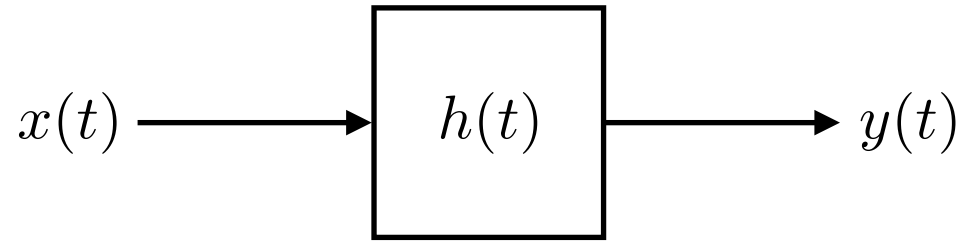
Señales y Sistemas

Transformada de Laplace

Instituto de Ingeniería Eléctrica

UNIVERSIDAD
DE LA REPÚBLICA
URUGUAY

Transformada de Laplace



$$y(t) = x(t) * h(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau)h(t-\tau)d\tau = \int_{-\infty}^{+\infty} h(\tau)x(t-\tau)d\tau$$

Con una entrada exponencial $x(t) = e^{st}$

$$y(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} h(\tau)e^{s(t-\tau)}d\tau = e^{st}\underbrace{\int_{-\infty}^{+\infty} h(\tau)e^{-s\tau}d\tau}_{H(s)} = x(t)H(s)$$

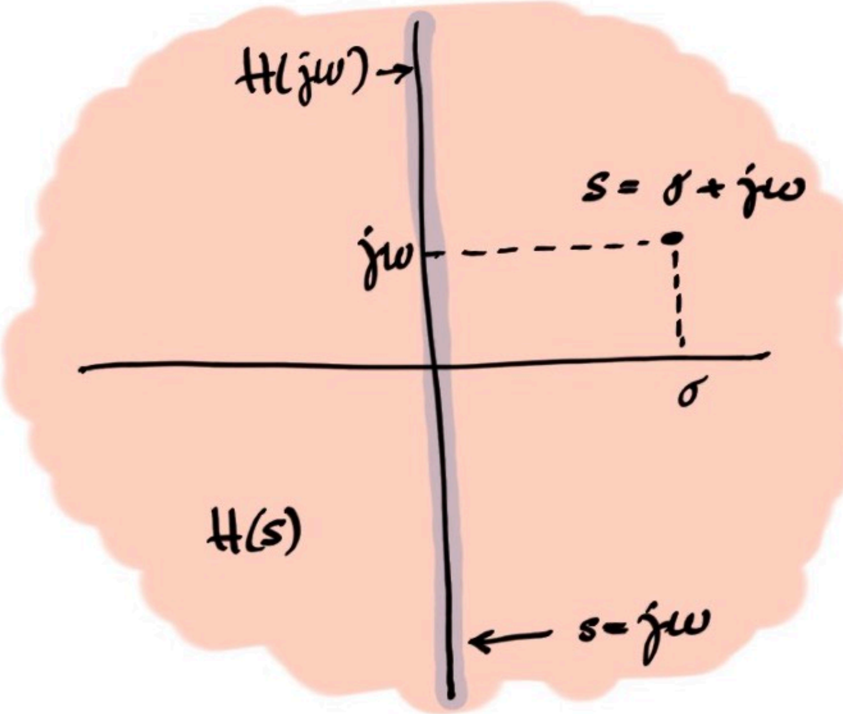
Transformada de Laplace

$$\mathcal{L}\{x(t)\} = X(s) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau)e^{-s\tau}d\tau$$

$$x(t) \overset{\mathcal{L}}{\longleftrightarrow} X(s)$$

$$s = \sigma + j\omega$$

Transformada de Laplace y Transformada de Fourier



$$X(s)|_{s=j\omega} = X(j\omega) = \mathcal{F}\{x(t)\} = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau)e^{-j\omega\tau}d\tau$$

$$\begin{aligned} X(s) &= \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau)e^{-s\tau}d\tau = \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau)e^{-\sigma\tau}e^{-j\omega\tau}d\tau = \mathcal{F}\{x(t)e^{-\sigma t}\} \end{aligned}$$

- ¿Convergencia? $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} |x(\tau)e^{-\sigma\tau}|d\tau < \infty$
- La TL puede converger en regiones (ROC) donde la TF no lo converge.
- TL generaliza a la TF.
- Permite analizar SLIT de variable continua en casos más generales.

Ejemplo (9.1)

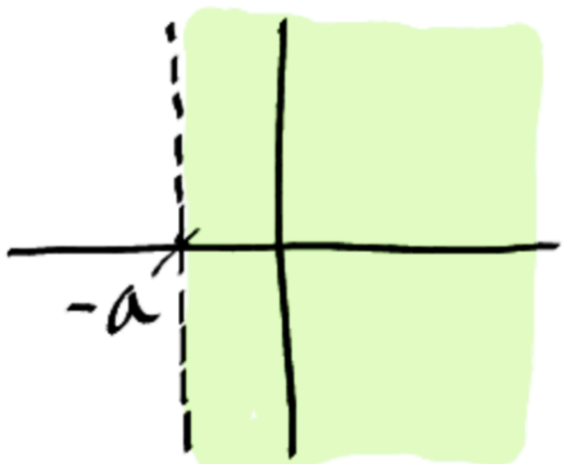
$$x(t) = e^{-at}u(t) \quad a>0 \leftarrow \text{para convergencia de la TF}$$

Recordemos $X(j\omega) = \dfrac{1}{a+j\omega} \quad a>0$

$$X(s) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)e^{-st}\,dt = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-at}u(t)\,e^{-st}\,dt = \int_{0}^{+\infty} e^{-(s+a)t}\,dt$$

$$= \frac{1}{-(s+a)}\, e^{-(s+a)t}\Big|_{0}^{+\infty} = \frac{1}{s+a} = X(s), Re\{s\} > -a$$

Los puntos $Re\{s\}>-a$ donde converge es la Región de Convergencia (ROC).



$$\mathcal{L}\{e^{-at}u(t)\} = \frac{1}{s+a}, \quad Re\{s\} > -a$$

Ejemplo (9.2)

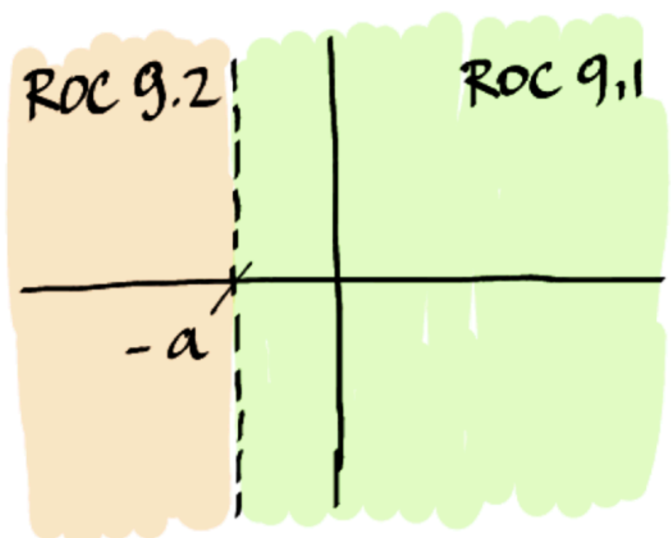
$$x(t) = -e^{-at}u(-t)$$

$$X(s) = \int_{-\infty}^{+\infty} -e^{-at}u(t)e^{-st}dt = \int_{-\infty}^{0} -e^{-(a+s)t}dt =$$

$$= \frac{1}{a+s}, \quad Re\{s\} < -a$$

si $(a+s)<0$

Misma expresión algebraica con diferente ROC.



- La TL son **dos partes**:
  - la expresión algebraica $X(s)$, y
  - la ROC.

$$\mathcal{L}\{-e^{-at}u(-t)\} = \frac{1}{s+a}, \quad Re\{s\} < -a$$

$$\mathcal{L}\{e^{-at}u(t)\} = \frac{1}{s+a}, \quad Re\{s\} > -a$$

Ejemplo: delta, escalón unitario y derivadas de la delta

- Delta

$$\mathcal{L}\{\delta(t)\} = \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(\tau)e^{-s\tau}d\tau = e^0 = 1, \quad \forall s$$

- Escalón

$$\mathcal{L}\{u(t)\} = \int_{-\infty}^{+\infty} u(\tau)e^{-s\tau}d\tau = \int_{0}^{+\infty} e^{-s\tau}d\tau = \frac{1}{s}, \quad Re\{s\} > 0$$

- Derivadas de la delta

$$u_n(t) = \frac{d^n\delta(t)}{dt^n}$$

$$\mathcal{L}\{u_n(t)\} = s^n, \forall s$$

Ejemplo (9.3)

$$x(t) = 3e^{-2t}u(t) - 2e^{-t}u(t)$$

$$X(s) = 3\int_{0}^{+\infty} e^{-2t}e^{-st}\,dt - 2\int_{0}^{+\infty} e^{-t}e^{-st} =$$

$$= \underbrace{\frac{3}{s+2}}_{\text{si } Re\{s\}>-2} + \underbrace{\frac{-2}{s+1}}_{\text{si } Re\{s\}>-1}$$

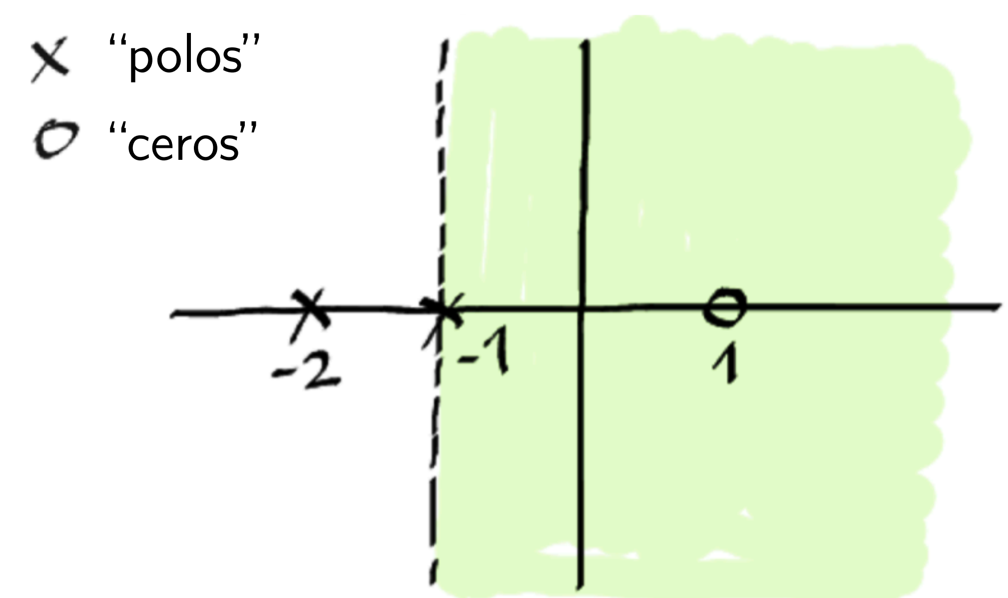
Se deben cumplir ambas condiciones al mismo tiempo ($R_1 \cap R_2$)

$\Rightarrow$ ROC : $Re\{s\} > -1$

$$= \frac{s-1}{(s+2)(s+1)} \qquad Re\{s\} > -1$$

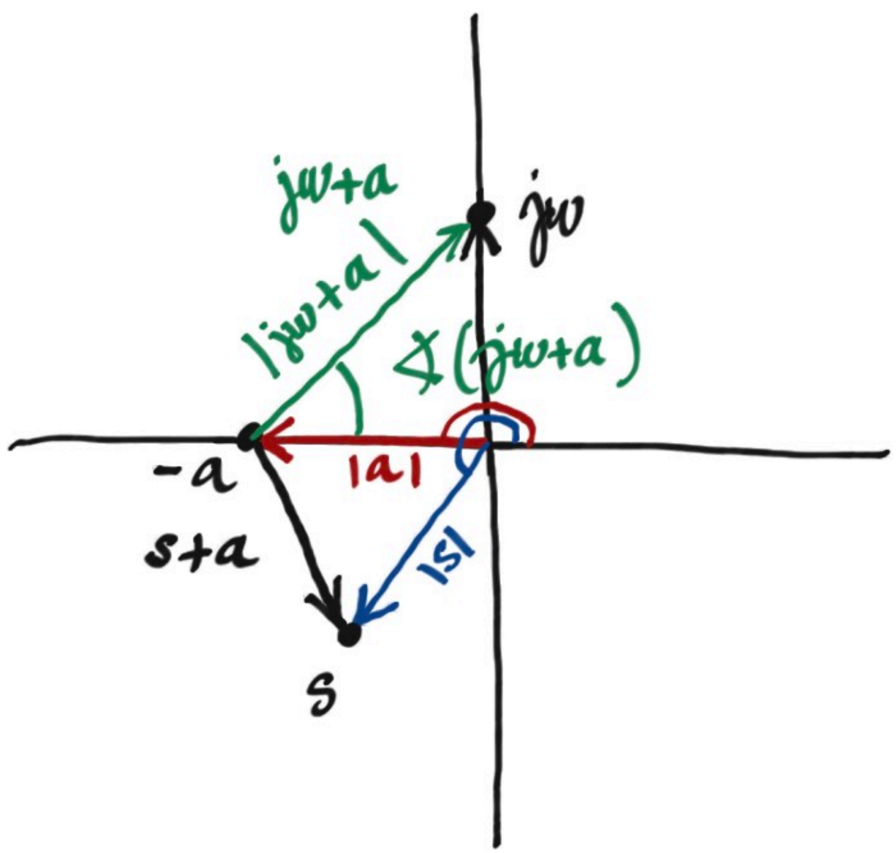
- TL racional

$$X(s) = \frac{N(s)}{D(s)}$$

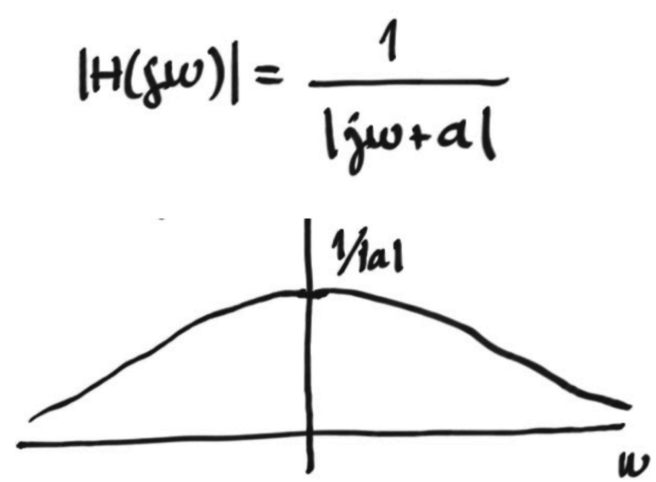


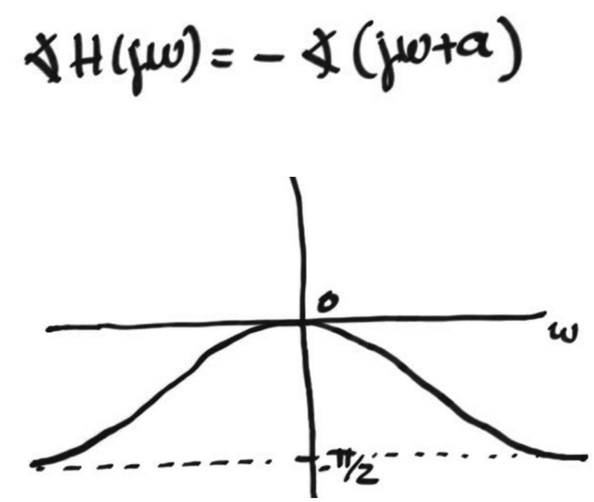
Polos y ceros de la TL

- TL racional $\quad X(s) = \dfrac{N(s)}{D(s)}$
- Las raíces de $X(s)$ son sus **ceros**. Los **polos** son los ceros de $D(s)$.
- El conjunto de **polos** y **ceros** de una TL la caracterizan completamente.
- El diagrama de polos y ceros también nos permite analizar la TF, $X(j\omega)$.

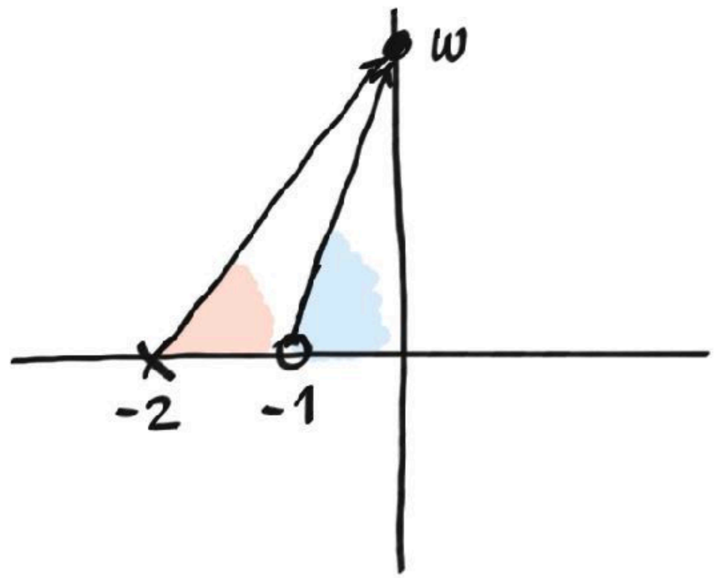


$$H(s) = \frac{1}{s+a} \qquad H(j\omega) = \frac{1}{j\omega + a}$$



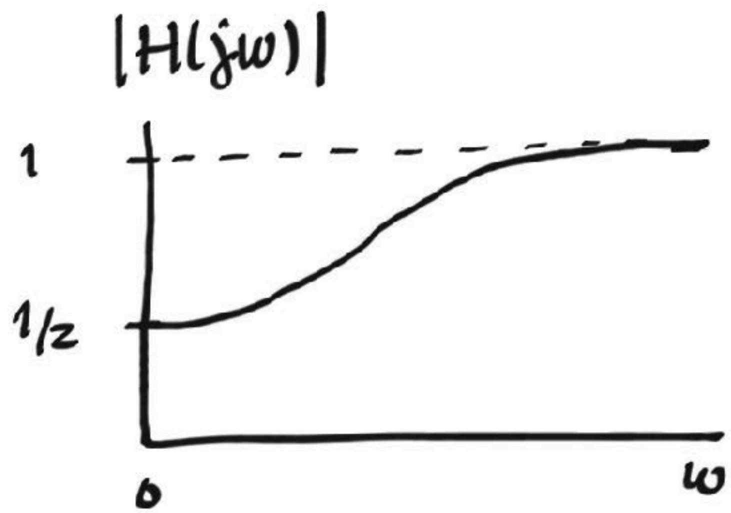


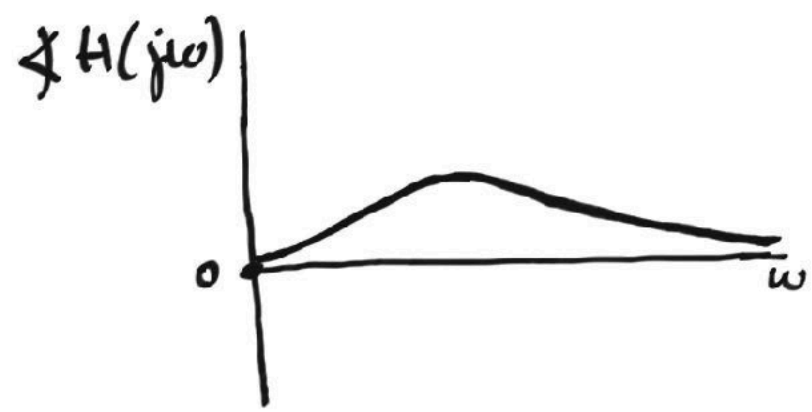
Evaluación de la respuesta frecuencial a partir de polos y ceros de la TL



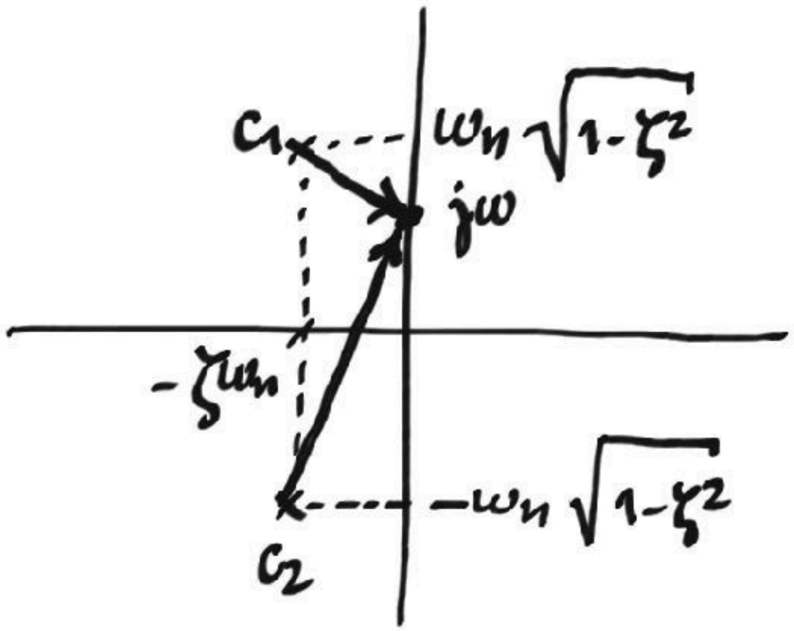
$$H(s) = \frac{s+1}{s+2}$$

$$H(j\omega) = \frac{j\omega+1}{j\omega+2}$$





Evaluación de la respuesta frecuencial a partir de polos y ceros de la TL



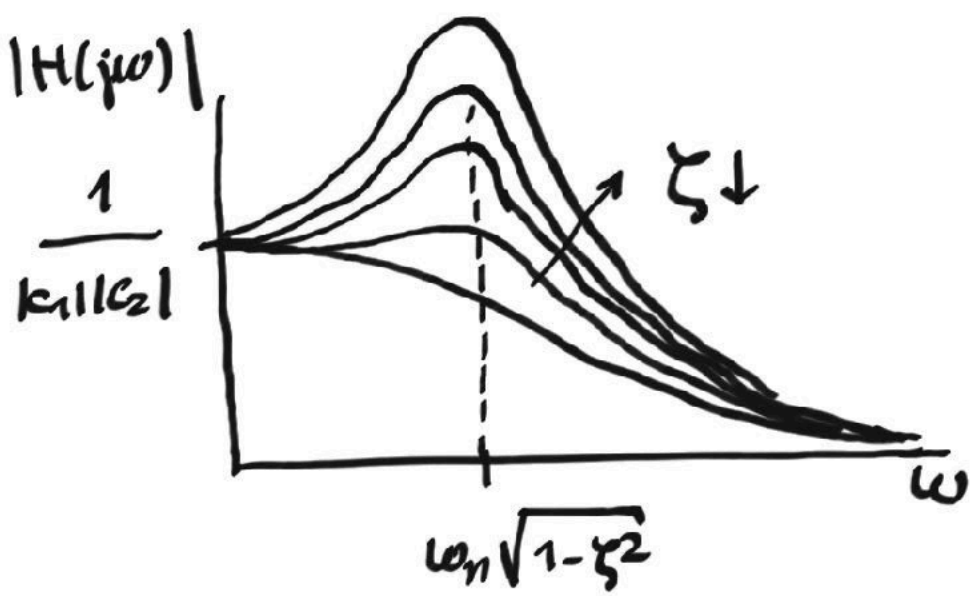
$$h(t) = M\left(e^{c_1 t} - e^{-c_2 t}\right)u(t)$$

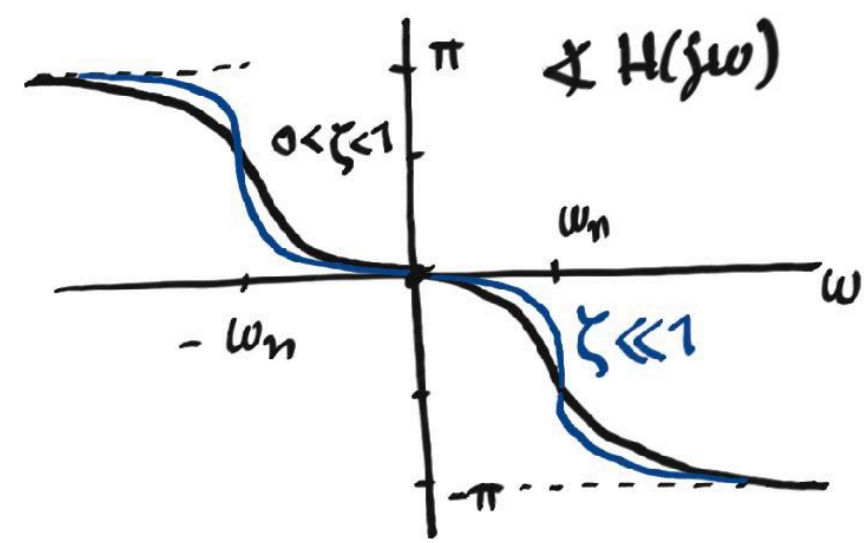
$$H(s) = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2} = \frac{\omega_n^2}{(s-c_1)(s-c_2)}$$

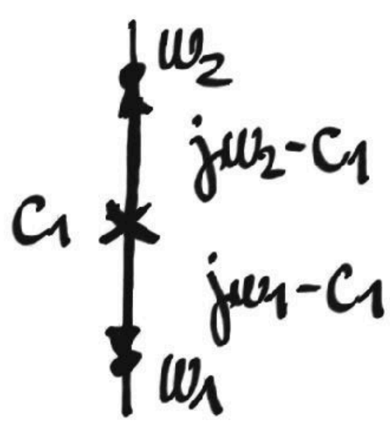
$$M = \frac{\omega_n}{2\sqrt{\zeta^2-1}}$$

$$c_{1,2} = -\zeta\omega_n \pm \omega_n\sqrt{\zeta^2-1}$$

$0<\zeta<1$







Polo sobre el eje pone un salto de fase de π.

Ejemplo (9.4)

$$x(t) = e^{-2t}u(t) + e^{-t}\cos(3t)\,u(t)$$
$$= \left(e^{-2t} + \tfrac{1}{2}e^{-(1-3j)t} + \tfrac{1}{2}e^{-(1+3j)t}\right)u(t)$$

$$X(s) = \underbrace{\frac{1}{s+2}}_{Re\{s\}>-2} + \underbrace{\frac{1/2}{s+(1-3j)}}_{Re\{s\}>-1} + \underbrace{\frac{1/2}{s+(1+3j)}}_{Re\{s\}>-1}$$

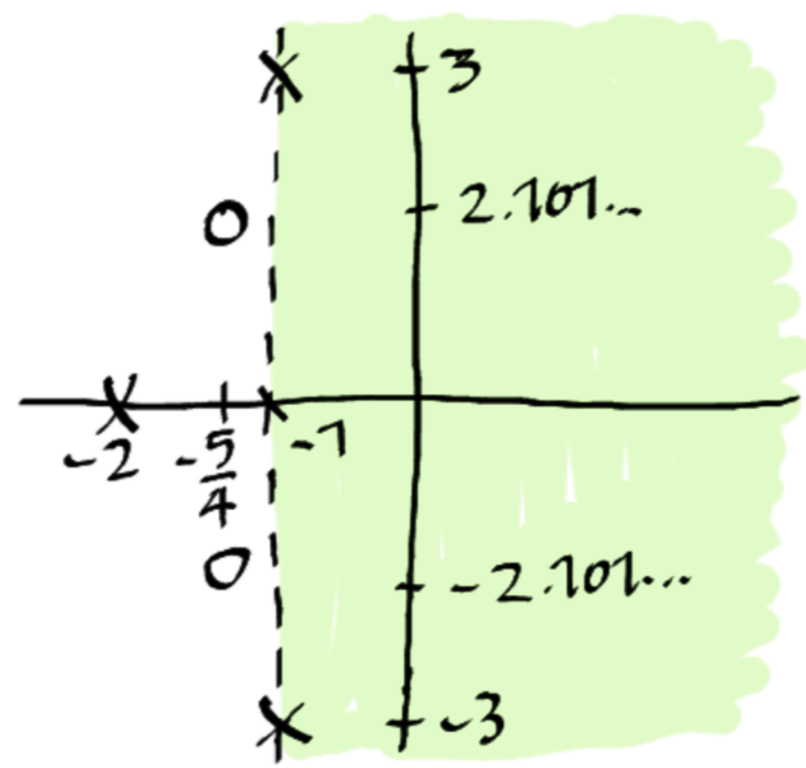
$$= \frac{2s^2+5s+12}{(s^2+2s+10)(s+2)} \quad Re\{s\}>-1$$

Polos $\longrightarrow \{-2, -1-3j, -1+3j\}$

Ceros $\longrightarrow \left\{\dfrac{-5 \pm \sqrt{25-4\times2\times12}}{4}\right\}$

$$\left\{-\frac{5}{4} \pm j\,\frac{\sqrt{71}}{4}\right\}$$

$1.25 \pm j\,2.101\ldots$



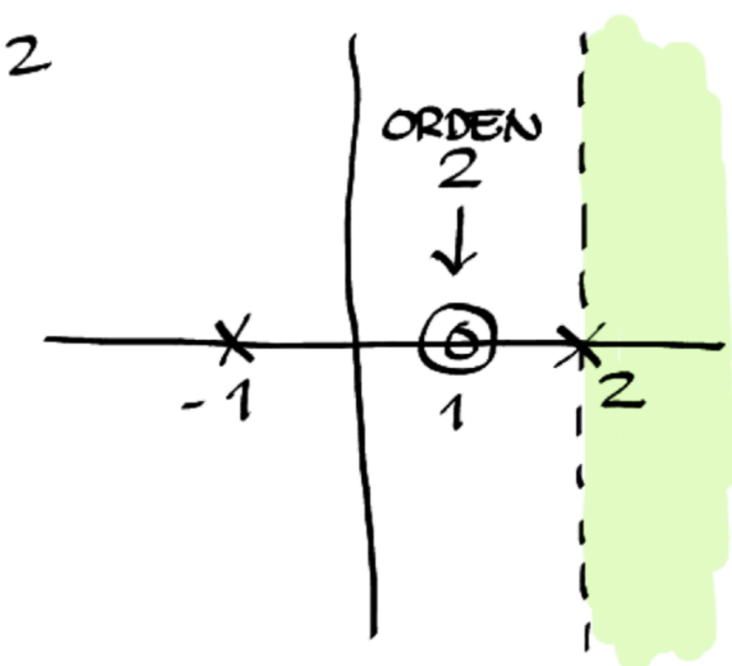
Ejemplo (9.5)

$$x(t) = \delta(t) - 4/3\, e^{-t} u(t) + 1/3\, e^{2t} u(t)$$

$$\mathcal{L}\{\delta(t)\} = \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t) e^{-st} dt = e^{0} = 1 \quad \forall s \quad \text{ROC: plano-}S$$

$$X(s) = 1 - 4/3 \underbrace{\frac{1}{s+1}}_{Re\{s\} > -1} + 1/3 \underbrace{\frac{1}{s-2}}_{Re\{s\} > 2}$$

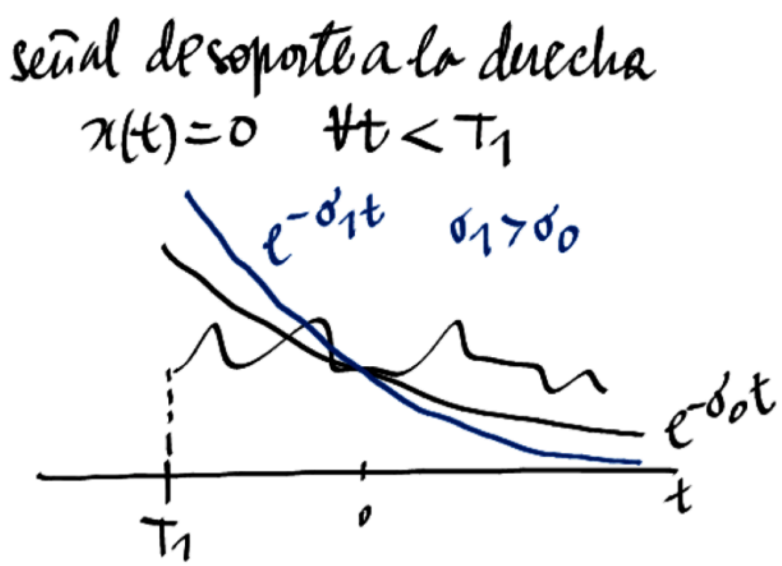
$$= \frac{(s-1)^2}{(s+1)(s-2)} \quad Re\{s\} > 2$$

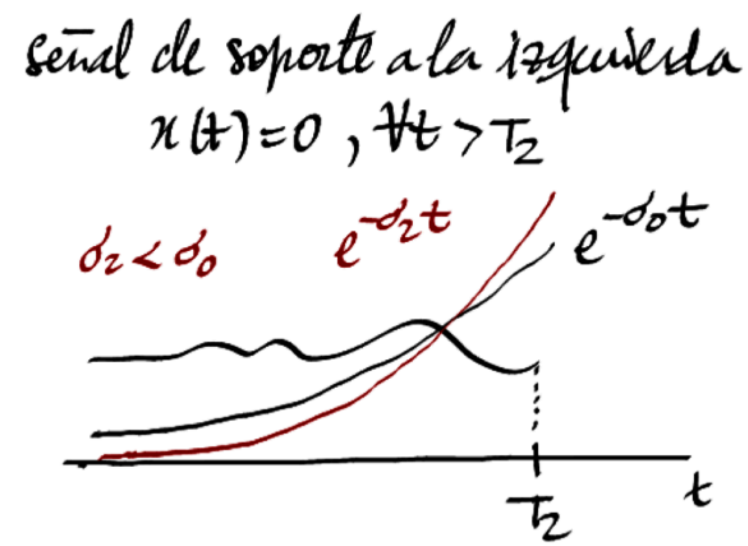


En este caso $s = j\omega$ no está incluido en la ROC. Por lo tanto no se puede definir la TF, pero sí tenemos TL.

Propiedades de la ROC

1. La ROC de $X(s)$ consiste en franjas paralelas al eje imaginario.
2. La ROC de $X(s)$ racional (cociente de polinomios) no contiene polos.
3. Si $x(t)$ es de duración finita (soporte acotado) y absolutamente integrable, entonces la ROC es todo el plano-S.
4. Si $x(t)$ es *de soporte acotado a la derecha* y la línea $Re\{s\} = \sigma_0$ está en la ROC, entonces todos los valores $\{s|Re\{s\} > \sigma_0\}$ están en la ROC.
5. Si $x(t)$ es *de soporte acotado a la izquierda* y la línea $Re\{s\} = \sigma_0$ está en la ROC, entonces todos los valores $\{s|Re\{s\} < \sigma_0\}$ están en la ROC.

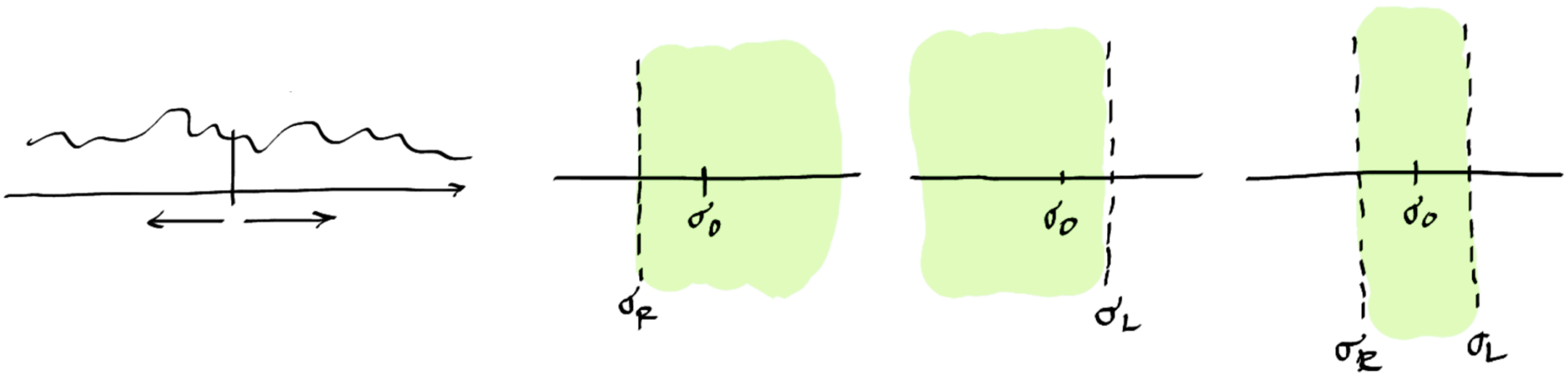




Notar que la respuesta al impulso de un SLIT **causal** es de *soporte acotado a la derecha*, entonces su ROC será un **semiplano derecho**.

Propiedades de la ROC

6. Si $x(t)$ es *de soporte no acotado* y la línea $Re\{s\} = \sigma_0$ está en la ROC, entonces la ROC es una franja que incluye a $Re\{s\} = \sigma_0$.



7. Si $X(s)$ es racional, entonces su ROC está limitada por los polos o se extiende al infinito. Además, ningún polo de $X(s)$ está contenido en la ROC.
8. Si $X(s)$ es racional y si $x(t)$ es de *soporte acotado a la derecha*, la ROC será la región en el plano-S que se encuentra a la derecha del polo localizado más hacia la derecha. Para una señal de *soporte acotado a la izquierda*, la ROC será la región en el plano-S que se encuentra a la izquierda del polo localizado más hacia la izquierda.

Ejemplo (9.6)

$$x(t) = \begin{cases} e^{-at} & 0<t<T \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

$$X(s) = \int_0^T e^{-at} e^{-st}\, dt = \frac{1}{s+a}\left(-e^{-(s+a)t}\right)\Big|_0^T = \frac{1}{s+a}\left(1 - e^{-(s+a)T}\right)$$

¿Tiene un polo en $s=-a$? ¿Contradice la Prop. 3? No

También hay un cero en $s=-a$ y se cancelan.

Hacemos L'Hopital

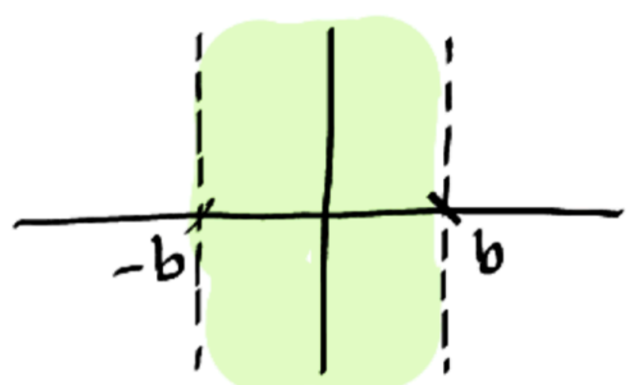
$$\lim_{s\to -a} X(s) = \lim_{s\to -a} \frac{\frac{d}{ds}\left(1 - e^{-(s+a)T}\right)}{\frac{d}{ds}(s+a)} = \lim_{s\to -a} \frac{T e^{-aT} e^{-sT}}{1} = T$$

Ejemplo (9.7)

$$x(t) = e^{-b|t|} = e^{-bt}u(t) + e^{bt}u(-t)$$

$$X(s) = \underset{\mathrm{Re}\{s\} > -b}{\frac{1}{s+b}} - \underset{\mathrm{Re}\{s\} < b}{\frac{1}{s-b}}$$

- Si $b<0$ las ROCs no se intersectan y no hay TL.
- Si $b>0$, $-b < \sigma < b$ $\quad X(s) = \dfrac{-2b}{s^2-b^2}$



Propiedades de la Transformada de Laplace

$x(t) \overset{\mathcal{L}}{\longleftrightarrow} X(s)$, ROC: R $\qquad x_1(t) \overset{\mathcal{L}}{\longleftrightarrow} X_1(s)$, ROC: R_1 $\qquad x_2(t) \overset{\mathcal{L}}{\longleftrightarrow} X_2(s)$, ROC: R_2

- Linealidad

$$a\,x_1(t) + b\,x_2(t) \overset{\mathcal{L}}{\longleftrightarrow} a\,X_1(s) + b\,X_2(s), \text{ ROC } \supset R_1 \cap R_2$$

$X_1(s) = \frac{1}{s+1} \quad Re\{s\} > -1 \qquad x(t) = x_1(t) - x_2(t)$

$X_2(s) = \frac{1}{(s+1)(s+2)} \quad Re\{s\} > -1$

$X(s) = X_1(s) - X_2(s) = \frac{1}{s+1} - \frac{1}{(s+1)(s+2)} = \frac{1}{s+2} \qquad Re\{s\} > -2$

Hay cancelación cero-polo y la ROC es más grande que la intersección de las ROCs.

- Desplazamiento en t

$$x(t-t_0) \overset{\mathcal{L}}{\longleftrightarrow} e^{-st_0}X(s), \text{ ROC} = R$$

- Desplazamiento en s

$$e^{s_0 t}x(t) \overset{\mathcal{L}}{\longleftrightarrow} X(s-s_0), \text{ ROC} = R + Re\{s_0\}$$

  - La ROC se desplaza. Si hay un polo en $s=a$, el polo se desplaza a $s=a+s_0$.

- Escalado temporal

$$x(at) \overset{\mathcal{L}}{\longleftrightarrow} \frac{1}{|a|}X\left(\frac{s}{a}\right), \text{ ROC} = aR$$

Tarea: demostrar estas propiedades.

Propiedades de la Transformada de Laplace

Propiedades de la Transformada de Laplace

$$x(t) \stackrel{\mathcal{L}}{\longleftrightarrow} X(s),\ \text{ROC: } R \qquad x_1(t) \stackrel{\mathcal{L}}{\longleftrightarrow} X_1(s),\ \text{ROC: } R_1 \qquad x_2(t) \stackrel{\mathcal{L}}{\longleftrightarrow} X_2(s),\ \text{ROC: } R_2$$

- Conjugación

$$x^*(t) \stackrel{\mathcal{L}}{\longleftrightarrow} X^*(s^*),\ \text{ROC} = R$$

  - Con $x(t)$ real $X(s) = X^*(s^*)$

- Convolución

$$x_1(t) * x_2(t) \stackrel{\mathcal{L}}{\longleftrightarrow} X_1(s)X_2(s),\ \text{ROC} \supset R_1 \cap R_2$$

Igual que antes puede ser más grande la ROC a la $R_1 \cap R_2$ si hay cancelación cero-polo.

$$X_1(s) = \frac{s+1}{s+2} \quad [\sigma > -2] \qquad X_2(s) = \frac{s+2}{s+1} \quad [\sigma > -1] \qquad \Longrightarrow \quad X(s) = 1 \quad \forall s$$

  - Propiedad clave para el análisis de SLITs.

- Diferenciación temporal

$$\frac{dx(t)}{dt} \stackrel{\mathcal{L}}{\longleftrightarrow} sX(s),\ \text{ROC} \supset R$$

Tarea: demostrar estas propiedades.

Propiedades de la Transformada de Laplace

$$x(t) \overset{\mathcal{L}}{\longleftrightarrow} X(s), \text{ ROC: } R \qquad x_1(t) \overset{\mathcal{L}}{\longleftrightarrow} X_1(s), \text{ ROC: } R_1 \qquad x_2(t) \overset{\mathcal{L}}{\longleftrightarrow} X_2(s), \text{ ROC: } R_2$$

- Diferenciación en s

$$-tx(t) \overset{\mathcal{L}}{\longleftrightarrow} \frac{dX(s)}{ds}, \text{ ROC} = R$$

Ej. $x(t) = te^{-at}u(t)$ conocemos $e^{-at}u(t) \longleftrightarrow \frac{1}{s+a}$ $\sigma > -a$

$\Rightarrow te^{-at}u(t) \longleftrightarrow -\frac{dX(s)}{ds} = \frac{1}{(s+a)^2}, \sigma > -a$

En general

$$\mathcal{L}\left\{-\frac{t^{n-1}}{(n-1)!}e^{-at}u(t)\right\} = \frac{1}{(s+a)^n} \quad Re\{s\} > -a$$

Ej: $X(s) = \frac{2s^2+5s+5}{(s+1)^2(s+2)}$ $Re\{s\} > -1 = \frac{2}{(s+1)^2} - \frac{1}{s+1} + \frac{3}{s+2} \Rightarrow x(t) = \left(2te^{-t} - e^{-t} + 3e^{-2t}\right)u(t)$

- Integración en t

$$\int_{-\infty}^{t} x(\tau)d\tau \overset{\mathcal{L}}{\longleftrightarrow} \frac{1}{s}X(s), \text{ ROC} \supset (R \cap \{Re\{s\} > 0\})$$

$$\int_{-\infty}^{t} x(\tau)\,d\tau = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau)\,u(t-\tau)\,d\tau = x(t) * u(t) \overset{\mathcal{L}}{\longleftrightarrow} X(s)\,\frac{1}{s} \leftarrow Re\{s\} > 0$$

Tarea: demostrar estas propiedades.

Transformada de Laplace Unilateral

Transformada de Laplace Unilateral

$$\mathcal{X}(s) = \int_{0^-}^{+\infty} x(\tau)e^{-s\tau}d\tau$$

- Para analizar sistemas causales donde la entrada está **en reposo** para $t < 0$.
- Usando el inicio en $t = 0^-$ permite incluir **condiciones iniciales**, impulso o singularidad en $t = 0$.
- Para señales nulas antes de cero coincide con la *Transformada de Laplace* ya definida o *Bilateral*.
- Todas las propiedades son iguales, excepto en la derivación en t.
- Al ser señales con *soporte acotado a la derecha* la ROC va a ser un **semiplano derecho**.

Ej (9.33) $x(t) = e^{-a(t+1)} u(t+1)$

TL(B) $X(s) = \dfrac{e^{s}}{s+a}$ $\quad \mathcal{Re}\{s\} > -a$ ← También

TLU $\mathcal{X}(s) = \int_{0^-}^{\infty} e^{-a(t+1)} u(t+1) e^{-st} dt = e^{-a} \int_{0^-}^{\infty} e^{-(s+a)t} dt = \dfrac{e^{-a}}{s+a}$

Transformada de Laplace Unilateral

Ej (9.34) $\quad x(t) = \delta(t) + 2u_1(t) + e^{t}u(t)$

En este caso $x(t) = 0 \;\; \forall t < 0 \Rightarrow$ coincide con la TLB.

$$\mathcal{X}(s) = X(s) = 1 + 2s + \frac{1}{s-1} \qquad Re\{s\} > 1$$

Ej. (9.36) $\quad \mathcal{X}(s) = \dfrac{s^2-3}{s+2} = -2 + s + \dfrac{1}{s+2} \qquad Re\{s\} > -2$

$$x(t) = -2\delta(t) + u_1(t) + e^{-2t}u(t) \qquad t > 0^-$$

Propiedades de la Transformada de Laplace Unilateral

- Convolución: si $x_1(t) = x_2(t) = 0, \forall t < 0$

$$x_1(t) * x_2(t) \overset{\mathcal{UL}}{\longleftrightarrow} \mathcal{X}_1(s)\mathcal{X}_2(s)$$

Usando esta propiedad analizamos para $x(t) = 0,\ t<0$

$$\int_{0^-}^{t} x(t)\,dt = x(t) * u(t) \overset{\mathcal{UL}}{\longleftrightarrow} \frac{1}{s} X(s)$$

- Diferenciación en el t

$$\frac{dx(t)}{dt} \overset{\mathcal{UL}}{\longleftrightarrow} sX(s) - x(0^-)$$

Quizás la diferencia más importante entre TL y TLU

$$\mathcal{UL}\left\{\frac{dx(t)}{dt}\right\} \underset{\text{PARTES}}{=} \int_{0^-}^{\infty} \frac{dx(t)}{dt} e^{-st} dt = x(t)e^{-st}\Big|_{0^-}^{\infty} + s\int_{0^-}^{\infty} x(t)e^{-st}dt = sX(s) - x(0^-)$$

Aquí usamos que $x(t)$ es transformable lo cual garantiza que $\lim_{t\to\infty} x(t)e^{-st} = 0$

$$\frac{d^2x(t)}{dt^2} \overset{\mathcal{UL}}{\longleftrightarrow} s^2X(s) - x(0^-)s - x'(0^-) \qquad \frac{d^nx(t)}{dt^n} \overset{\mathcal{UL}}{\longleftrightarrow} s^nX(s) - \sum_{k=0}^{n-1} s^{k-1} \left.\frac{d^kx(t)}{dt^k}\right|_{t=0^-}$$

Propiedades de la TLU: Teoremas de Valor Inicial y Final

- Resultados que relacionan el comportamiento en *frecuencia* con límites de la señal en el tiempo.
  - Veremos enunciados que se ajustan a los objetivos del curso, pueden plantearse alternativas en otras condiciones.
- Nos concentramos en TL racionales (cociente de polinomios)
- **Teorema de Valor Inicial** (TVI)

  Si $x(t) = 0, \forall t < 0$, $x(t)$ y $x'(t)$ son transformables, y $x(t)$ no contiene impulsos o singularidades de mayor orden en el origen, entonces

$$\lim_{s \to +\infty} s\mathcal{X}(s) = x(0^+)$$

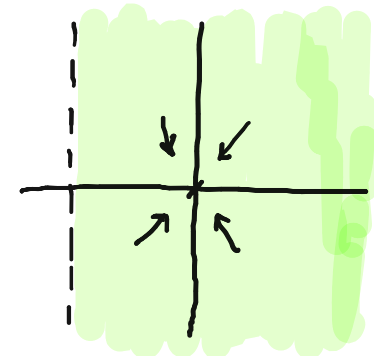
- **Teorema de Valor Final** (TVF)

  Si $x(t) = 0, \forall t < 0$, $x(t)$ y $x'(t)$ son transformables, $x(t)$ no contiene impulsos o singularidades de mayor orden en el origen, y todos los polos de $s\mathcal{X}(s)$ tienen parte real menor a 0, entonces

$$\lim_{s \to 0} s\mathcal{X}(s) = \lim_{t \to +\infty} x(t)$$

Teorema de Valor Final: demostración

El límite en $s \to 0$ es para los complejos en la ROC cuyo módulo tiende a 0. Por eso precisamos garantizar, a través de los polos, de estar trabajando en la ROC.



Planteamos la TLU de $x'(t)$.

$$\mathcal{UL}\{x'(t)\} = sX(s) - x(0^-) = \lim_{T \to +\infty} \int_0^T x'(t) e^{-st} dt$$

ESTE LÍMITE CONVERGE UNIFORMEMENTE AL SER $x'(t)$ TRANSFORMABLE. (*)

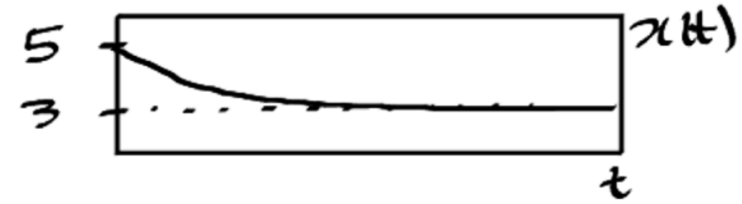
$$\lim_{s \to 0} \mathcal{UL}\{x'(t)\} = \lim_{s \to 0} \lim_{T \to +\infty} \int_0^T x'(t) e^{-st} dt \overset{\text{C.U.}(*)}{=} \lim_{T \to +\infty} \lim_{s \to 0} \int_0^T x'(t) e^{-st} dt =$$

$$= \lim_{T \to +\infty} \int_0^T x'(t) \underbrace{\lim_{s \to 0} e^{-st}}_{\to 1 \atop s \in ROC} dt = \lim_{T \to +\infty} \int_0^T x'(t)\, dt = \lim_{T \to +\infty} x(T) - x(0^-)$$

$$\Rightarrow \lim_{s \to 0} sX(s) = \lim_{t \to +\infty} x(t)$$

Teoremas de Valor Inicial y Final: Aplicación

Ejs. (i) $x(t) = \left(3+2e^{-t}\right)u(t) \longleftrightarrow X(s) = \frac{3}{s} + \frac{2}{s+1}$ $\quad \mathrm{Re}\{s\} > -1$



$\lim_{s\to 0} sX(s) = 3 = \lim_{t\uparrow\infty} x(t) = 3$ ✓

$\lim_{s\to\infty} sX(s) = \lim_{s\uparrow\infty} 3 + \frac{2s}{s+1} = 3 + \lim_{s\uparrow\infty} \frac{2}{1} = 3 + 2 = 5 = x(0)$ ✓

(ii) $x(t) = e^{t}u(t)$ $\quad X(s) = \frac{1}{s-1}$ $\quad \mathrm{Re}\{s\} > 1$

$\lim_{s\uparrow\infty} sX(s) = 1 = x(0^+)$ ✓

$\lim_{s\to 0} sX(s) = 0$ ⊗ Hay un polo en $s=1$; no tenemos convergencia unif.

NO VALE T.V.F.

(iii) $x(t) = \cos(t)\,u(t)$ $\quad X(s) = \frac{s}{s^2+1}$ $\quad \mathrm{Re}\{s\} > -1$

$\lim_{s\uparrow\infty} sX(s) = 1 = x(0^+)$ ✓

$\lim_{s\to 0} sX(s) = 0$ ⊗ Tiene polos conjugados en $\pm j$; no hay conv. unif.

NO VALE TVF

Inversa de la Transformada de Laplace

Inversa de la Transformada de Laplace

- Tenemos la relación entre TL y TF

$$X(\sigma + j\omega) = \mathcal{F}\{x(t)e^{-\sigma t}\}$$

$$x(t)e^{-\sigma t} = \mathcal{F}^{-1}\left\{X(\sigma + j\omega)\right\} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} X(\sigma + j\omega)e^{j\omega t}d\omega$$

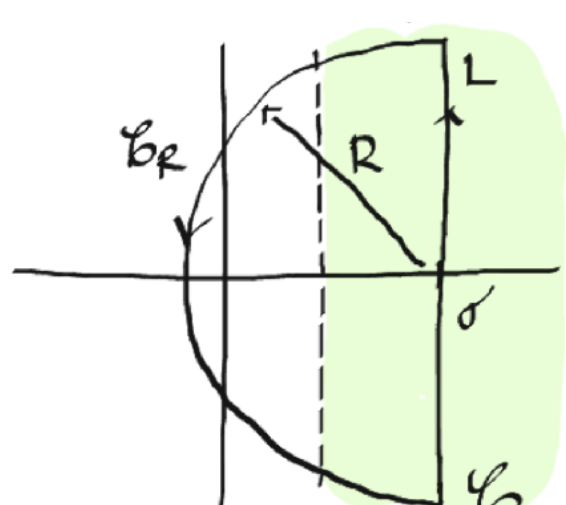
$$x(t) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} X(\sigma + j\omega)e^{(\sigma + j\omega)t}d\omega$$

- Con el cambio de variable $s = \sigma + j\omega \Rightarrow ds = jd\omega$

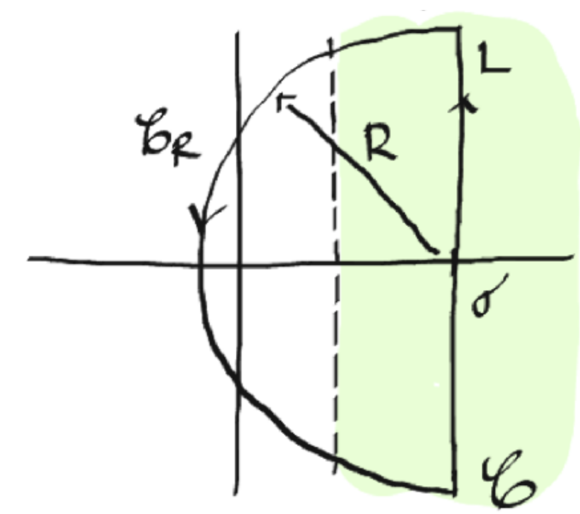
$$x(t) = \frac{1}{j2\pi}\int_{\sigma - j\infty}^{\sigma + j\infty} X(s)e^{st}\,ds$$

Donde σ es cualquiera dentro de la ROC.

- ¿Cómo resolver esta integral?



Inversa de la Transformada de Laplace



- Consideremos una curva $\mathcal{C} = \mathcal{C}_R + L$ antihoraria donde $L \subset \mathrm{ROC}$

$$\oint_{\mathcal{C}} X(s)e^{st}\,ds = \int_L X(s)e^{st}\,ds + \int_{\mathcal{C}_R} X(s)e^{st}\,ds =$$

$$= \int_{\sigma-jR}^{\sigma+jR} X(s)e^{st}\,ds + \int_{\mathcal{C}_R} X(s)e^{st}\,ds =$$

$$= j2\pi \sum_{\text{Polos en } \mathcal{C}} \mathrm{Res}\left[X(s)e^{st}\right] \text{ Teorema de los Residuos}$$

- Con $R \longrightarrow \infty$ y asumiendo $X(s) \longrightarrow 0$ cuando $s \longrightarrow \infty$

$$x(t) = \frac{1}{j2\pi} \int_{\sigma-j\infty}^{\sigma+j\infty} X(s)e^{s\tau}ds = \oint_{\mathcal{C}} X(s)e^{st}ds = \sum_{\text{Polos en } \mathcal{C}} \mathrm{Res}\left[X(s)e^{st}\right]$$

$$\mathrm{Res}[F(s)] = \frac{1}{(n-1)!} \lim_{s\to a} \frac{d^{n-1}}{ds^{n-1}} \left((s-a)^n F(s)\right)$$ Residuo para un polo de orden n en s=a.

$$\mathrm{Res}[X(s)e^{st}] = \lim_{s\to a} \left((s-a)X(s)e^{st}\right)$$ Residuo para un polo de $X(s)e^{-st}$ de orden 1 en s=a.

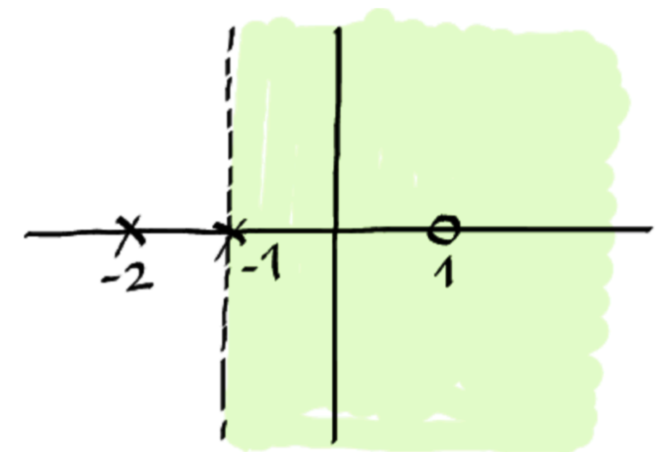
- La inversión evaluando los *residuos* será muy poco usada pues en general tendremos TL racionales y se pueden resolver por fracciones simple.

Inversa de la Transformada de Laplace

- Veamos cómo funciona este procedimiento en caso *conocido* (Ejemplo 9.3)

$x(t) = 3e^{-2t}u(t) - 2e^{-t}u(t)$

Ej. usando (9.3) $\quad X(s) = \dfrac{s-1}{(s+2)(s+1)} \quad \mathrm{Re}\{s\} > -1$



$$x(t) = \sum_{\substack{s=-2\\ s=-1}} \mathrm{Res}\left[X(s)\,e^{st}\right] = \lim_{s\to -2} \frac{(s+2)(s-1)\,e^{st}}{(s+2)(s+1)} +$$

$t>0$

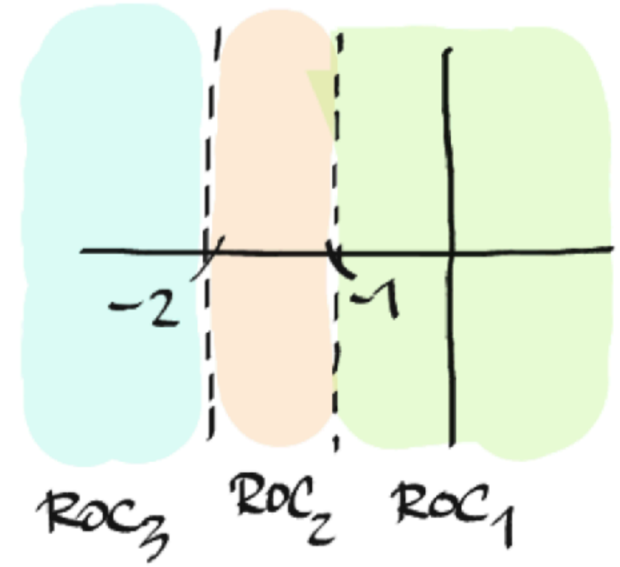
$$\lim_{s\to -1} \frac{(s+1)(s-1)\,e^{st}}{(s+2)(s+1)}$$

$$= \frac{-3}{-1}\, e^{-2t}u(t) + \frac{-2}{1}\, e^{-t}u(t)$$

$$= 3\,e^{-2t}u(t) - 2\,e^{-t}u(t)$$

Inversa de la Transformada de Laplace

Ej. (9.9) $X(s) = \dfrac{1}{(s+1)(s+2)} = \dfrac{1}{s+1} - \dfrac{1}{s+2}$



El plano S se divide en tres regiones; en cada una de ellas tenemos una ITL diferente.
Recordemos los primeros dos ejemplos:

$$e^{-at}u(t) \xleftrightarrow{\mathcal{L}} \frac{1}{s+a} \qquad \sigma > -a$$

$$-e^{-at}u(-t) \xleftrightarrow{\mathcal{L}} \frac{1}{s+a} \qquad \sigma < -a$$

- En ROC$_1$ $\quad x(t) = \left(e^{-t} - e^{-2t}\right)u(t)$ ← soporte acotado a la derecha

- En ROC$_2$ $\quad x(t) = -e^{-t}u(-t) - e^{-2t}u(t)$

- En ROC$_3$ $\quad x(t) = \left(-e^{-t} + e^{-2t}\right)u(-t)$ ← soporte acotado a la izquierda

Resolución de ecuaciones diferenciales de coeficientes constantes

Resolución de ecuaciones diferenciales de coeficientes constantes

- Consideremos la ecuación diferencial de coeficientes constantes

$$\frac{d^2 y(t)}{dt^2} + 3\frac{dy(t)}{dt} + 2y(t) = x(t)$$

- Aplicando la TLB tenemos

$$s^2 \mathcal{Y}(s) + 3s\,\mathcal{Y}(s) + 2\,\mathcal{Y}(s) = \mathcal{X}(s)$$

- Y podemos hallar

$$\mathcal{H}(s) = \frac{1}{s^2+3s+2} = \frac{1}{(s+1)(s+2)}$$

¿ROC?

- Evaluemos la respuesta al escalón

$$x(t) = \alpha u(t) \longleftrightarrow \mathcal{X}(s) = \frac{\alpha}{s} \quad Re\{s\} > 0$$

$$\mathcal{Y}(s) = \frac{\alpha}{s(s+1)(s+2)} = \alpha\left(\frac{1/2}{s} + \frac{-1}{s+1} + \frac{1/2}{s+2}\right)$$

$$y(t) = \left(\frac{\alpha}{2} - \alpha e^{-t} + \frac{\alpha}{2} e^{-2t}\right) u(t)$$

Resolución de ecuaciones diferenciales de coeficientes constantes

- Agreguemos condiciones iniciales

$$y(0^-) = \beta \ , \quad y'(0^-) = \gamma$$

$$s^2 Y(s) - s\,y(0^-) - y'(0^-) + 3Y(s)s - 3y(0^-) + 2Y(s) = X(s) = \frac{\alpha}{s}$$

$$s^2 Y(s) - \beta s - \gamma + 3Y(s)s - 3\beta + 2Y(s) = X(s) = \frac{\alpha}{s}$$

$$Y(s) = \underbrace{\frac{\beta(s+3)}{(s+1)(s+2)} + \frac{\gamma}{(s+1)(s+2)}}_{\text{RESPUESTA A ENTRADA CERO}} + \underbrace{\frac{\alpha}{s(s+1)(s+2)}}_{\text{RESPUESTA A ESTADO CERO}}$$

RESPUESTA A ENTRADA CERO

Lineal con las condiciones iniciales

Si el sistema es estable esta respuesta se anula cuanto $t \to \infty$

RESPUESTA A ESTADO CERO

Igual respuesta que con cond. Iniciales nulas.

RESPUESTA TRANSITORIA

Respuesta natural.

RESPUESTA EN RÉGIMEN

Respuesta forzada.

Análisis y caracterización de SLITs con Transformada de Laplace

Análisis y caracterización de SLITs con Transformada de Laplace

- Análisis de la respuesta de un sistema a partir de $H(s)$: $Y(s) = H(s)X(s)$
  - Convergencia, ecuaciones diferenciales, condiciones iniciales, ...
- Respuesta frecuencial (función de transferencia o función de sistema), $H(j\omega)$, si eje imaginario está incluido la ROC.
  - Podemos analizar propiedades del sistema a partir de $H(s)$ y sus ceros y polos.
- Causalidad de $H(s)$
  - SLIT causal $\Rightarrow h(t) = 0, \forall t < 0$ (soporte acotado a la derecha)
  - La ROC de la $H(s)$ de un SLIT causal es **un semiplano derecho**.
  - Si $H(s)$ es racional su ROC es el semiplano a la derecha del polo más a la derecha.

Análisis y caracterización de SLITs con Transformada de Laplace

- Causalidad: ejemplos

(9.17)
$h(t) = e^{-t} u(t)$

$h(t) = 0 \quad \forall t < 0 \Longrightarrow$ causal

$H(s) = \dfrac{1}{s+1} \quad Re\{s\} > -1$ Polo en $s = -1$
ROC a su derecha

(9.18) $h(t) = e^{-|t|}$

$h(t) \neq 0 \quad t < 0 \Longrightarrow$ No causal

$H(s) = \dfrac{-2}{s^2 - 1}$ $\quad -1 < Re\{s\} < 1$ no es un semiplano derecho.

(9.19) $H(s) = \dfrac{e^s}{s+1} \quad Re\{s\} > -1$ $\qquad h(t) = e^{-(t+1)} u(t+1)$

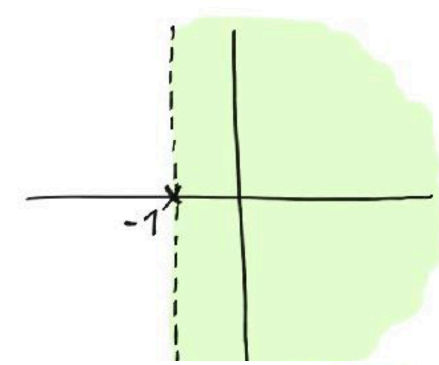
$\downarrow$ Es un semiplano derecho pero no es un SLIT causal, no podemos aplicarlo pues no es racional $H(s)$.

Análisis y caracterización de SLITs con Transformada de Laplace

- Estabilidad BIBO
  - $h(t)$ absolutamente integrable $\Longrightarrow$TF converge uniformemente $\Longrightarrow$ $s{=}j\omega$ en ROC
  - Un SLIT es estable si y solo si la ROC de su función de transferencia $H(s)$ incluye al eje imaginario $s{=}j\omega$.
  - Si la $H(s)$ es racional los polos y ceros determinan sus características.
    - **Un SLIT causal con función de transferencia $H(s)$ racional propia es estable BIBO si y solo si todos los polos de $H(s)$ están en la parte izquierda del plano-S, o sea, todos sus polos tienen parte real negativa.**

(9,17) $h(t) = e^{-t}u(t) \longleftrightarrow H(s) = \dfrac{1}{s+1}$ $\quad Re\{s\} > -1$

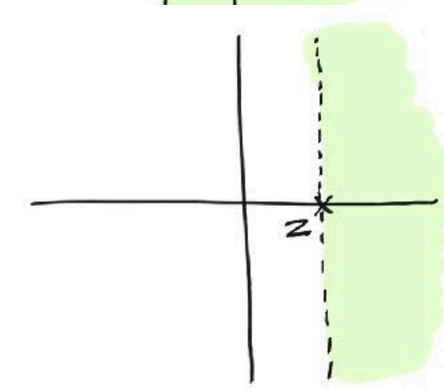
Polo en $s=-1 \Rightarrow$ ESTABLE BIBO



(9,18) $h(t) = e^{2t}u(t) \longleftrightarrow H(s) = \dfrac{1}{s-2}$ $\quad Re\{s\} > 2$

NO ES ABSOLUTAMENTE INTEGRABLE.

Polo en $s=2 \Rightarrow$ NO ES ESTABLE BIBO

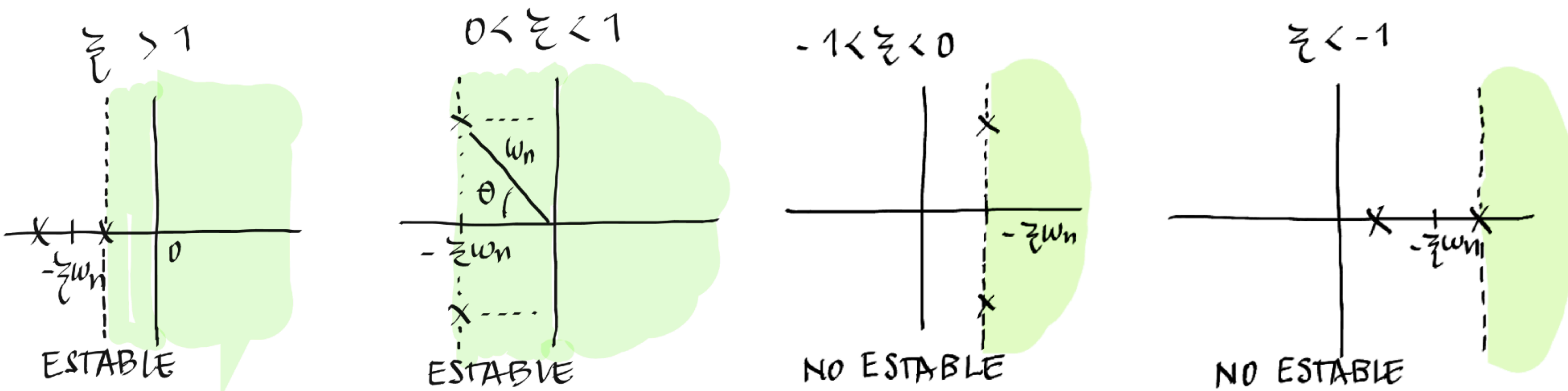


Análisis y caracterización de SLITs con Transformada de Laplace

(9.22) $\quad h(t) = M\left(e^{c_1 t} - e^{c_2 t}\right) u(t)$ respuesta al impulso de un SLIT de segundo orden

$$H(s) = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\xi\omega_n s + \omega_n^2} = \frac{\omega_n^2}{(s-c_1)(s-c_2)}$$

$$M = \frac{\omega_n}{2\sqrt{\xi^2-1}} \qquad c_1 = -\xi\omega_n + \omega_n\sqrt{\xi^2-1} \qquad c_2 = -\xi\omega_n - \omega_n\sqrt{\xi^2-1}$$



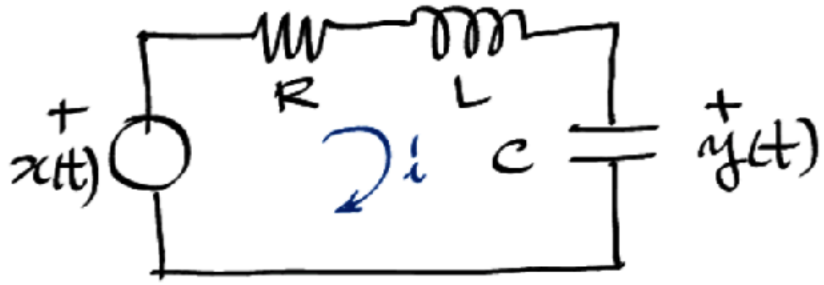
SLITs y ecuaciones diferenciales de coeficientes constantes

$$\sum_{k=0}^{N} a_k \frac{d^k y(t)}{dt^k} = \sum_{k=0}^{M} b_k \frac{d^k x(t)}{dt^k} \xrightarrow{\text{Condiciones iniciales nulas}} Y(s) \sum_{k=0}^{N} a_k s^k = X(s) \sum_{k=0}^{M} b_k s^k$$

$$\Longrightarrow H(s) = \frac{\sum_{k=0}^{M} b_k s^k}{\sum_{k=0}^{N} a_k s^k}$$

- Para $h(t)$ necesitamos definir la ROC. Si se busca estabilidad y/o causalidad esto define la ROC.
  - ¿La estabilidad depende de la ROC o de los polos?
- Si hay *condiciones iniciales no nulas* y con t<0 $x(t)=y(t)=0$ usamos la TL Unilateral.
  - Si **es estable** las condiciones iniciales dan lugar a una **respuesta transitoria** que **tiende a cero** y queda la **respuesta en régimen** dependiente de la entrada $x(t)$.

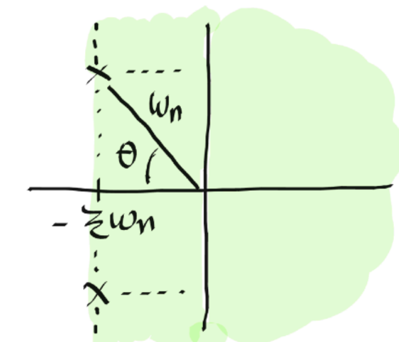
Ejemplo (9.24)



DATOS PREVIOS

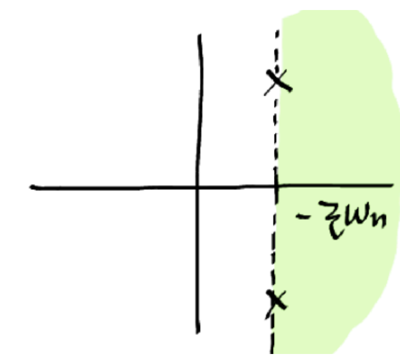
$v_C(0^-)=0$

$v_L(0^-)=0$



$$LC\frac{d^2y(t)}{dt^2} + RC\frac{dy(t)}{dt} + y(t) = x(t)$$

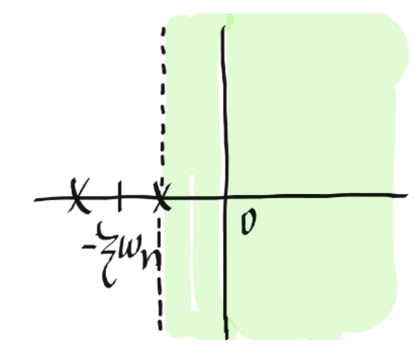
$$LCs^2Y(s) + RCsY(s) + Y(s) = X(s) \qquad H(s) = \frac{(1/LC)}{s^2+(R/L)s+(1/LC)}$$



¿ESTABLE? POLOS EN $\dfrac{-RC \pm \sqrt{(RC)^2-4LC}}{2}$

– si $(RC)^2-4LC<0 \Rightarrow$ Polos imaginarios conjugados con parte real $-RC$

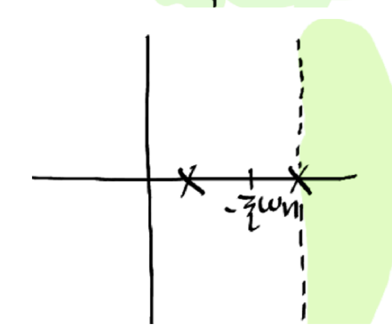
si $R, C > 0 \Rightarrow$ ESTABLE



– si $(RC)^2-4LC>0 \Rightarrow$ El polo más positivo es $-RC+\sqrt{(RC)^2-4LC} \overset{?}{<} 0$

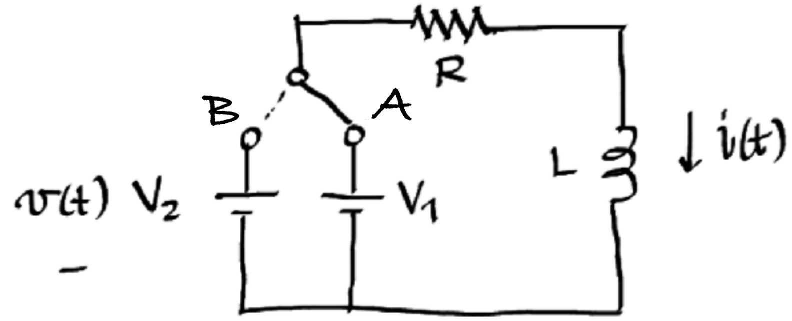
$(RC)^2-4LC<(RC)^2 \Rightarrow -4LC<0$

si $L, C > 0 \Rightarrow$ ESTABLE



Con R, L y C positivos los polos tendrán parte real negativa y el sistema será estable.

Ejemplo (P9.66)



Asumamos que $i(t)$ está en régimen y para $t=0$ la llave conmuta de $A \to B$.

Analicemos $i(t)$, $t>0$.

$$v(t) = R\,i(t) + L\frac{d\,i(t)}{dt}$$

En régimen las variaciones de $i(t)$ serán cero $\Rightarrow \dfrac{d\,i(t)}{dt} = 0$

$$\Rightarrow i(0^-) = \frac{V_1}{R}$$

$\forall t>0$ (TLU)

$$V(s) = R\,I(s) + Ls\,I(s) - L\,i(0^-) = \frac{V_2}{s}$$

$$I(s)\left(R + Ls\right) = \frac{V_2}{s} + L\,i(0^-)$$

$$I(s) = \underbrace{\frac{V_2/L}{s\,(s+R/L)}}_{1} + \underbrace{\frac{i(0^-)}{(s+R/L)}}_{2}$$

Respuesta a estado nulo y respueta a entrada nula.

1 $I(s) = \dfrac{V_2}{R}\left(\dfrac{1}{s} - \dfrac{1}{s+R/L}\right) \Rightarrow i_1(t) = \dfrac{V_2}{R}\left(1 - e^{-(R/L)t}\right)u(t) \quad Re\{s\}>0$

2 $I(s) = \dfrac{V_1}{R}\,\dfrac{1}{s+R/L} \Rightarrow i_2(t) = \dfrac{V_1}{R}\,e^{-(R/L)t}\,u(t) \quad \underline{Re\{s\} > -(R/L)}$

↳ Polos en el semiplano izquierdo.

$$i(t) = \frac{V_2}{R}\,u(t) + \frac{V_1 - V_2}{R}\,e^{-(R/L)t}\,u(t)$$

Vale pues

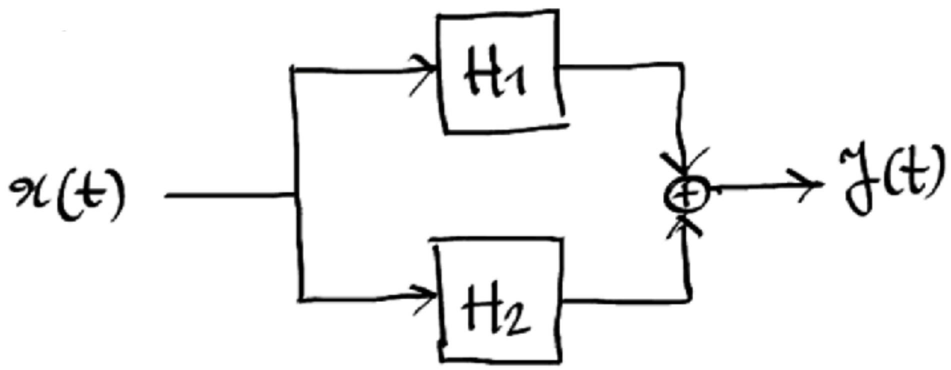
TVF $\displaystyle\lim_{t\to\infty} i(t) = \lim_{s\to 0} s\,I(s) = \frac{V_2}{R}$

TVI $\displaystyle\lim_{s\to\infty} s\,I(s) = i(0^+) = \frac{V_1}{R}$

Representación de SLIT por diagramas de bloques

Representación de SLIT por diagramas de bloques

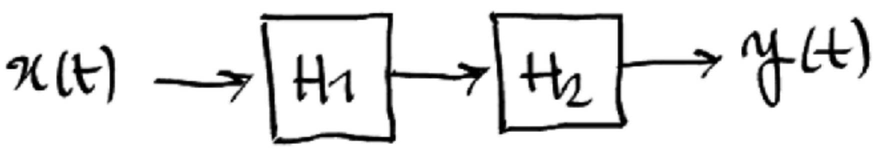
En paralelo



$$y_1(t) = x(t) * (h_1(t) + h_2(t))$$

$$Y(s) = \big(H_1(s) + H_2(s)\big) X(s)$$

En serie

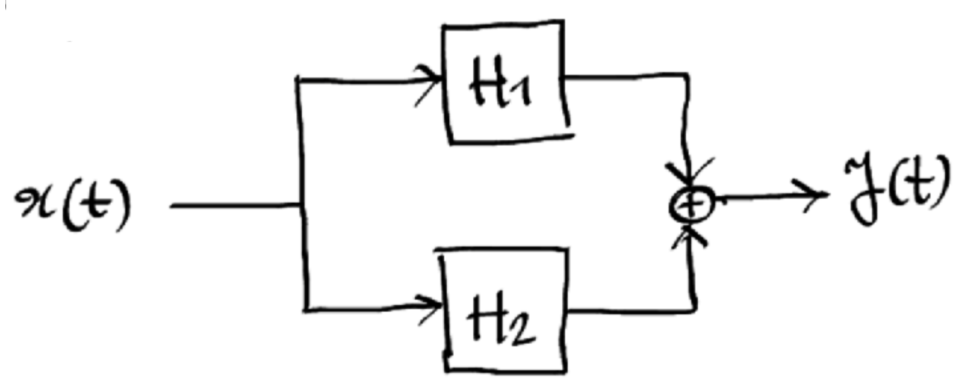


$$y(t) = h_2(t) * (h_1(t) * x(t))$$

$$Y(s) = H_1(s)\, H_2(s)\, X(s)$$

Representación de SLIT por diagramas de bloques

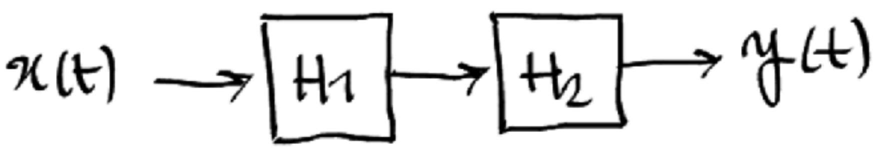
En paralelo



$$y_1(t) = x(t) * (h_1(t) + h_2(t))$$

$$Y(s) = \big(H_1(s) + H_2(s)\big) X(s)$$

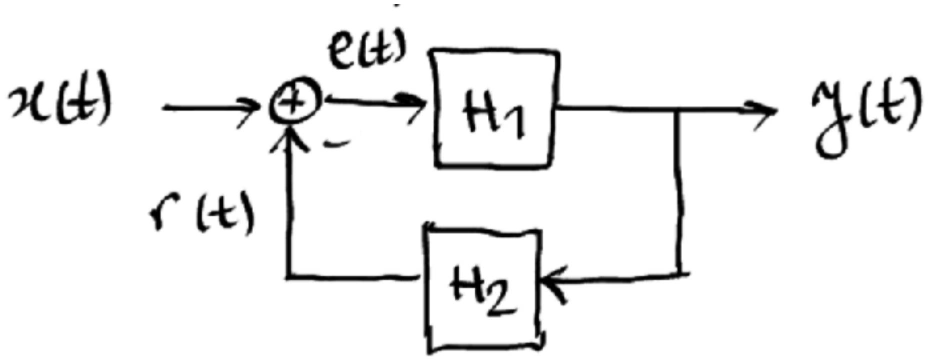
En serie



$$y(t) = h_2(t) * (h_1(t) * x(t))$$

$$Y(s) = H_1(s) H_2(s) X(s)$$

- Ejemplo de análisis de interconexión de SLITs



$$R(s) = Y(s) H_2(s)$$

$$Y(s) = H_1(s) E(s)$$

$$E(s) = X(s) - R(s)$$

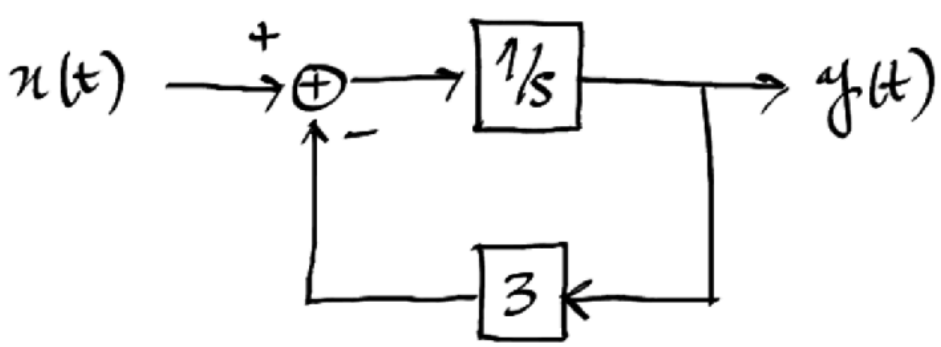
$$Y(s) = H_1(s) \big(X(s) - Y(s) H_2(s)\big) \Rightarrow Y(s) \big(1 + H_1(s) H_2(s)\big) = X(s) H_1(s)$$

$$\rightarrow H(s) = \frac{H_1(s)}{1 + H_1(s) H_2(s)}$$

Representación de ecuaciones diferenciales por diagramas de bloques

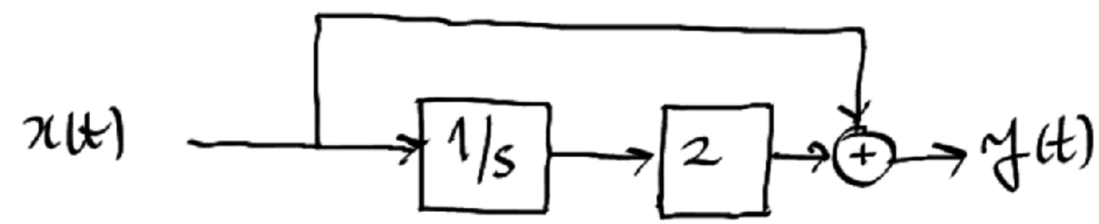
$$\frac{dy(t)}{dt} + 3\,y(t) = x(t)$$

$$\longrightarrow \quad H(s) = \frac{1}{s+3} = \frac{1/s}{1+3/s}$$



$$y(t) = 2\,x(t) + \frac{dx(t)}{dt}$$

$$\longrightarrow \quad H(s) = (s+2) = 1 + 2(1/s)$$



$$\frac{dy(t)}{dt} + 3\,y(t) = 2\,x(t) + \frac{dx(t)}{dt}$$

$$H(s) = \frac{s+2}{s+3} = \left(1 + 2(1/s)\right)\frac{1}{1+3(1/s)}$$