Solución del Problema de Evaluación 2

Parte a

Para $t \to 0$ el capacitor se comporta como un conductor, por lo que el circuito equivalente en esta parte será el ilustrado en la Figura 1-a.

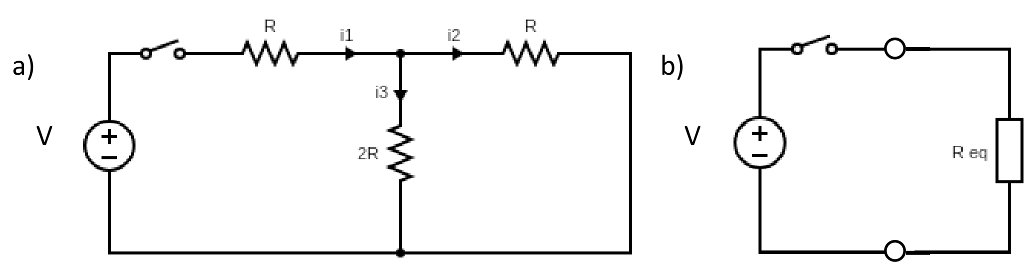

Figura 1.

Planteando las ecuaciones de Kirchhoff se obtiene el siguiente sistema de ecuaciones:

Ley de Corrientes:

$$i_1 = i_2 + i_3 \qquad \textit{Ec. 1}$$

Ley de Voltajes:

$$V - Ri_1 - 2Ri_3 = 0 \qquad \textit{Ec. 2}$$

$$-Ri_2 + 2Ri_3 = 0 \qquad \textit{Ec. 3}$$

De esta última expresión podemos deducir que $i_2 = 2i_3$ y, por lo tanto, utilizando el resultado de la ley de corrientes, Ec. 1, tenemos que $i_1 = 3i_3$. Sustituyendo este resultado en la Ec. 2 obtenemos una expresión para la corriente i_1:

$$V = Ri_1 + \frac{2}{3}Ri_1 = \frac{5}{3}i_1 \rightarrow i_1 = \frac{3}{5}\frac{V}{R}$$

A partir de este valor es fácil ver que $i_3 = \frac{1}{5}\frac{V}{R}$, y nuevamente utilizando la ley de corrientes tenemos que $i_2 = \frac{2}{5}\frac{V}{R}$.

Podemos corroborar el resultado obtenido para la corriente i_1 calculando la resistencia equivalente del sistema vista por la fuente. Este puede interpretarse como calcular qué resistencia de valor R_{eq} debe colocarse a la salida de la fuente, Figura 1-b, para que esta entregue una corriente igual a la que entregaría con la configuración de la Figura 1-a. De esta última figura vemos que esta resistencia está conformada por una resistencia de valor R en serie con dos resistencias de valor R y $2R$ conectadas en paralelo. Por lo tanto, podemos calcular su valor como:

$$R_{eq} = R + \frac{1}{\frac{1}{R} + \frac{1}{2R}} = \frac{5R}{3}$$

Y por lo tanto la corriente que entregará la fuente será:

$$i_1 = \frac{3}{5}\frac{V}{R}$$

Valor que coincide con el calculado anteriormente para esta cantidad.

Parte b

En esta parte sí tendremos una caída de potencial en el capacitor por lo que el circuito que tenemos que considerar es el de la Figura 2.

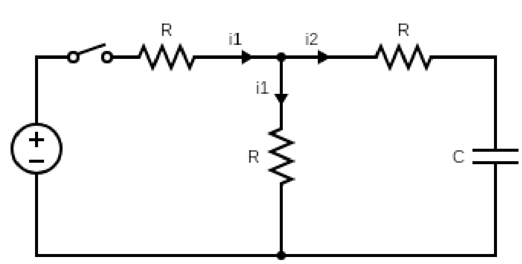

Figura 2

Daniel Gau de León – dgau@fing.edu.uy

En esta nueva situación la ley de Kirchhoff de corriente se sigue cumpliendo como en la parte anterior, por lo que también tenemos que:

$$i_1 = i_2 + i_3$$

Las leyes de Kirchhoff de voltaje si se modificarán, ya que el capacitor ahora no se comportará como un conductor, sino que la caída de potencial en este elemento viene determinada por la relación $V_c = \frac{Q}{C}$. También podemos ver que ahora $i_2 = \frac{dQ}{dt} = \dot{Q}$.

Considerando esto tenemos que las nuevas leyes de Kirchhoff de voltaje adquieren la forma:

$$V - Ri_1 - 2Ri_3 = 0 \qquad \text{Ec. 4}$$

$$-Ri_2 - \frac{1}{C}Q + 2Ri_3 = -R\dot{Q} - \frac{1}{C}Q + 2Ri_3 = 0 \qquad \textit{Ec. 5}$$

De la primera de estas expresiones podemos derivar una expresión para la corriente i_3 en función de $\dot{Q}$ usando la ley de Kirchhoff de corriente, con lo que se obtiene:

$$V = R[i_2 + i_3] + 2Ri_3 = R\dot{Q} + 3Ri_3 \rightarrow i_3 = \frac{V}{3R} - \frac{\dot{Q}}{3}$$

Sustituyendo ahora este valor en la Ec. 5 obtenemos la ecuación diferencial que determina el valor de la carga Q acumulada en las placas del capacitor para todo tiempo.

$$-R\dot{Q} - \frac{1}{C}Q + 2R\left[\frac{V}{3R} - \frac{\dot{Q}}{3}\right] = 0$$

$$\dot{Q} + \frac{3}{5RC}Q = \frac{2}{5}\frac{V}{R}$$

Sabemos además que la forma general de la solución de dicha ecuación es la suma de la solución general de la homogénea, más una solución particular de la no homogénea, es decir que $Q(t) = Q_H + Q_E$.

En primer lugar la solución general de la Homogénea la obtenemos resolviendo:

$$\dot{Q} + \frac{3}{5RC}Q = 0$$

Daniel Gau de León – dgau@fing.edu.uy

Sabemos que la solución de dicha ecuación viene dada por una expresión de la forma:

$$Q_H = A\, e^{-\frac{3}{5RC}t}$$

Siendo A una constante que se deberá determinar a partir de las condiciones iniciales del problema.

Luego, es fácil ver que para obtener una solución particular de la no homogénea basta considerar una función constante K (por lo que se cumple que $\dot{K} = 0$) y entonces tenemos que:

$$\frac{3}{5RC}K = \frac{2}{5}\frac{V}{R} \rightarrow K = \frac{2C}{3}\,V$$

Tenemos entonces que la función carga del capacitor en función del tiempo viene dada por la expresión:

$$Q(t) = A\, e^{-\frac{3}{5RC}t} + \frac{2C}{3}\,V$$

Solo resta ahora obtener el valor de la constante A que, como ya se dijo anteriormente, viene determinado por las condiciones iniciales del problema. Sabiendo entonces que la carga inicial del capacitor es cero tenemos que:

$$Q(0) = 0 = A + \frac{2C}{3}\,V \rightarrow A = -\frac{2C}{3}\,V$$

Sustituyendo este valor en la expresión obtenemos que la carga del capacitor varía con el tiempo como:

$$Q(t) = \frac{2C}{3}\,V\,\left[1 - e^{-\frac{3}{5RC}t}\right]$$

Para calcular ahora la diferencia de potencial entre las placas del capacitor simplemente dividimos la expresión anterior entre C, con lo que obtenemos:

$$V_c(t) = \frac{Q(t)}{C} = \frac{2}{3}\,V\,\left[1 - e^{-\frac{3}{5RC}t}\right] \qquad \textit{Ec. 6}$$

Vemos entonces que inicialmente la diferencia entre las placas del capacitor es cero (lo que corresponde con una carga acumulada también cero) y esta aumenta monótonamente hasta un valor máximo de $\frac{2V}{3}$ que se alcanzaría para un tiempo infinito. En la práctica se puede considerar que dicho valor es alcanzado para tiempos muchos mayores que la constante de tiempo del problema es decir cuando $t \gg \tau = \frac{5RC}{3}$.

Daniel Gau de León – dgau@fing.edu.uy

Parte c:

Sabemos que la diferencia de potencial entre las placas del capacitor debe ser de $V/2$ un segundo después de haber cerrado el interruptor. Por lo tanto, utilizando la Ec. 6 tenemos que

$$V_c(t = 1) = \frac{V}{2} = \frac{2}{3} V \left[1 - e^{-\frac{3}{5RC}}\right]$$

Despejando de esta expresión obtenemos que el valor de la contante buscado debe ser:

$$RC = -\frac{3}{5 \ln\left(\frac{1}{4}\right)} = 0.43 \; s$$

Daniel Gau de León – dgau@fing.edu.uy