 8 kHz no interesan luego en el sistema.

- (a) Indicar si con el filtro H_c habrá solapamiento de espectros, y en tal caso verificar si en el rango de interés la señal de interés se verá afectada. Justificar.

Para compensar la respuesta en módulo no unitaria de H_c , se usa el filtro ecualizador $H(z)$ (real, causal) que se implementa de la siguiente forma:

$$y[n] = \beta x[n] + \alpha y[n - 1]$$

- (b) Dar el diagrama de ceros y polos del filtro $H(z)$.
- (c) Bosquejar $H(e^{j\theta})$ para $\alpha > 0$ y $\alpha < 0$.
- (d) Sin hacer cuentas, justificar en qué rango de valores debe estar α para que el filtro $H(z)$ pueda compensar la caída en ganancia de $H_c(f)$ al crecer la frecuencia.
- (e) Calcular los parámetros α y β para ecualizar la señal, de forma que la ganancia del sistema total en $f = 0$ y $f = 8 \text{ kHz}$ sea igual a 1.

★ Ejercicio 11

Se desea diseñar un filtro pasabanda, donde interesa amplificar componentes frecuenciales alrededor de $\theta = \pi/2$ y atenuar componentes en frecuencias cercanas a $\theta = 0$ y $\theta = \pi$. Para el diseño, se consideran varios filtros FIR reales y causales en cascada, cada uno de los cuales atenúa parte del espectro. Como simplificación, considerar que todos los filtros tienen su primer coeficiente $b_0 = 1$.

- (a) Diseñar el filtro $H_1(z)$, FIR causal de orden 1, que elimine las componentes en frecuencias $\theta = 0$.
- (b) Diseñar el filtro $H_2(z)$, también de orden 1, que elimine las componentes en frecuencia $\theta = \pi$.
- (c) Diseñar el filtro $H_3(z)$, de orden 2, que elimine las componentes de frecuencia $\theta = \pm\pi/6$.
- (d) Diseñar el filtro $H_4(z)$, de orden 2, que elimine las componentes de frecuencia $\theta = \pm5\pi/6$.
- (e) Calcular la respuesta al impulso de los 4 filtros en cascada, al que llamaremos $H(z)$.
- (f) Bosquejar el módulo de la respuesta frecuencial de $H(z)$.

Se quiere tener mayor ganancia relativa en $\theta = \pi/2$ respecto a frecuencia cercanas a $\theta = \pm5\pi/6$ y $\theta = \pm\pi/6$. Se propone agregar dos polos al sistema anterior.

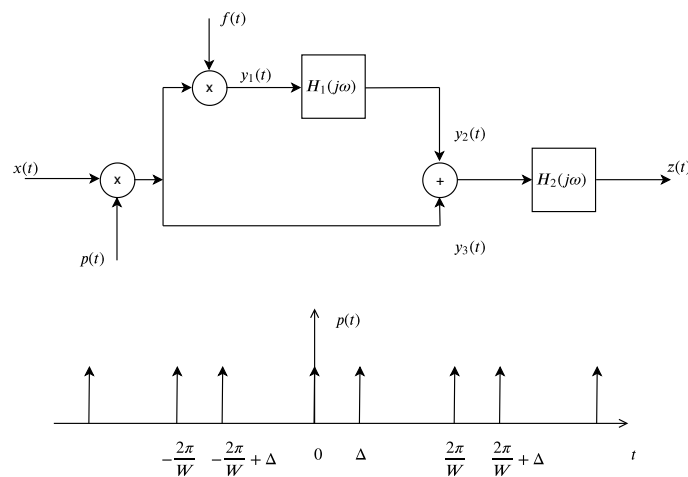
- (g) ¿Dónde deberían ir los polos (aproximadamente) para cumplir con el objetivo planteado, y que el filtro siga siendo real y causal?
- (h) Para implementar el filtro completo, incluyendo los dos polos, ¿cuál es el mínimo número de elementos de retardo necesarios? Proponer una implementación (diagrama de bloques) correspondiente.

***Ejercicio 12 (7.37)**

Una señal limitada en banda de manera que $|\omega| < W$ puede recuperarse a partir de muestras espaciadas de manera no uniforme, siempre y cuando la densidad de las muestra promedio sea $2(W/2\pi)$ muestras por segundo. Este problema ilustra un ejemplo particular de muestreo no uniforme. Suponer lo siguiente sobre el sistema que se muestra en la figura:

1. $x(t)$ es de banda limitada; $X(j\omega) = 0, |\omega| > W$.
2. $p(t)$ es un tren de impulsos periódico espaciados de manera no uniforme, como se muestra en la segunda figura.
3. $f(t)$ es una forma de onda periódica con periodo $T = 2\pi/W$. Puesto que $f(t)$ multiplica un tren de impulsos, sólo sus valores $f(0) = a$ y $f(\Delta) = b$, en $t = 0$ y $t = \Delta$ respectivamente, son significativos.
4. $H_1(j\omega)$ es un desplazador de fase de 90° ; esto es

$$H_1(j\omega) = \begin{cases} j, & \omega > 0 \\ -j, & \omega < 0 \end{cases}$$



★Ejercicio 13

Este ejercicio mostrará una forma de diseñar filtros digitales partiendo de uno analógico.

- (a) Hallar la función de transferencia $H_{ID}(z)$ de un integrador digital por trapecoides.
- (b) Dado un sistema analógico con transferencia $H_a(s)$, dibujar un diagrama de bloques que lo implemente, donde solo se utilicen sumadores, amplificadores e integradores.

$$H_a(s) = \frac{\sum_{i=0}^N a_i s^{N-i}}{s^N + \sum_{i=1}^N b_i s^{N-i}}$$

- (c) Obtener la transferencia $H_D(z)$ de un filtro digital que simule a $H_a(s)$, utilizando los resultados de las partes anteriores.
- (d) Hallar la relación entre la respuesta frecuencial del sistema digital, $H_D(e^{j\theta})$ y la del sistema analógico $H_a(f)$.
- (e) Probar las siguientes propiedades:

1. Un filtro analógico estable da origen a un filtro digital estable.
2. Los máximos de $H_a(f)$ coinciden con los de $H_D(e^{j\theta})$.
3. Si

$$M_1 < |H_a(jw)| < M_2$$

en $[f_1, f_2]$, entonces

$$M_1 < |H_D(e^{j\theta})| < M_2$$

en $[\theta_1, \theta_2]$.

Soluciones

Las soluciones que se muestran deben ser consideradas como los resultados o respuestas de los ejercicios, no son ni deben considerarse como el desarrollo o procedimiento para llegar a estos.

Ejercicio 10

(a) Habrá solapamiento de espectros porque la señal a muestrear tendrá componentes hasta 15 kHz, que es una frecuencia mayor a $F_s/2$.

De todos modos, los componentes entre 12 kHz y 15 kHz se solaparán en la zona de 9 kHz a 12 kHz, donde no hay señal de interés.

(b) El filtro tendrá un polo en $z = \alpha$ y un cero en $z = 0$.

(d) $H(z)$ deberá tener mayor ganancia en frecuencias altas que bajas, por lo tanto el polo debe estar en el semiplano izquierdo. Además debe ser real y con módulo menor a 1 para garantizar estabilidad. Entonces α estará en algún punto intermedio entre -1 y 0.

Mirando más en detalle, se busca una ganancia 1.4 en frecuencia $2\pi/3$, con lo cual es razonable esperar una ganancia cercana a 2 en frecuencia π . Eso significa que la distancia al polo desde $z = 1$ debe ser aproximadamente el doble que la distancia al polo desde $z = -1$, con lo cual el polo estará cerca de $z = -1/3$. La única función de β es recuperar ganancia unidad en frecuencia 0.

(e) El filtro $H(z) = \beta/(1 - \alpha z^{-1})$. Se debe plantear la respuesta frecuencial en las 2 frecuencias correspondientes, que son $\theta = 0$ y $\theta = 2\pi/3$:

$$|H(e^{j0})| = \left| \frac{\beta}{1 - \alpha} \right| = 1$$

$$|H(e^{j2\pi/3})| = \left| \frac{\beta}{1 - \alpha e^{-j2\pi/3}} \right| = \sqrt{2}$$

α y β son reales, por lo tanto la primera expresión se puede poner como $\beta = 1 - \alpha$ (existe otra solución equivalente que da β con signo opuesto).

Para la segunda expresión, se puede plantear módulo cuadrado, y se llega a $\frac{1-2\alpha+\alpha^2}{1+\alpha+\alpha^2} = 2$.

Resolviendo, y quedándose con el polo dentro del círculo unidad, se llega a $\alpha = -2 + \sqrt{3} = -0.268$ y $\beta = 3 - \sqrt{3} = 1.268$.

Ejercicio 11

(a) Un FIR causal de orden 1 tiene la forma general $H_1(z) = \alpha + \beta z^{-1}$. Para las condiciones pedidas (es decir, $H_1(e^{j0}) = 0$ y $H_1(e^{j\pi}) = 2$, debe ser $H_1(z) = 1 - z^{-1}$.

(b) $H_2(z) = 1 + z^{-1}$

(c) Este filtro debe tener ceros en $e^{\pm j\pi/6}$. Debe ser entonces $H_3(z) = (1 - e^{j\pi/6}z^{-1})(1 - e^{-j\pi/6}z^{-1}) = 1 - 2\cos(\pi/6)z^{-1} + z^{-2} = 1 - \sqrt{3}z^{-1} + z^{-2}$.

(d) Este filtro debe tener ceros en $e^{\pm j\pi/6}$. Debe ser entonces $H_3(z) = (1 - e^{j5\pi/6}z^{-1})(1 - e^{-j5\pi/6}z^{-1}) = 1 - 2\cos(5\pi/6)z^{-1} + z^{-2} = 1 + \sqrt{3}z^{-1} + z^{-2}$.

(e) Se puede fácilmente hacer la convolución de los 4 filtros:

$$h_1 * h_2 = [1 \ 0 \ -1]$$

$$(h_1 * h_2) * h_3 = [1 \ -\sqrt{3} \ 0 \ \sqrt{3} \ -1]$$

$$h = ((h_1 * h_2) * h_3) * h_4 = [1 \ 0 \ -2 \ 0 \ 2 \ 0 \ -1]$$

El retardo de grupo es la suma de todos los retardos, y también se ve en la respuesta al impulso final, que vale 3.

(f) El módulo de la respuesta frecuencial vale cero en frecuencias $0, \pm\pi/6, \pm5\pi/6$ y π . El máximo de su respuesta es en $\theta = \pi/2$, donde vale $\sum h[n]j^n = 1+2+2+1 = 6$.

(g) Para que el filtro sea real, los polos deben ser complejos conjugados. Como la frecuencia central del pasabanda es $\theta = \pi/2$, los polos deben ir sobre el eje imaginario, cercanos al círculo unidad. Cuanto más cercanos, mayor la atenuación relativa de las bandas de corte respecto de la banda de paso, aunque esta banda se volvería cada vez más estrecha.

(h) Los filtros FIR en cascada usan 6 retardos, que además es el orden de $H(z)$. Este es el mínimo número de retardos. Otra forma con 6 retardos sería la forma canónica.

Al introducir 2 polos, se puede aprovechar a agregarlos como coeficientes recursivos en cualquiera de H_3 o H_4 , o en la implementación canónica, sin aumentar la cantidad de retardos necesarios.

Ejercicio 13

(a) El sistema digital que implementa la integral de la entrada tiene como salida la salida en el instante anterior más el área de la secuencia de entrada entre las dos últimas muestras. Como estamos haciendo una aproximación de la integral por trapezoides, el área será la semisuma de las dos bases $x[n-1]$ y $x[n]$ por la altura, la que consideraremos igual al tiempo de muestreo

$$y[n] = y[n-1] + T \frac{(x[n] + x[n-1])}{2}$$

Entonces:

$$H(z) = \frac{T}{2} \frac{1 + z^{-1}}{(1 - z^{-1})}$$

(b) Escribiendolo de la forma:

$$H_a(s) = \frac{\sum_{i=0}^N a_i s^{-i}}{1 - \sum_{i=1}^N -b_i s^{-i}}$$

Podemos plantear el sistema en la forma directa II, pero en términos de s^{-1} en vez de z^{-1} .

(c) La aproximación que se realizará para simular el sistema analógico es implementar los integradores del sistema analógico s^{-1} con integradores digitales por trapezoides. Cada término $\frac{1}{s}$ será sustituido por $H(z)$, es decir:

$$s = \frac{2(1 - z^{-1})}{T(1 + z^{-1})}$$

(d) Por la parte anterior, con $z = e^{j\theta}$ y $s = jw$ tenemos:
 $w = \frac{2}{T} \tan(\theta/2)$

$$H_D(e^{j\theta}) = H_a\left(\frac{2}{T} \tan(\theta/2)\right)$$

La relación entre s y z es una transformación bilineal del plano complejo al plano complejo. Se puede ver que esta transformación mapea el eje imaginario a la circunferencia unidad.

El rango de frecuencias angulares de $[0, \pi]$ se mapea al rango de frecuencias $[0, +\infty]$ a través de la función tangente. Este mapeo se comporta de forma aproximadamente lineal para valores cercanos a 0. Las frecuencias mayores se mapean de una forma cada vez más alineal, de forma que se comprime más las frecuencias en el rango frecuencias angulares para frecuencias más altas.

El filtro digital se comporta de manera similar al analógico para bajas frecuencias, esto no ocurre para frecuencias cercanas a π debido a la deformación que introduce el mapeo. Para que el comportamiento del sistema se asemeje al deseado, se deberá elegir una frecuencia de muestreo lo suficientemente grande para que el sistema digital aproxime bien al sistema analógico en el rango de frecuencias de interés.

(e) Como vimos, la transformación bilineal que relaciona el sistema en tiempo continuo y el sistema en tiempo discreto transforma el eje imaginario en la circunferencia unidad. El semiplano con parte real negativa se mapea al interior de la cfa unidad y el semiplano de parte real positiva se mapea al exterior de la cfa unidad. Teniendo esto en cuenta, si el sistema analógico es estable, entonces tiene todos sus polos on parte real negativa. Estos polos, luego de la transformación, caerán dentro de la cfa unidad dando lugar a un sistema causal estable.