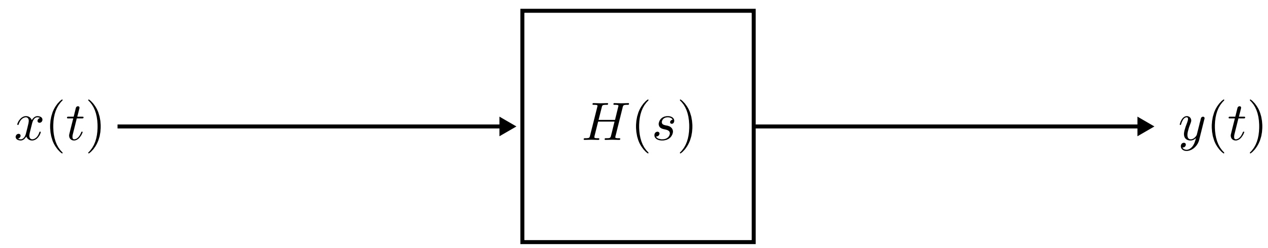
Señales y Sistemas

Sistemas (Lineales) Realimentados

Instituto de Ingeniería Eléctrica

UNIVERSIDAD
DE LA REPÚBLICA
URUGUAY

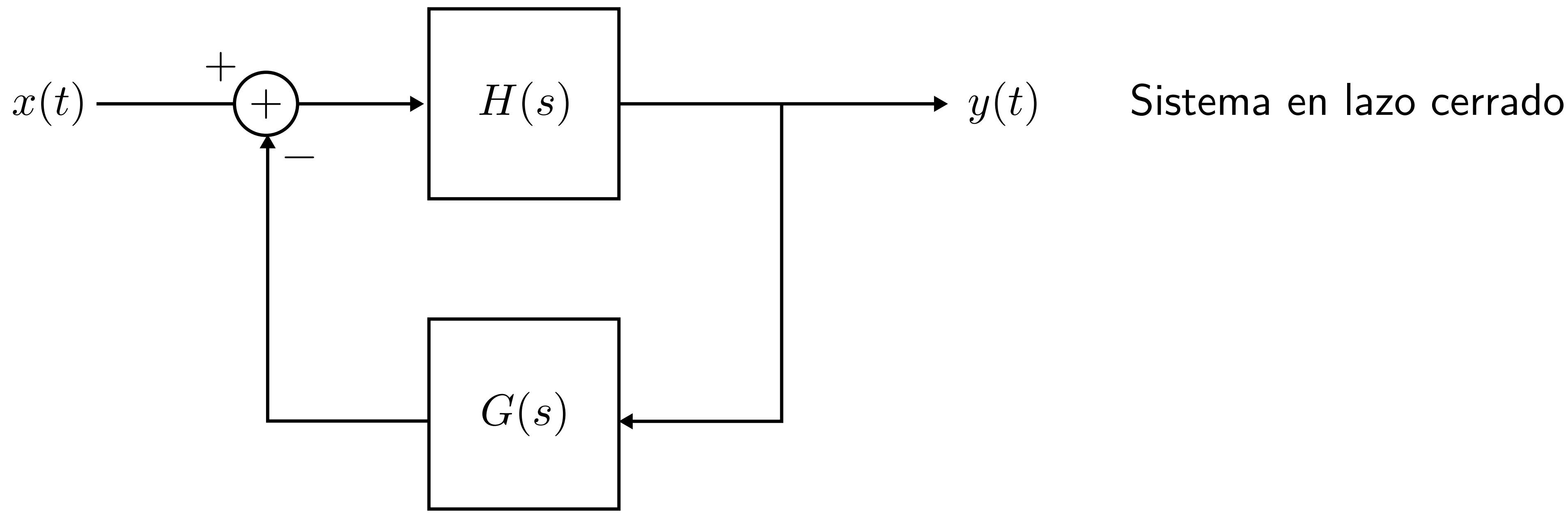
Sistemas lineales realimentados



Sistema en lazo abierto

- Realimentación (feedback): usar la salida de un sistema para modificar o *controlar* la entrada.
  - Control: velocidad, ángulo, altura, temperatura, presión, ...
  - Sensado, medida: velocímetro, potenciómetro, termómetro, ...
  - Además de la corrección de variaciones o *errores*, puede reducir la *sensibilidad* a los parámetros.
  - Permite estabilizar sistemas inestables, y puede desestabilizar un sistema estable.
- Entender los efectos de los cambios de los parámetros de la realimentación en el comportamiento de un sistema es esencial en el diseño de sistemas realimentados.

Sistemas lineales realimentados

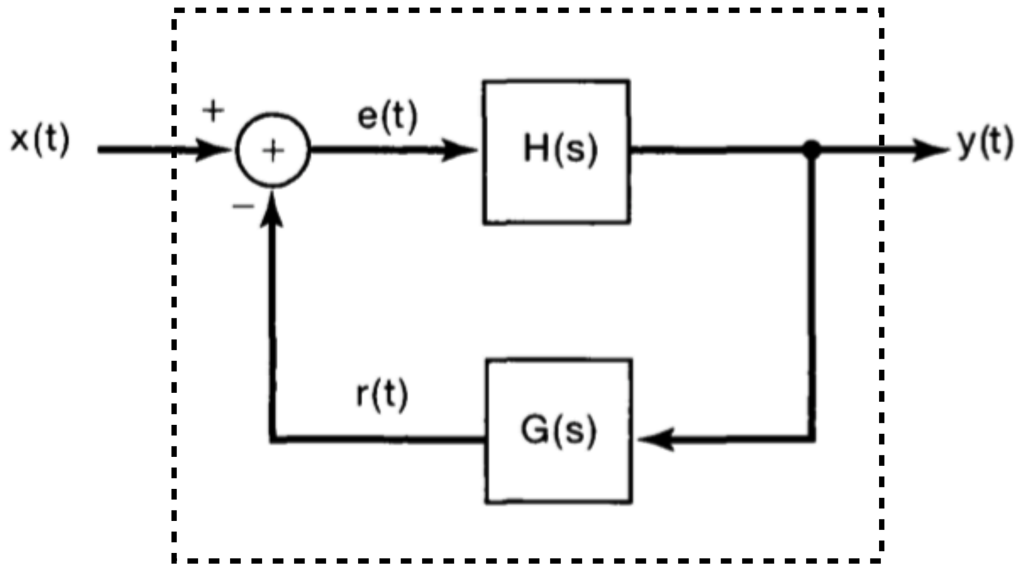


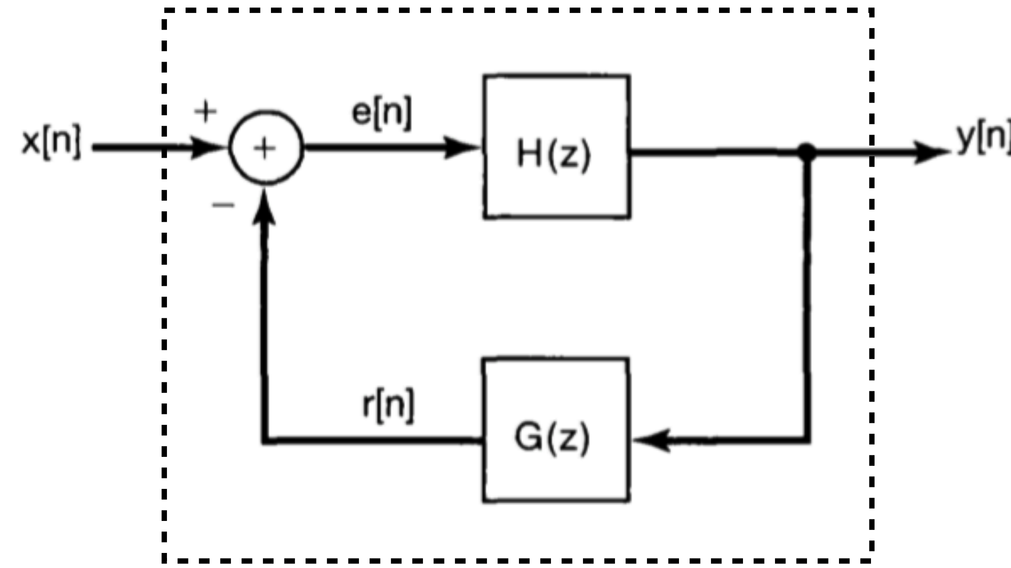
- Realimentación (feedback): usar la salida de un sistema para modificar o *controlar* la entrada.
  - Control: velocidad, ángulo, altura, temperatura, presión, ...
  - Sensado, medida: velocímetro, potenciómetro, termómetro, ...
  - Además de la corrección de variaciones o *errores*, puede reducir la *sensibilidad* a los parámetros.
  - Permite estabilizar sistemas inestables, y puede desestabilizar un sistema estable.
- Entender los efectos de los cambios de los parámetros de la realimentación en el comportamiento de un sistema es esencial en el diseño de sistemas realimentados.

Sistemas lineales realimentados

- Algunas aplicaciones:
  - Diseño de sistemas inversos
  - Compensación de elementos no ideales
  - Estabilización de sistemas inestables
  - Sistemas de seguimiento o rastreo
  - Desestabilización de sistemas estables

Sistemas lineales realimentados





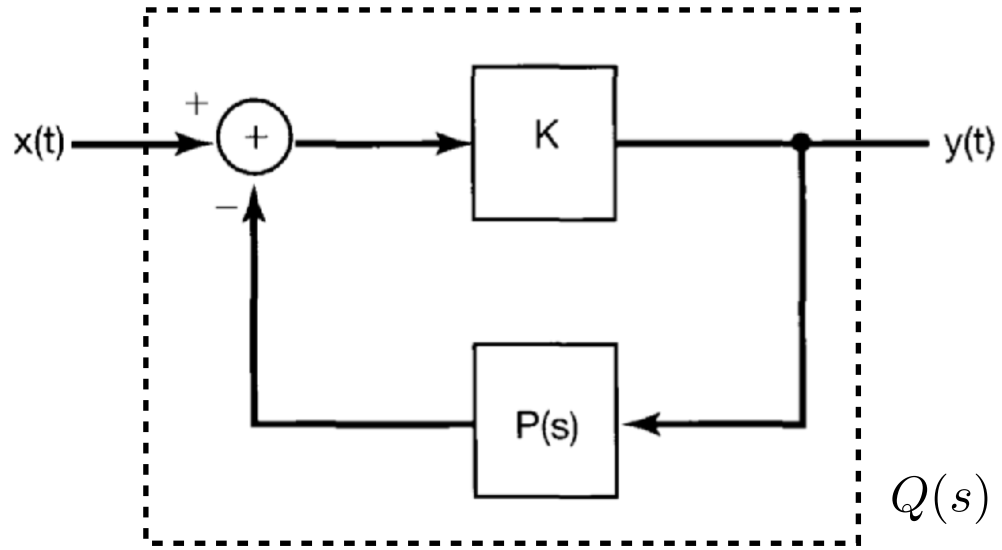
$$Q(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} = \frac{H(s)}{1 + G(s)H(s)}$$

$$Q(z) = \frac{Y(z)}{X(z)} = \frac{H(z)}{1 + G(z)H(z)}$$

- Sistemas causales (ROC: un semiplano derecho o el exterior de un círculo).
- Convención: realimentación *negativa* ($e(t) = x(t) - r(t)$, $e[n] = x[n] - r[n]$)

Diseño de sistemas inversos

- Consideremos un sistema con transferencia $P(s)$ y el siguiente sistema de lazo cerrado



$$H(s) = K$$
$$G(s) = P(s)$$

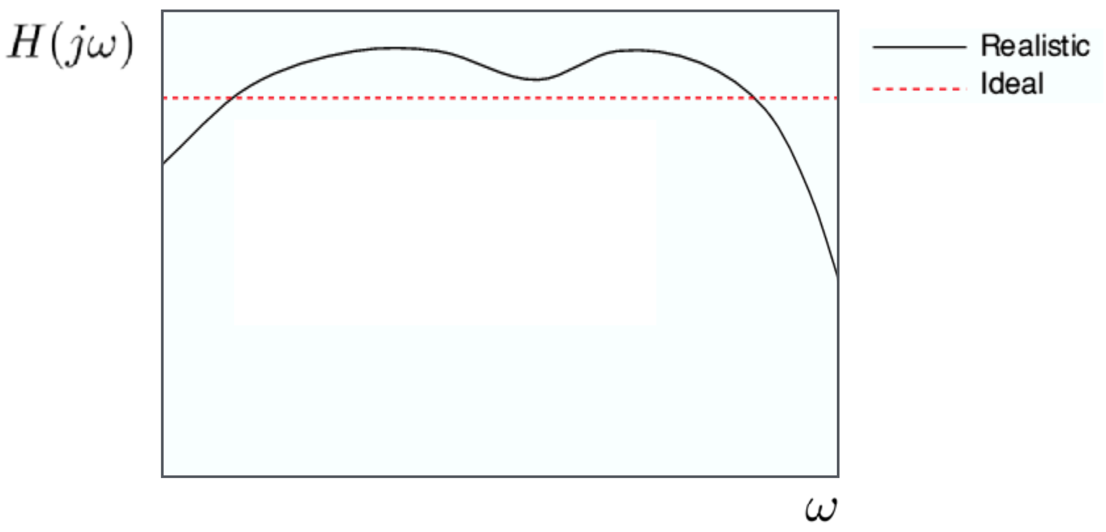
$$Q(s) = \frac{K}{1 + KP(s)} \overset{KP(s) \gg 1}{\simeq} \frac{1}{P(s)}$$

- K debe ser suficientemente grande, y el resultado es independiente de K.

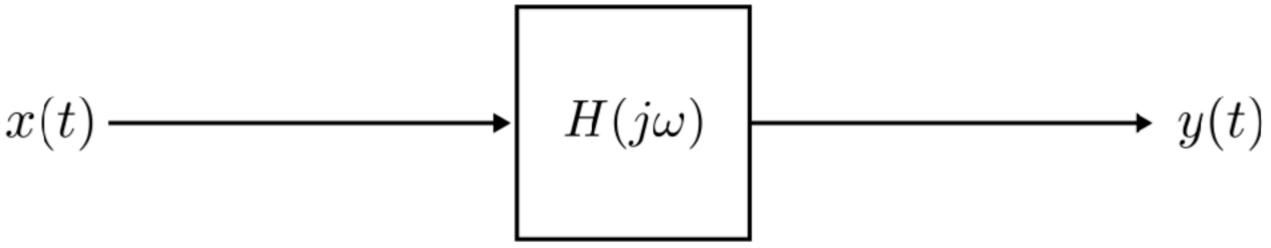
- Amplificadores operacionales son un tipo de dispositivo para este tipo de realimentación.

Compensación de elementos no ideales

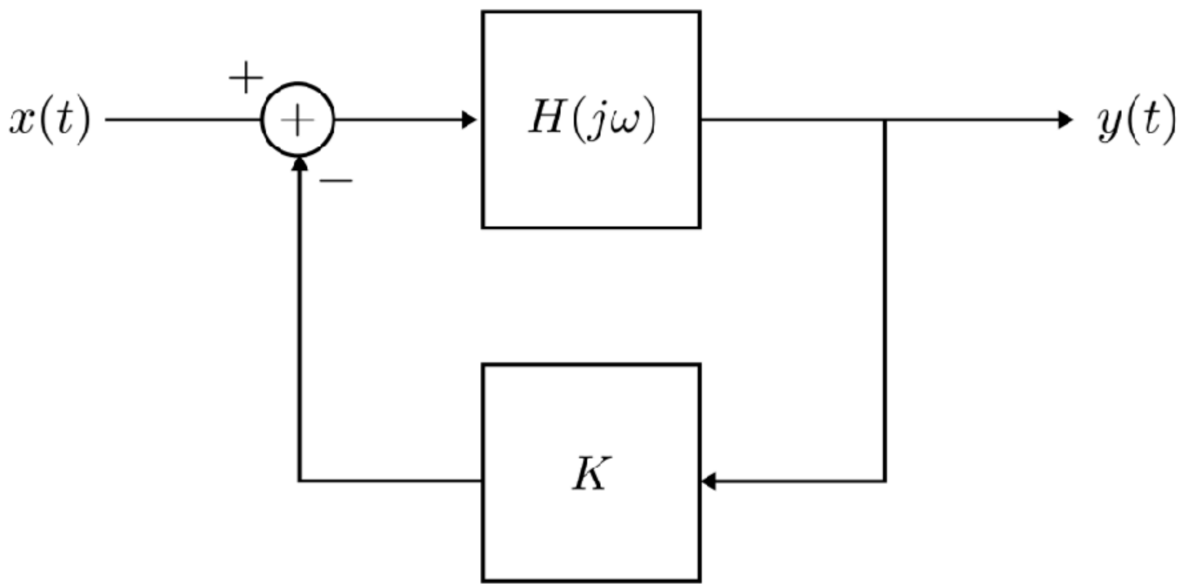
- Corregir alguna propiedad no ideal de un sistema en lazo abierto.
  - Ejemplo: respuesta no constante de un amplificador en una banda de frecuencia.



  - Consideremos el siguiente sistema con $H(j\omega)$ como la transferencia de un amplificador para el cual queremos una respuesta plana en una banda de frecuencias



Compensación de elementos no ideales

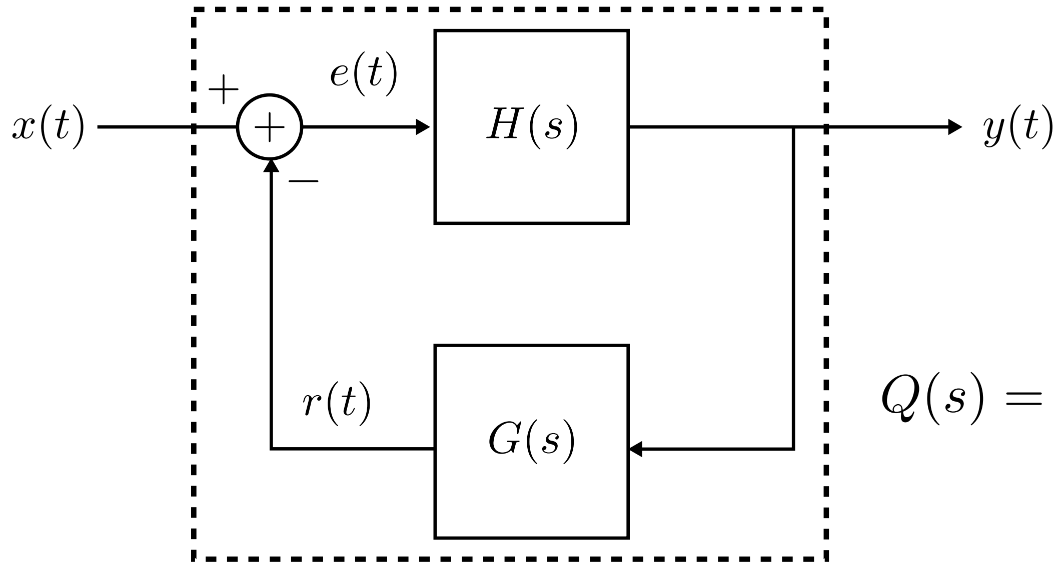


$$Q(j\omega) = \frac{H(j\omega)}{1 + KH(j\omega)}$$

$$\Rightarrow Q(j\omega) \simeq \frac{1}{K} \quad \text{si} \quad |KH(j\omega)| \gg 1$$

- Comentarios
  - Si $G(j\omega) = K > 1$ en el rango de frecuencia deseado, entonces $Q(j\omega)$ atenúa!
  - Asumimos que podemos tener un $G(j\omega)$ con respuesta plana ($G(j\omega) = K$) en la misma banda de interés que $H(j\omega)$, entonces ¿para qué hacer $H(j\omega)$?
- Si $G(j\omega) = K < 1$ cubrimos ambos comentarios simultáneamente y se puede construir con elementos pasivos.
  - $H(j\omega)$ debe tener una ganancia bastante mayor a la deseada para que, dado un $K < 1$, siga valiendo $|KH(j\omega)| \gg 1$

Estabilización de sistemas inestables

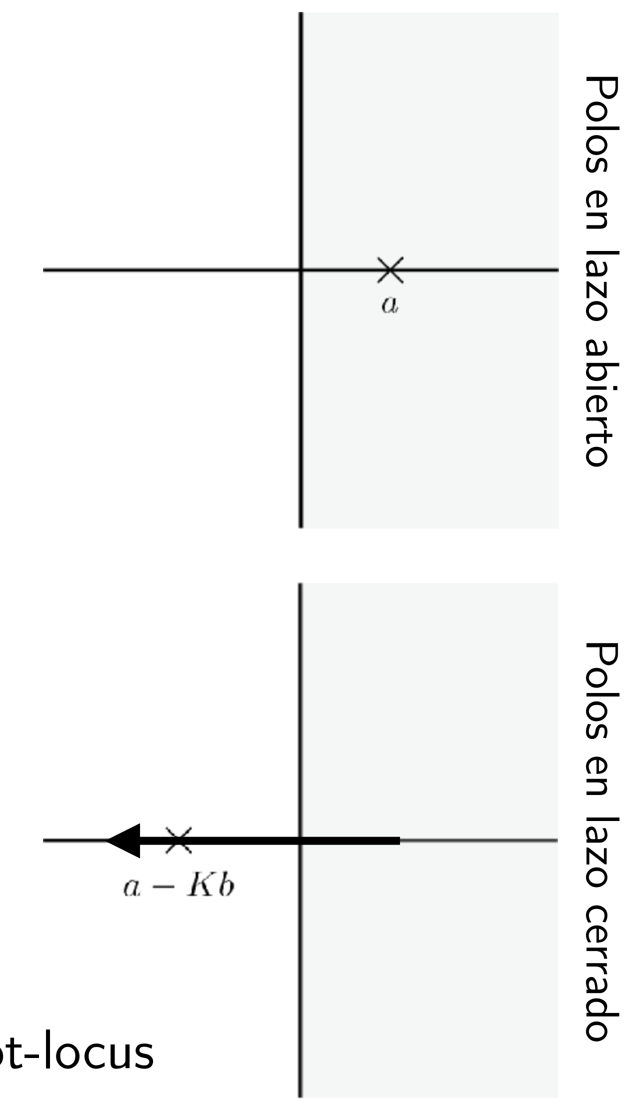


$$Q(s) = \frac{H(s)}{1 + G(s)H(s)}$$

- Sistema de un polo: $H(s) = \dfrac{b}{s-a}$
  - Evaluamos la **realimentación proporcional**: $G(s) = K$

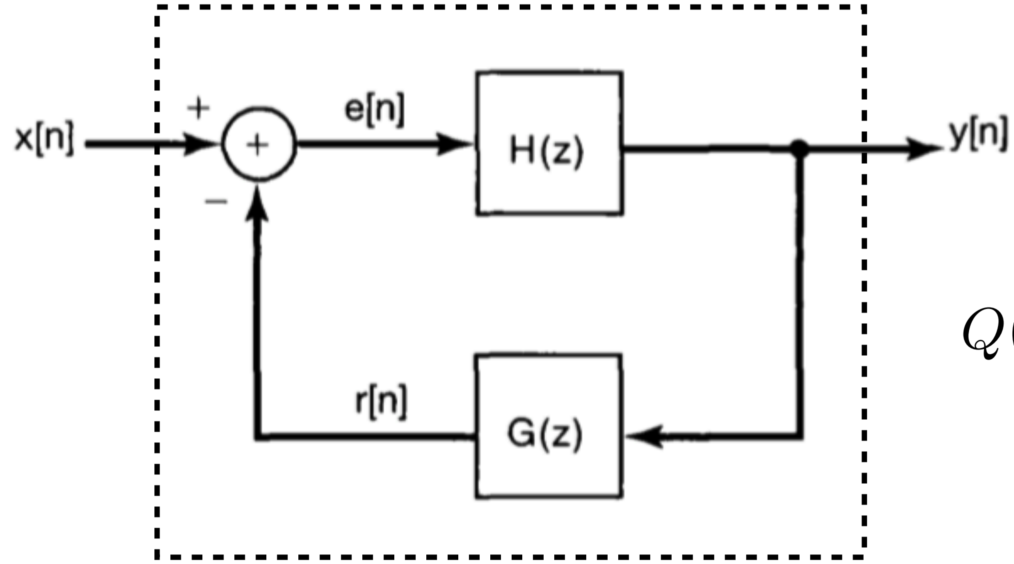
$$Q(s) = \frac{H(s)}{1 + KH(s)} = \frac{b}{s - a + Kb}$$

  - Estable si: $a - Kb < 0 \Rightarrow K > \dfrac{a}{b}$



root-locus

Estabilización de sistemas inestables: caso discreto

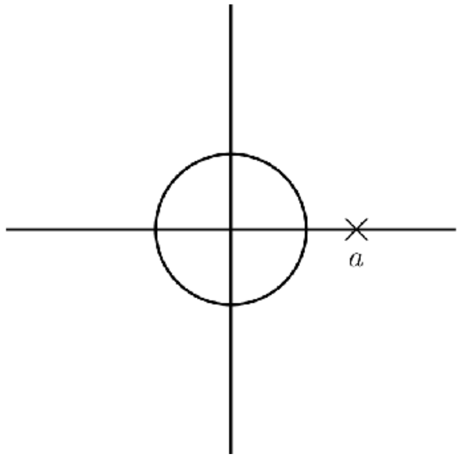


$$Q(z) = \frac{H(z)}{1 + G(z)H(z)}$$

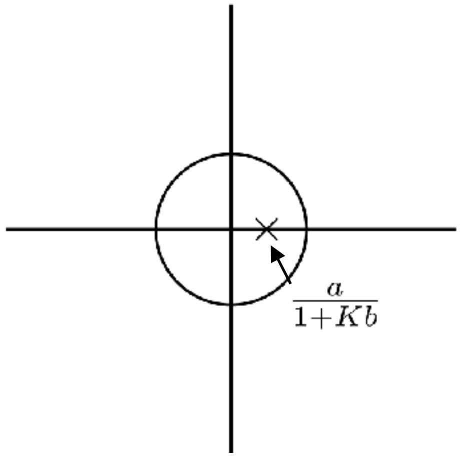
- Sistema de un polo: $H(z) = \dfrac{b}{1 - az^{-1}} = \dfrac{zb}{z - a}$, inestable si $|a|>1$
  - Evaluamos la **realimentación proporcional**: $G(z) = K$

$$Q(z) = \frac{zb}{z(1 + Kb) - a} = \frac{z\left(\frac{b}{1+Kb}\right)}{z - \left(\frac{a}{1+Kb}\right)}$$

  - Estable si: $K > \dfrac{|a| - 1}{|b|}$



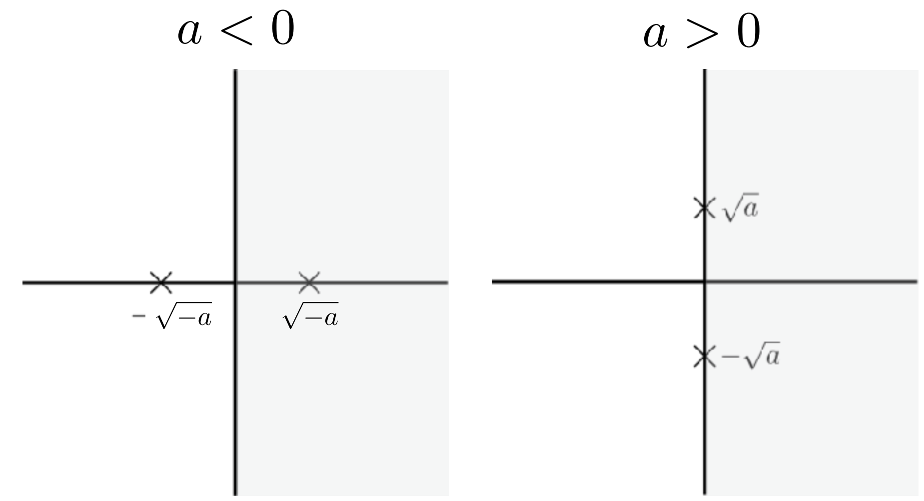
Polos en lazo abierto



Polos en lazo cerrado

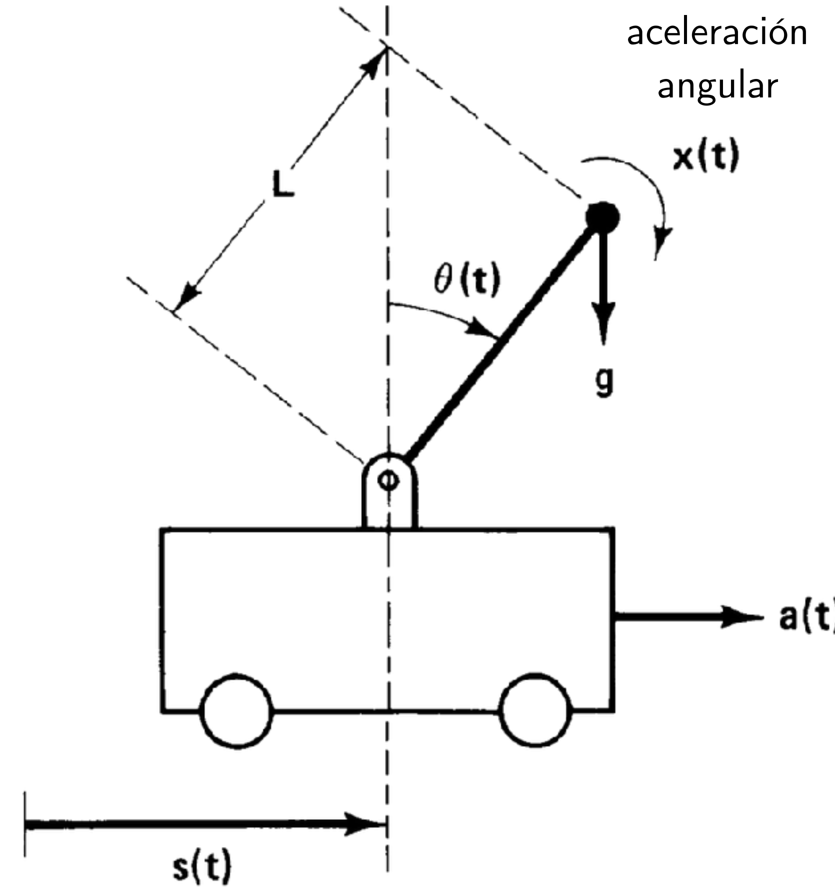
Estabilización de sistemas inestables

- Sistema de dos polos: $H(s) = \dfrac{b}{s^2 + a}$
  - Es inestable.
  - Veremos las opciones de realimentación con el siguiente ejemplo.



Polos en lazo abierto

Sistemas lineales realimentados: péndulo invertido

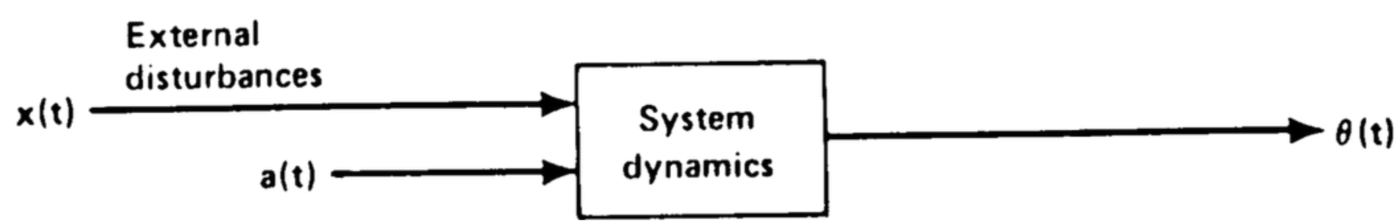


Modelo de la ecuación de movimiento:

$$L\frac{d^2\theta(t)}{dt^2} = g\sin\theta(t) + Lx(t) - a(t)\cos\theta(t)$$

Aproximación lineal en $\theta \simeq 0$ (equilibrio inestable):

$$\sin\theta(t) \simeq \theta(t)$$
$$\cos\theta(t) \simeq 1$$



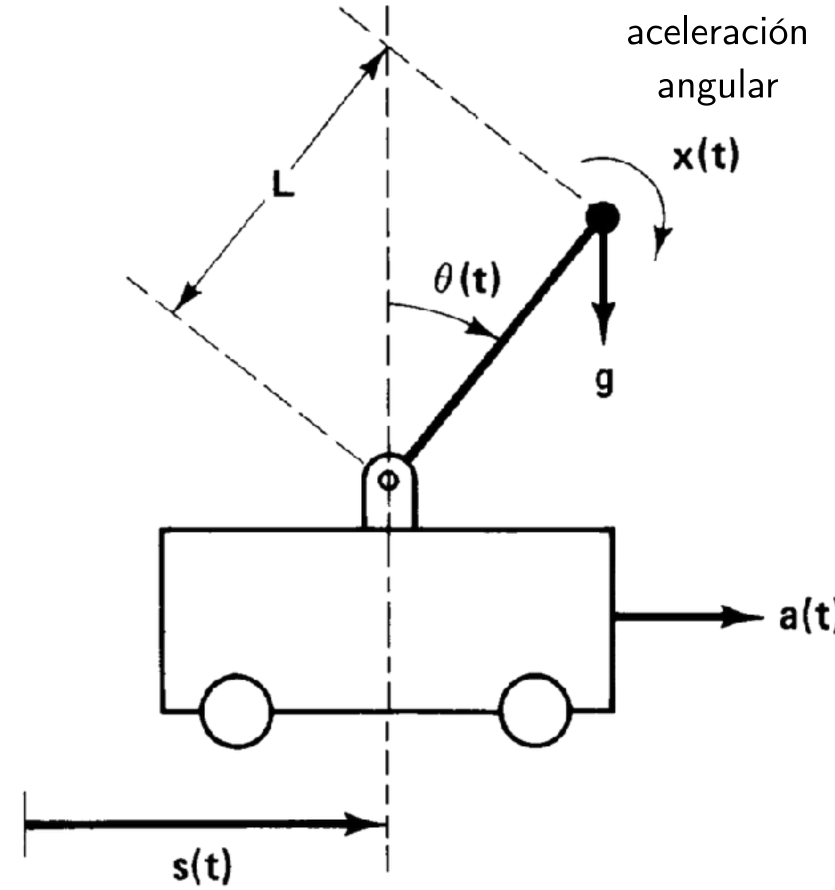
Sistemas lineales realimentados: péndulo invertido

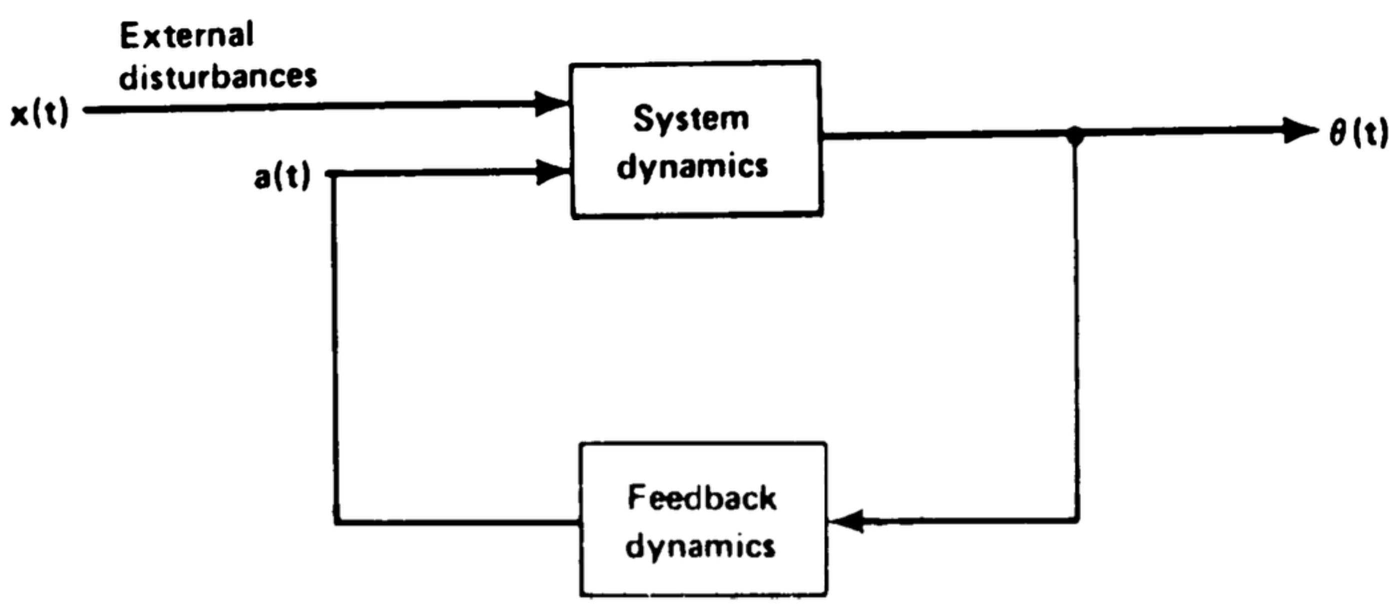
Modelo de la ecuación de movimiento:

$$L\frac{d^2\theta(t)}{dt^2} = g\sin\theta(t) + Lx(t) - a(t)\cos\theta(t)$$

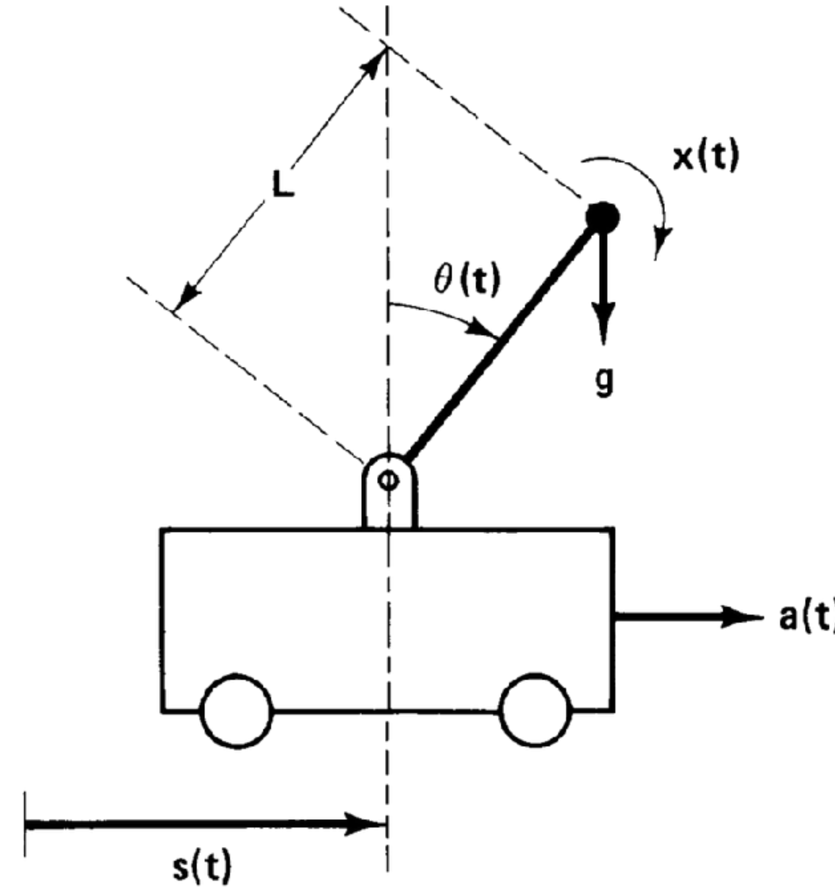
Aproximación lineal en $\theta \simeq 0$ (equilibrio inestable):

$$\sin\theta(t) \simeq \theta(t)$$
$$\cos\theta(t) \simeq 1$$





Sistemas lineales realimentados: péndulo invertido



Modelo de la ecuación de movimiento:

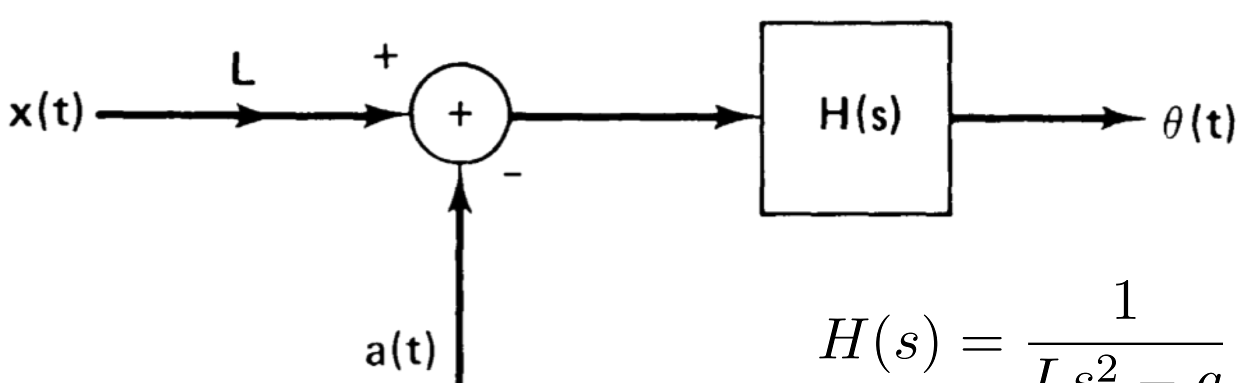
$$L\frac{d^2\theta(t)}{dt^2} = g\sin\theta(t) + Lx(t) - a(t)\cos\theta(t)$$

Aproximación lineal en $\theta \simeq 0$ (equilibrio inestable):

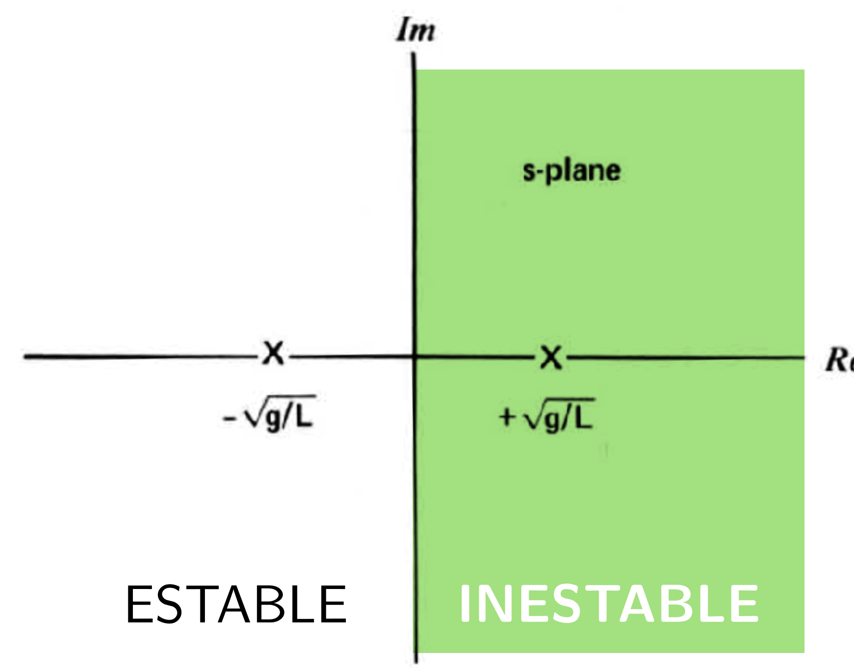
$$\sin\theta(t) \simeq \theta(t)$$
$$\cos\theta(t) \simeq 1$$

$$L\frac{d^2\theta(t)}{dt^2} - g\theta(t) = Lx(t) - a(t)$$

$$\Theta(s) = \frac{1}{Ls^2 - g}(LX(s) - A(s)) = H(s)(LX(s) - A(s))$$

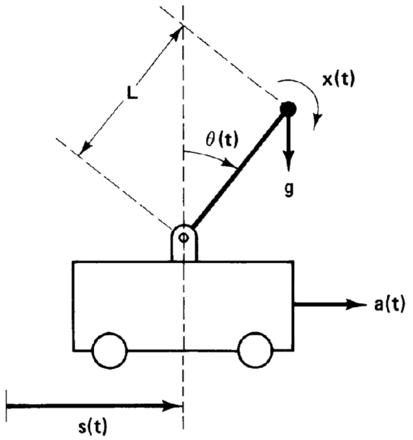


$$H(s) = \frac{1}{Ls^2 - g}$$

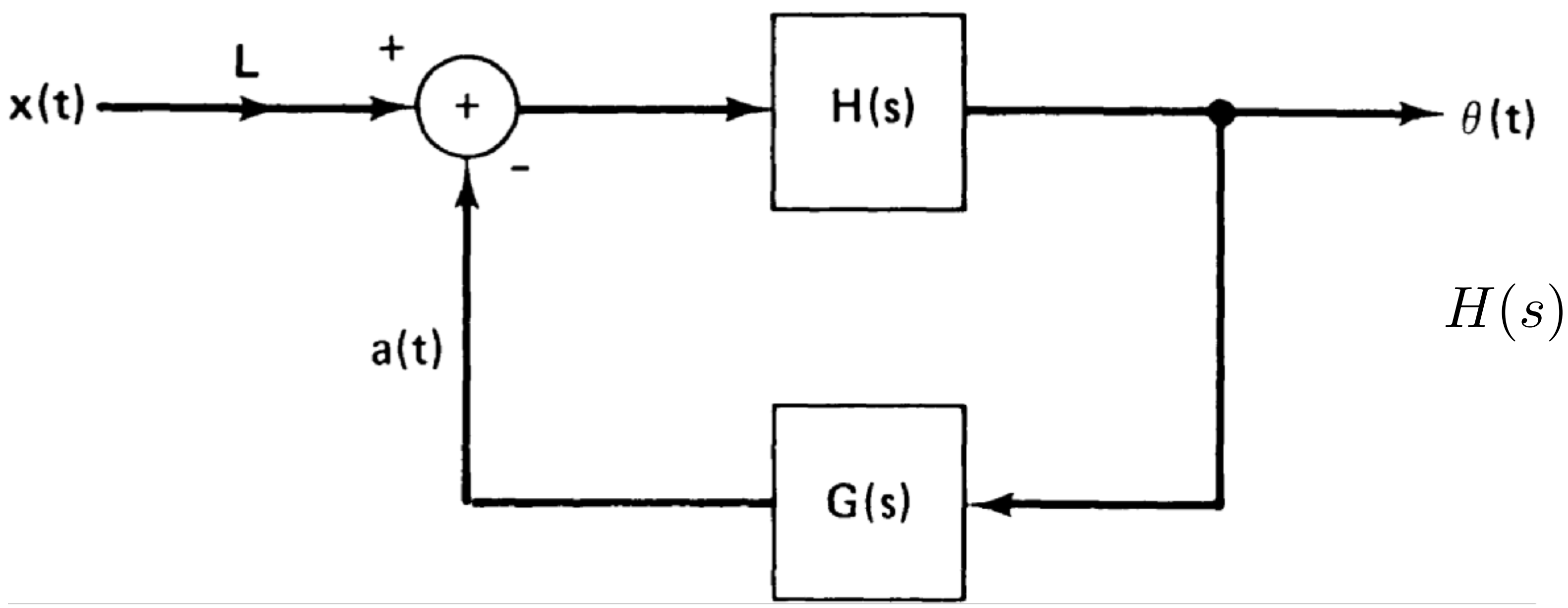


Con polo en semiplano derecho el sistema es **inestable**.

Sistemas lineales realimentados: péndulo invertido



- Realimentemos para buscar estabilidad

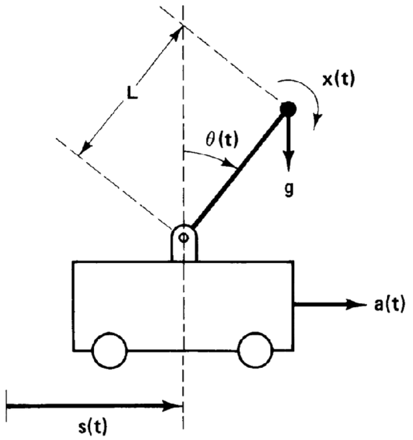


$$H(s) = \frac{1}{Ls^2 - g}$$

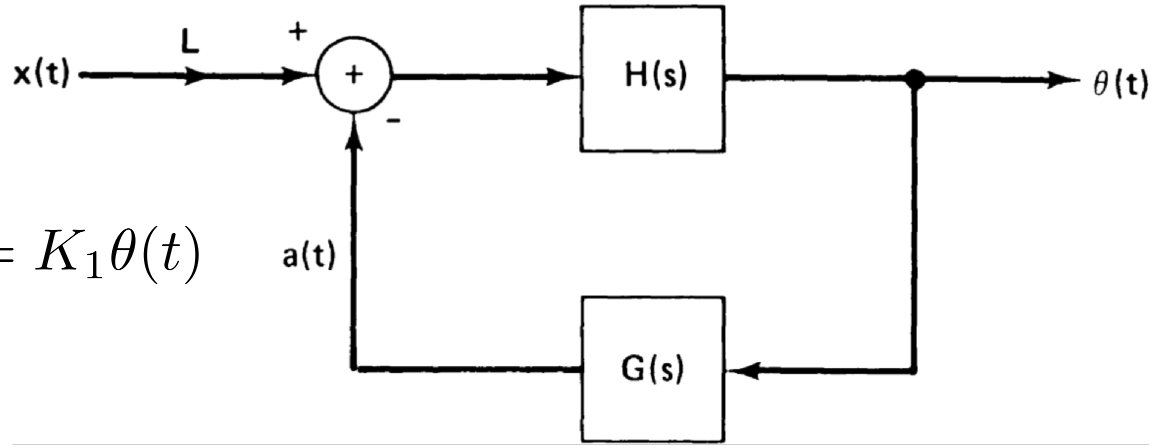
$$\Theta(s) = \frac{LH(s)}{1 + G(s)H(s)} X(s)$$

- ¿Cómo elegimos (diseñamos) $G(s)$?

Sistemas lineales realimentados: péndulo invertido



- Realimentación proporcional: $G(s) = K_1$



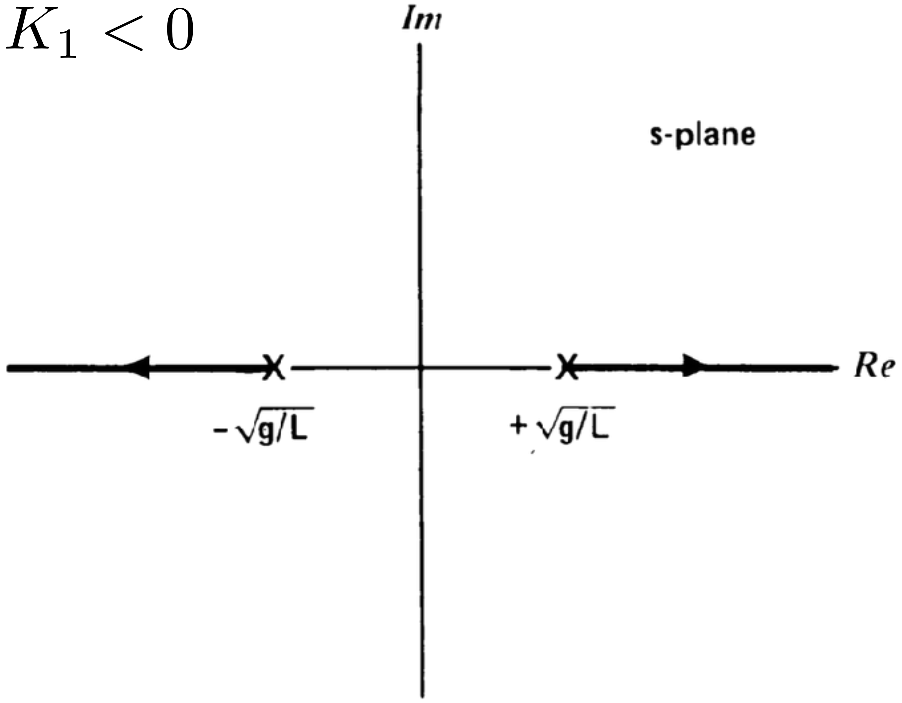
$$a(t) = K_1\theta(t)$$

$$\Theta(s) = \frac{LH(s)}{1+G(s)H(s)}X(s) \qquad H(s) = \frac{1}{Ls^2 - g}$$

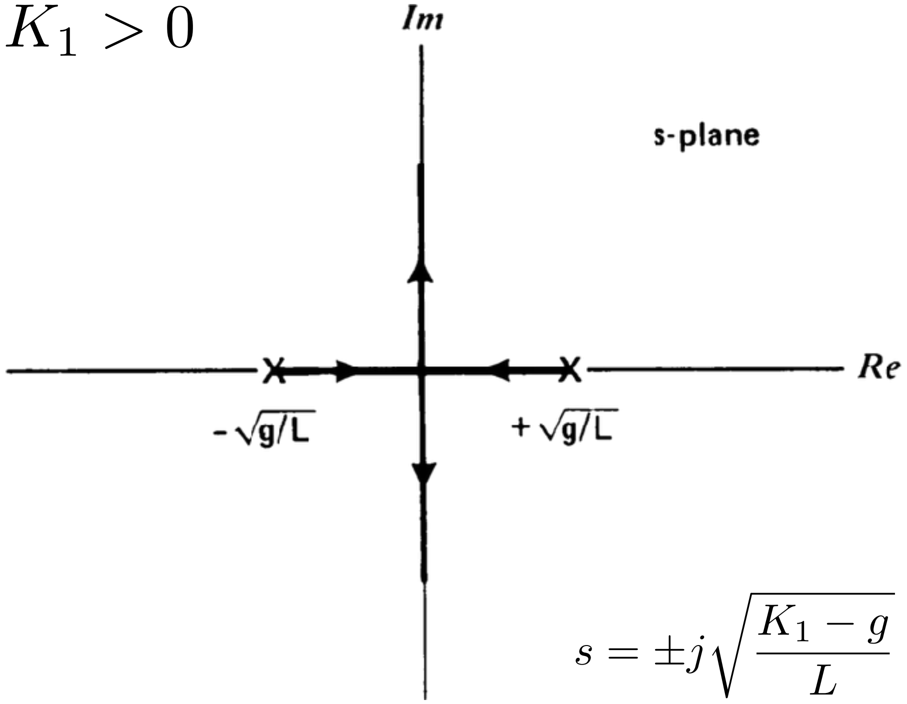
$$\Theta(s) = \frac{1}{s^2 - \left(\frac{g-K_1}{L}\right)}X(s)$$

Polos en: $s = \pm\sqrt{\dfrac{g-K_1}{L}}$

$K_1 < 0$



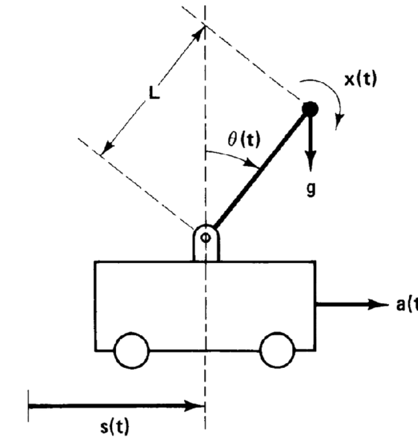
$K_1 > 0$



$s = \pm j\sqrt{\dfrac{K_1 - g}{L}} \quad (K_1 > g)$

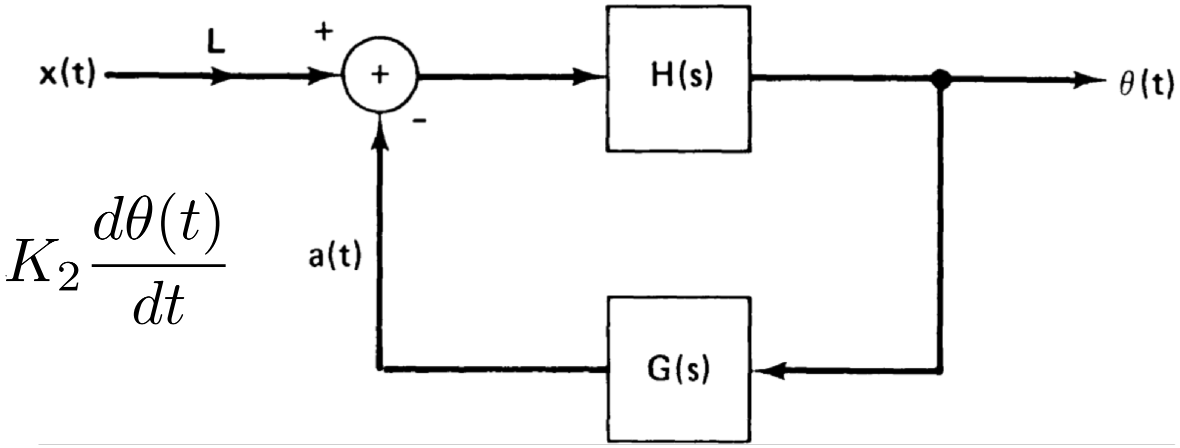
No es posible estabilizarlo con una realimentación proporcional.

Sistemas lineales realimentados: péndulo invertido



- Realimentación con derivador: $G(s) = K_2 s$

$$a(t) = K_2 \frac{d\theta(t)}{dt}$$

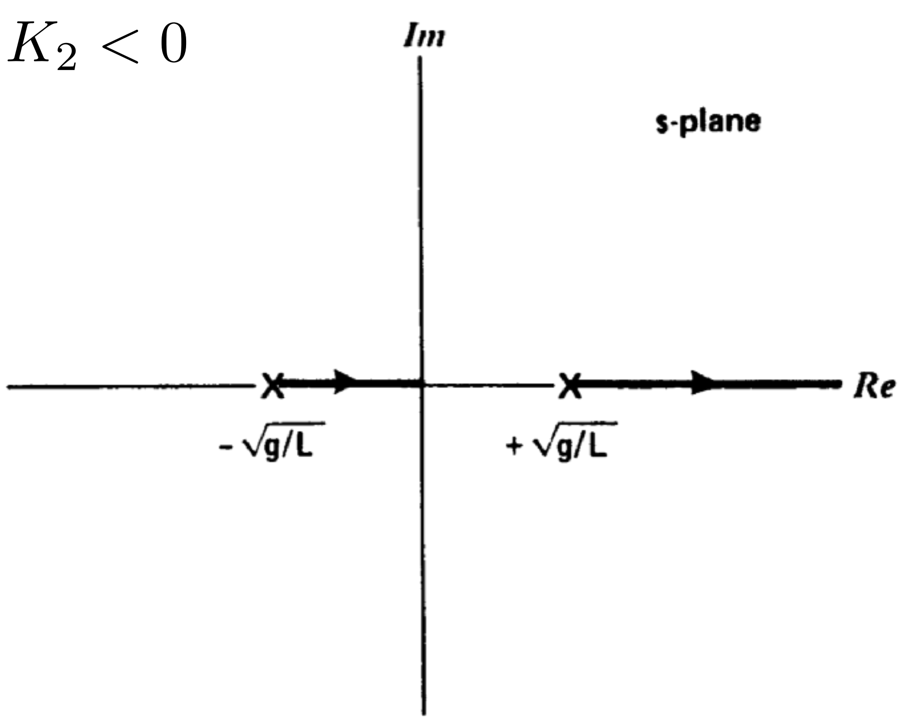


$$\Theta(s) = \frac{LH(s)}{1 + G(s)H(s)} X(s) \qquad H(s) = \frac{1}{Ls^2 - g}$$

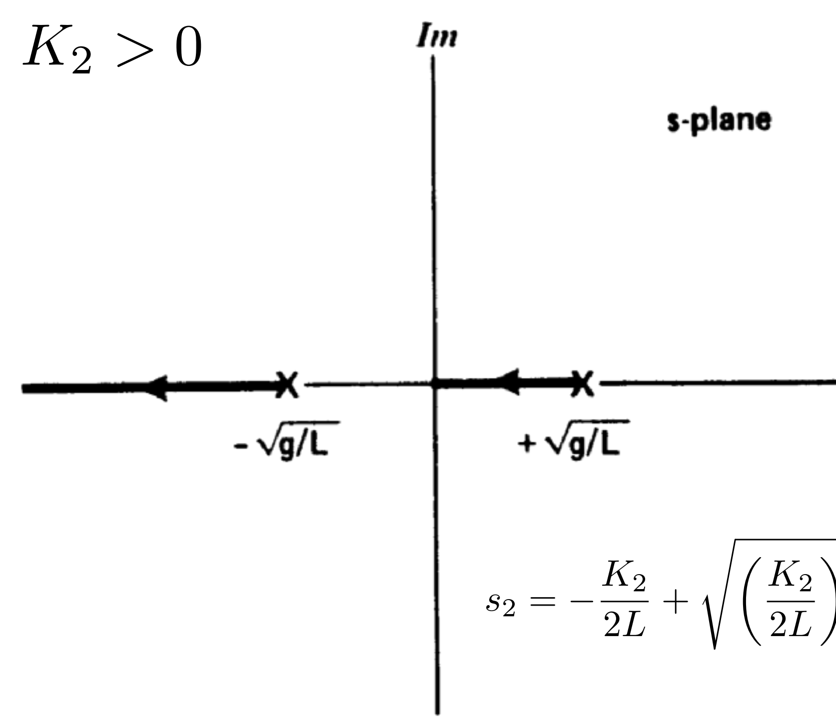
$$\Theta(s) = \frac{1}{s^2 + s\,(K_2/L) - g/L} X(s)$$

Polos en: $s = -\dfrac{K_2}{2L} \pm \sqrt{\left(\dfrac{K_2}{2L}\right)^2 + \left(\dfrac{g}{L}\right)}$

$K_2 < 0$



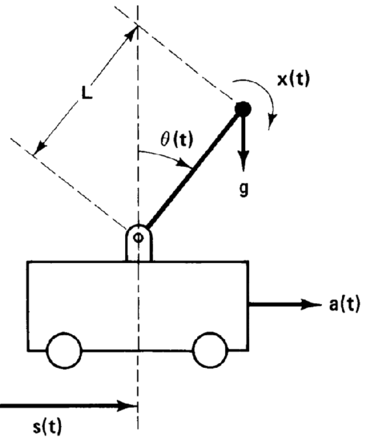
$K_2 > 0$



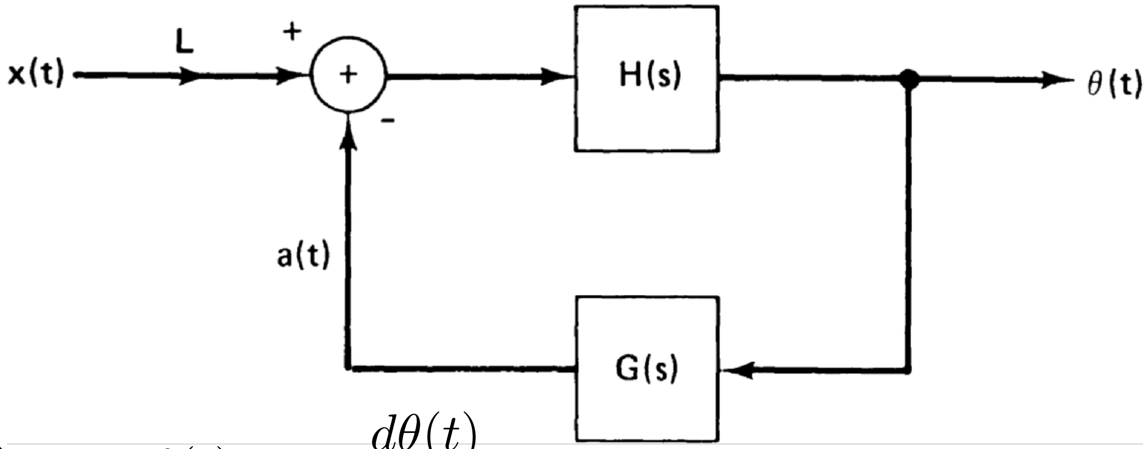
$$s_2 = -\frac{K_2}{2L} + \sqrt{\left(\frac{K_2}{2L}\right)^2 + \left(\frac{g}{L}\right)} \xrightarrow{K_2 \to \infty} 0$$

No es posible estabilizarlo con una realimentación proporcional.

Sistemas lineales realimentados: péndulo invertido



- Realimentación proporcional y con derivador: $G(s) = K_1 + K_2 s$

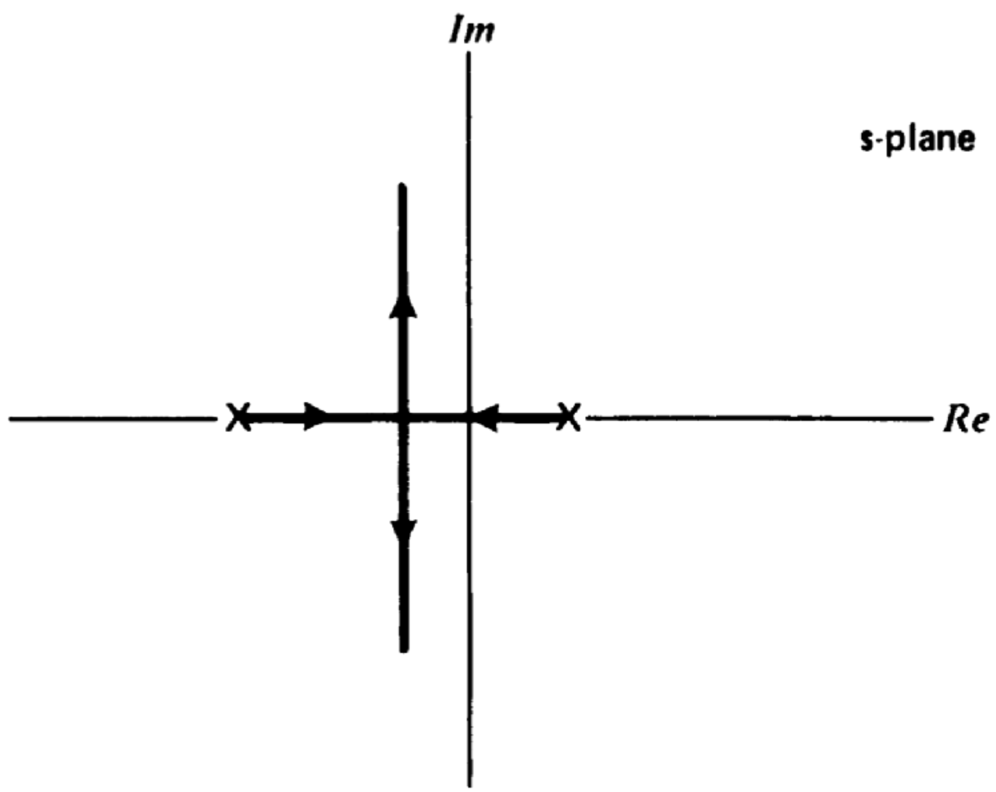


$$a(t) = K_1\theta(t) + K_2\frac{d\theta(t)}{dt}$$

$$\Theta(s) = \frac{LH(s)}{1+G(s)H(s)}X(s) \qquad H(s) = \frac{1}{Ls^2 - g}$$

$$\Theta(s) = \frac{1}{s^2 + s\left({}^{K_2}/_{L}\right) - {}^{g}/_{L} + {}^{K_1}/_{L}}X(s)$$

Polos en: $s = \dfrac{-K_2}{2L} \pm \sqrt{\left(\dfrac{K_2}{2L}\right)^2 - \left(\dfrac{K_1 - g}{L}\right)}$



Polos reales con parte real negativa si:

$K_2 > 0$

$\dfrac{1}{4L}K_2^2 + g > K_1 > g > 0$

Polos complejos conjugados si:

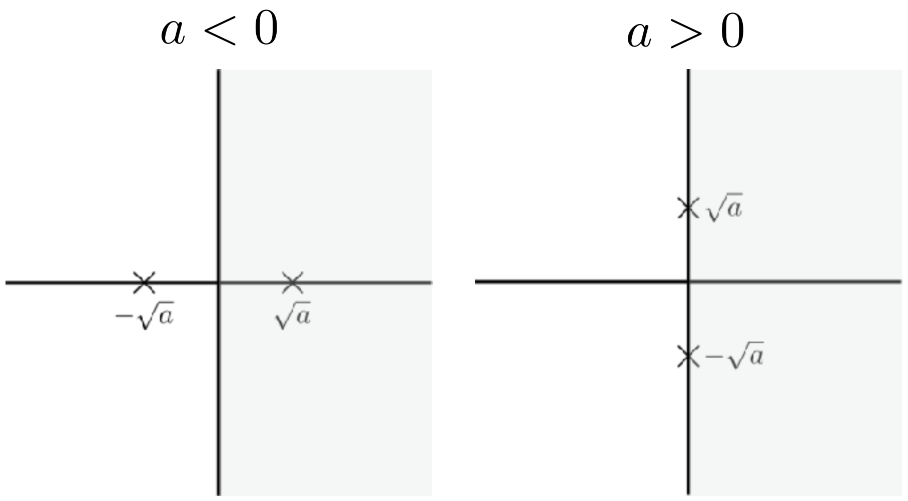
$K_2 > 0$

$\left(\dfrac{K_2^2}{2L}\right) - \dfrac{K_1 - g}{L} < 0 \Rightarrow K_1 > \dfrac{1}{4L}K_2^2 + g > 0$

Es posible estabilizarlo con una realimentación proporcional y derivación.

Estabilización de sistemas inestables

- Sistema de dos polos: $H(s) = \dfrac{b}{s^2 + a}$
  - Es inestable.



Polos en lazo abierto

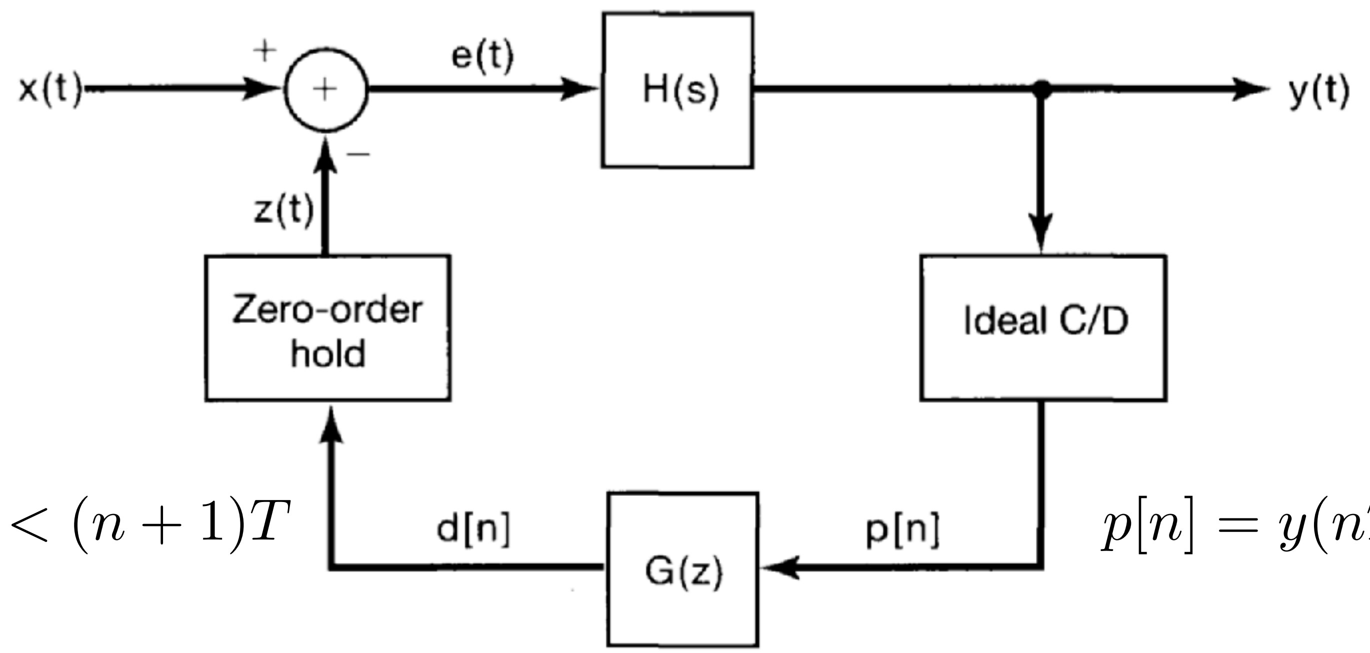
- No alcanza con una realimentación proporcional ni con una con un derivado, necesitamos usar ambas ¿por qué?

$G(s) = K_1 + K_2 s$

$$H(s) = \frac{b}{s^2 + a} \longrightarrow Q(s) = \frac{b}{s^2 + bK_2 s + (a + K_1 b)} \approx \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2}$$

Las condiciones de estabilidad de este SLIT vimos que recaen sobre ζ>0 (bK_2>0) y garantizar que el término independiente sea positivo (a+$K_1 b$>0) por lo tanto precisamos ambos términos (K_1 y $K_2 s$)

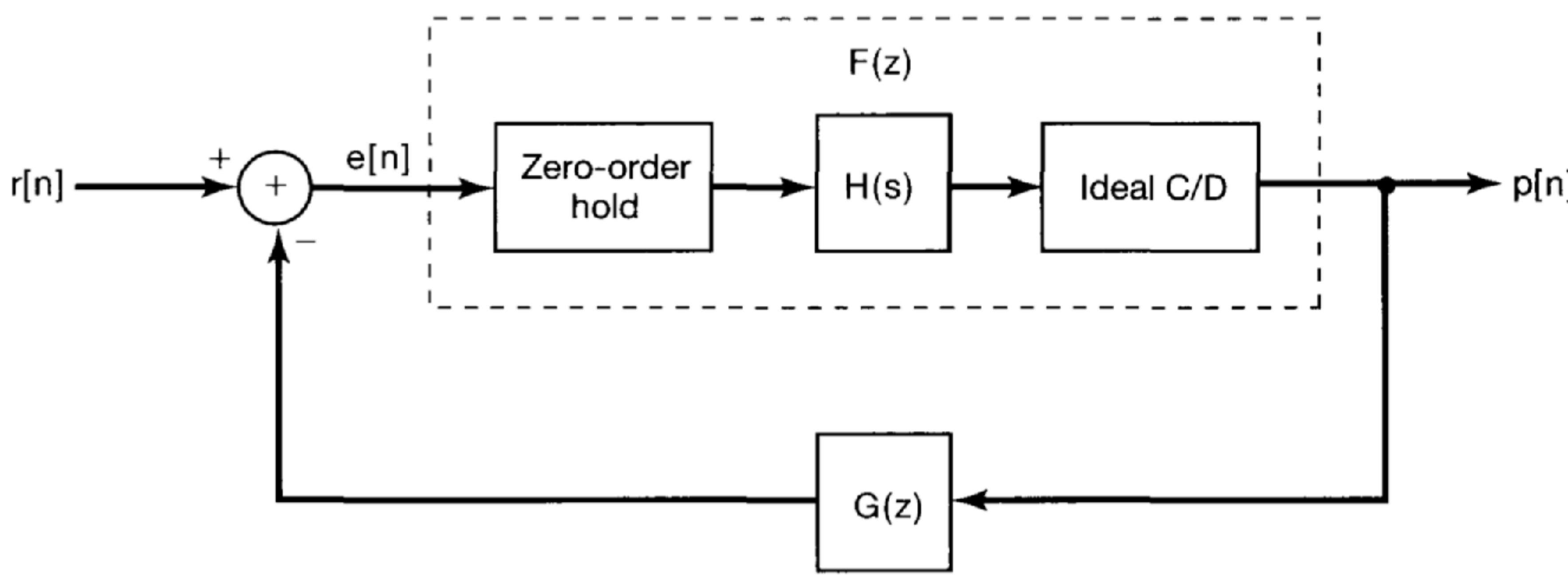
Sistemas realimentados para datos muestreados



$z(t) = d[n], \quad nT \leq t < (n+1)T$

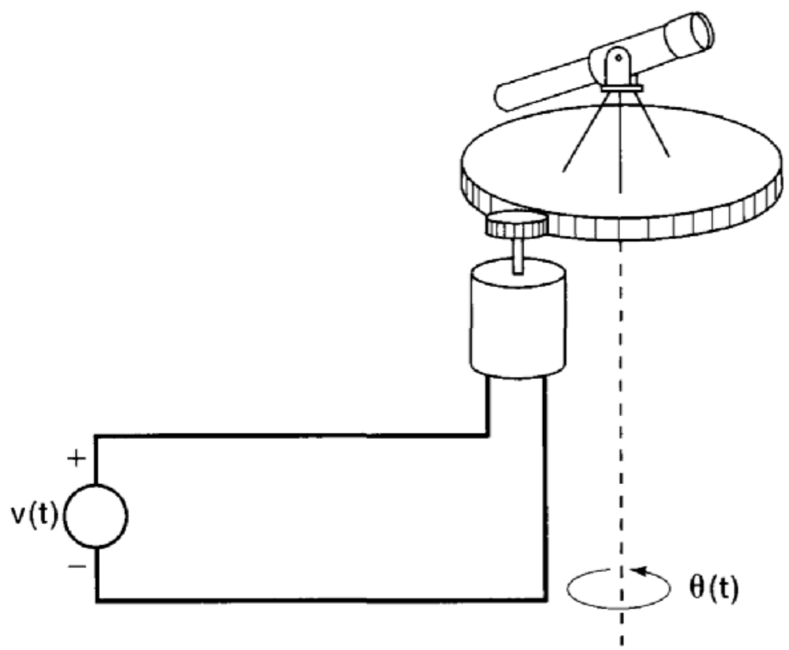
$p[n] = y(nT)$

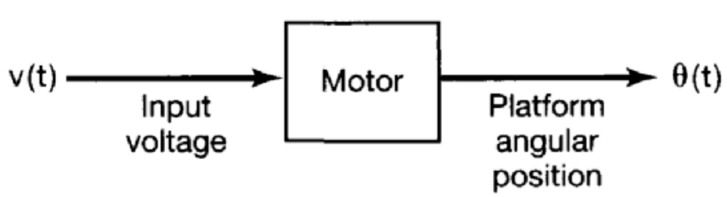
Si $x(t) = r[n], \quad nT \leq t < (n+1)T$

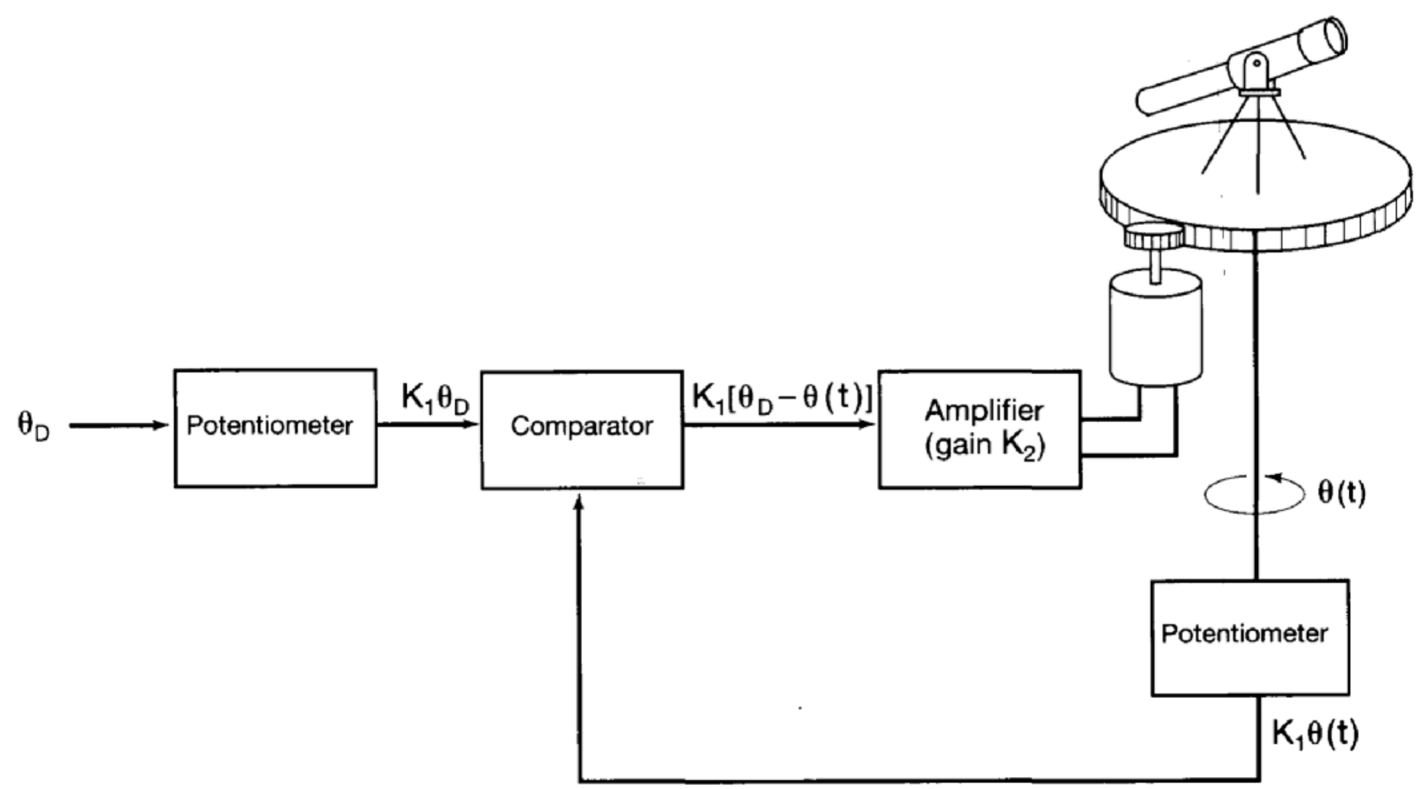


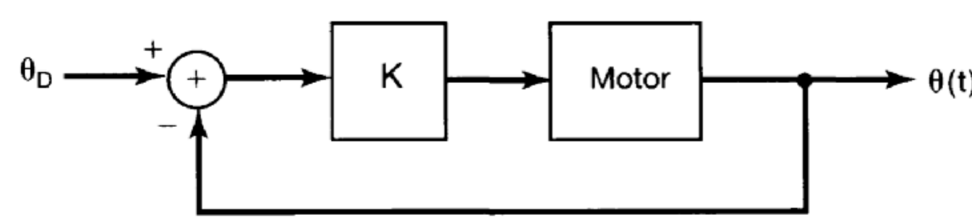
Sistemas de seguimiento o rastreo

- Sistema donde la salida siga o copie la entrada.
  - Ejemplo: posicionamiento de un telescopio (θ_D es el ángulo deseado)



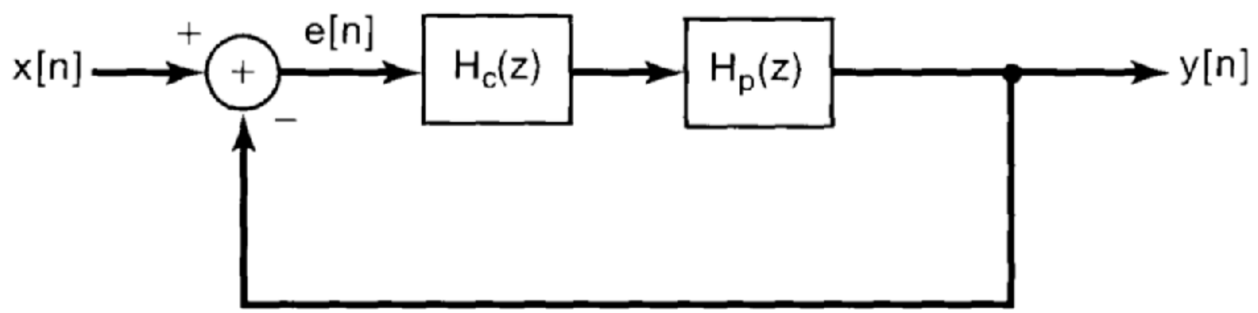






Sistemas de seguimiento o rastreo

- Asumamos que $H_p(z)$ representa la transferencia del sistema (*planta*) que se busca controlar su salida y $H_c(z)$ la transferencia de un controlador a diseñar cuya entrada es la diferencia $e[n] = x[n]$ - $y[n]$, y notemos $H(z)$= $H_c(z)$ $H_p(z)$



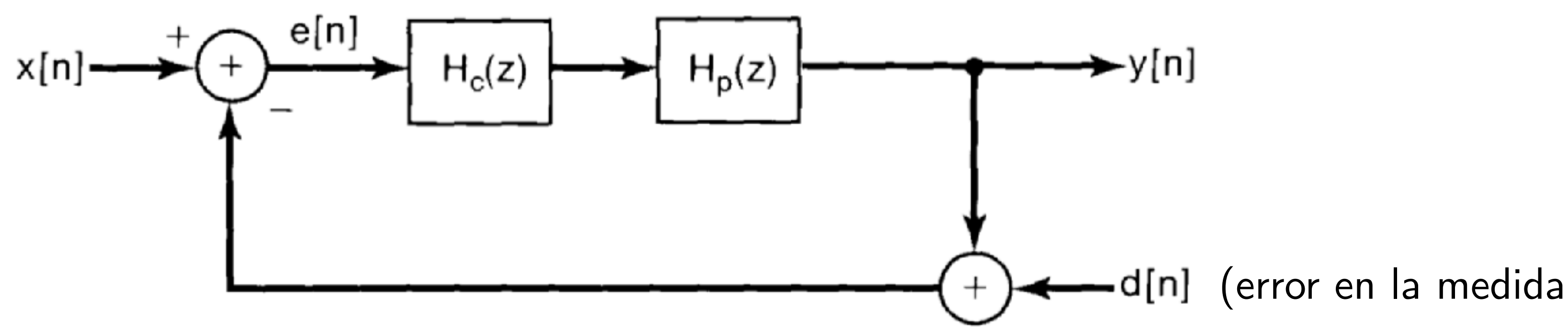
$$Y(z) = \frac{H(z)}{1+H(z)}X(z), Y(z) = H(z)E(z) \Rightarrow E(z) = \frac{1}{1+H(z)}X(z)$$

- Si queremos un buen seguimiento buscamos minimizar el error en la respuesta frecuencial
$$E(e^{j\theta}) = \frac{1}{1+H\left(e^{j\theta}\right)}X\left(e^{j\theta}\right) \simeq 0$$
  - Para las frecuencias donde $X(e^{j\theta})$ no es cero necesitamos que $|H(e^{j\theta})|$ sea grande.
- Buen seguimiento requiere altas ganancias.
  - Pero puede traer malas consecuencias...

Sistemas de seguimiento o rastreo

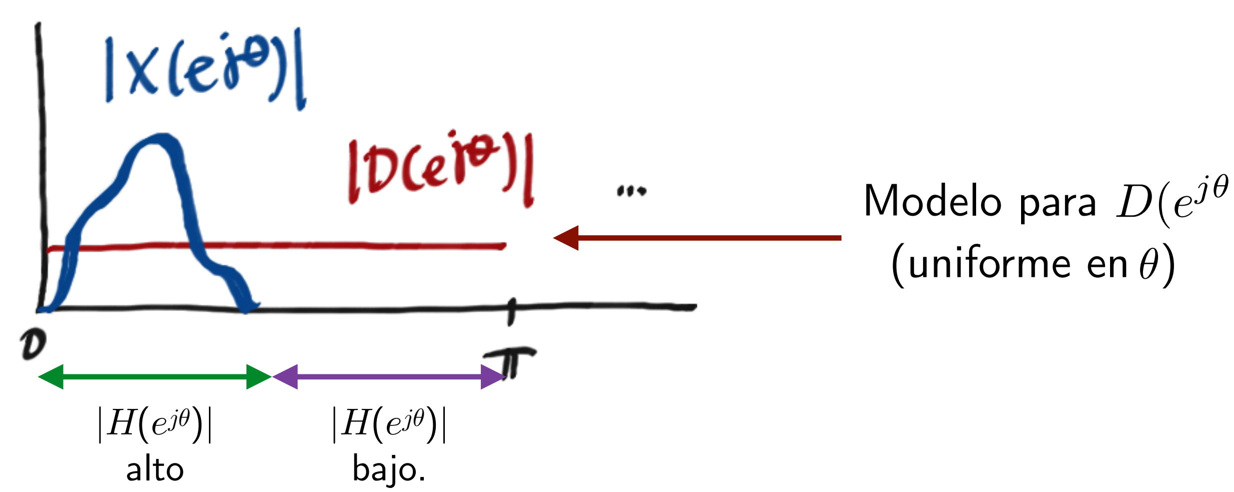
- Al medir $y[n]$ **siempre cometemos un error** que llamaremos como $d[n]$

$$\tilde{y}[n] = y[n] + d[n]$$

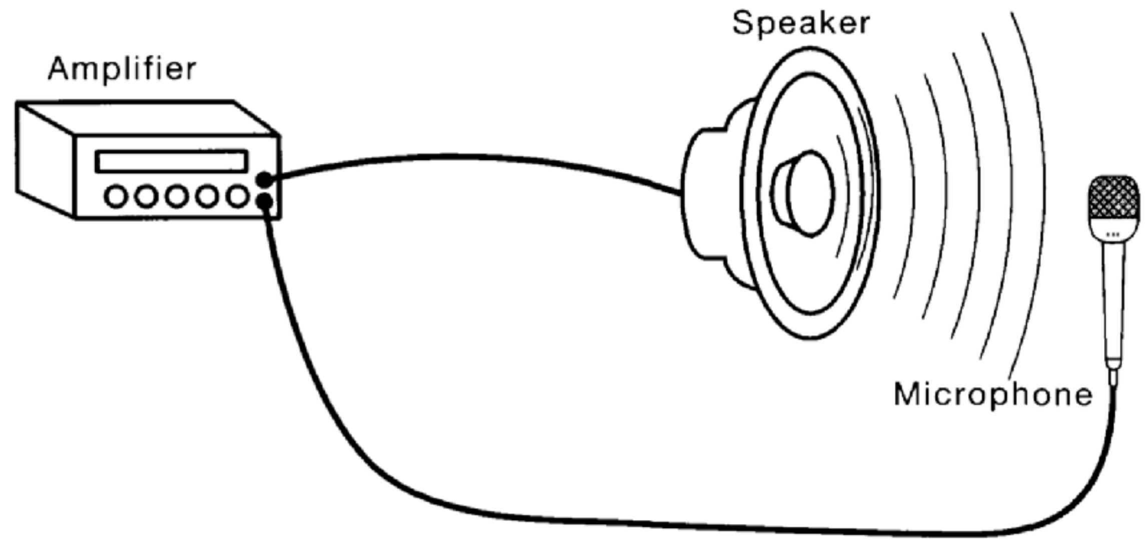


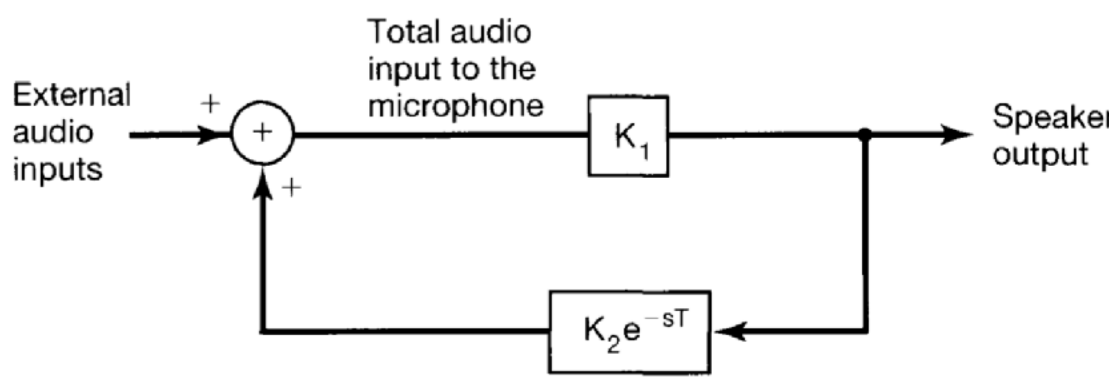
$$Y(e^{j\theta}) = \left[\frac{H(e^{j\theta})}{1+H(e^{j\theta})}X(e^{j\theta})\right] - \left[\frac{H(e^{j\theta})}{1+H(e^{j\theta})}D(e^{j\theta})\right]$$

- Para disminuir el efecto de $d[n]$ necesitamos que $|H(e^{j\theta})|$ sea bajo. 🤔
- ¿Cómo hacer que $|H(e^{j\theta})|$ sea alto y bajo?
  - Depende de las características en frecuencia de $X(e^{j\theta})$ y $D(e^{j\theta})$.



Desestabilización a causa de la realimentación

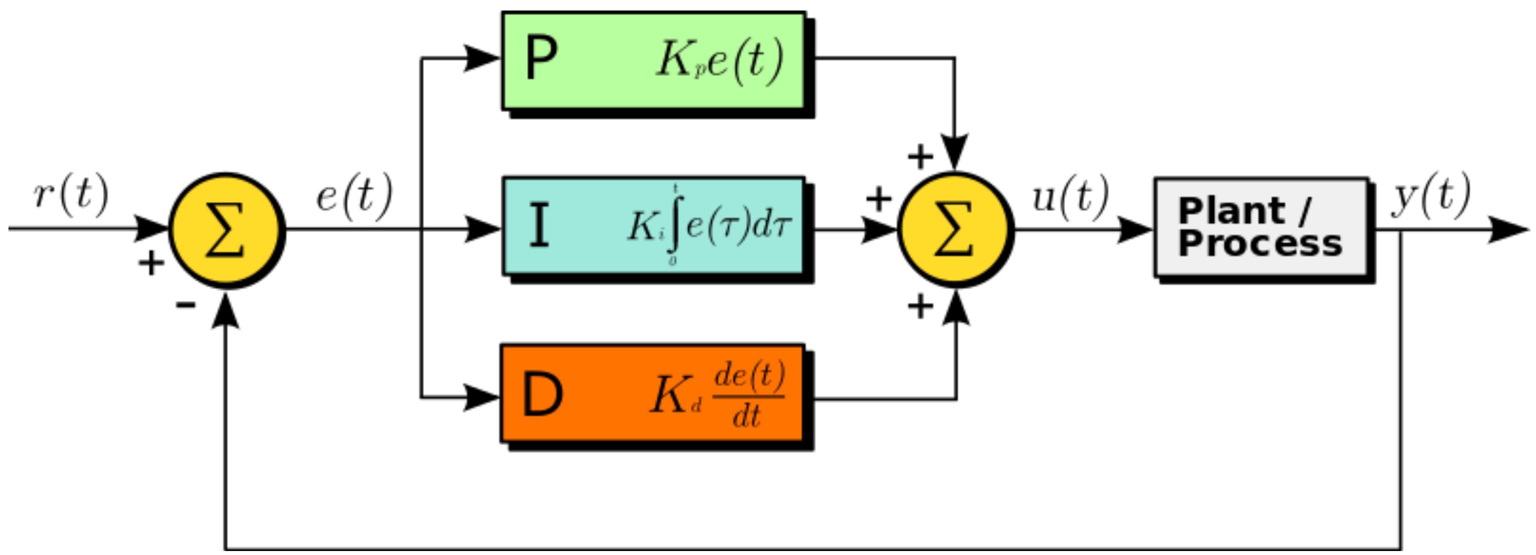




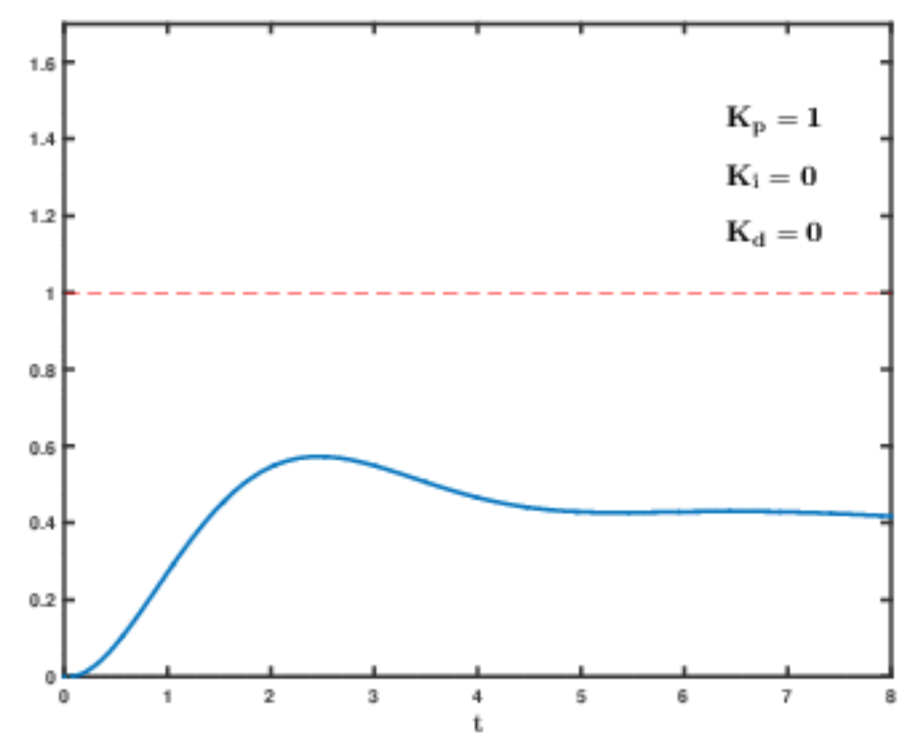
$$Q(s) = \frac{K_1}{1 - K_1 K_2 e^{-sT}}$$

- $K_1 > 1$ (amplificación), T (retardo) y $K_2 < 1$ (atenuación) dados por distancia.
- Inestable si $K_1 K_2 > 1$
  - Para este análisis se precisan herramientas que se verán en cursos posteriores: Sistemas y Control(root-locus, criterios de Nyquist).

Controlador proportional–integral–derivative (PID)



PID controller in a feedback loop, $r(t)$ is the desired process value or "set point", and $y(t)$ is the measured process value.



Effects of varying PID parameters (K_p, K_i, K_d) on the step response of a system.

https://en.wikipedia.org/wiki/Control_system#/media/File:PID_Compensation_Animated.gif

Sistemas realimentados: resumen

- La realimentación permite modificar la respuesta de un sistema.
- Podemos lograr diferentes objetivos:
  - Estabilización
  - Respuesta uniforme
  - Invertir la respuesta de un sistema
  - Desestabilizar
- Tiempo discreto y tiempo continuo.
- Tenemos algunas herramientas para analizar sistemas realimentados. Necesitamos otros métodos y fundamentos para el análisis y diseño de sistemas realimentados, que se verán en otros cursos de la carrera