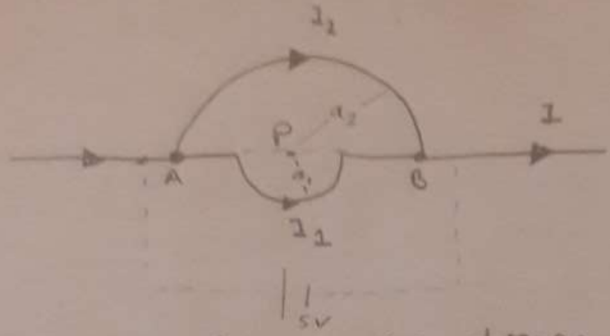
7.9)



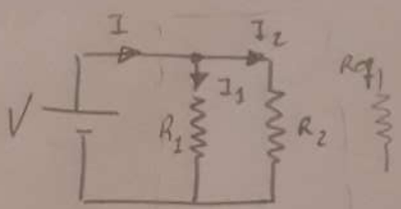
$a_1 = 0{,}5\,m = \frac{a_2}{2}$

$a_2 = 1\,m$

S = sección de los conductores.

Lo primero que tenemos que observar es que el sistema se comporta como un circuito equivalente dado por 2 resistencias R_1 y R_2 en paralelo.

Circuito equivalente:



$V = 5V$

$I = I_1 + I_2$

Sabemos además que la resistencia de un elemento de resistividad ρ y longitud l viene dada por la expresión: $R = \rho\, l / S$

Haciendo un análisis geométrico de la longitud de cada rama vemos

$\Rightarrow$ $R_1 = 2\left[a_2 - \underset{a_2/2}{a_1}\right]\frac{\rho}{S} + \frac{2\pi a_1 \rho / S}{2} = \frac{\rho}{S} a_2 + \frac{\rho}{S}\pi\frac{a_2}{2} = \frac{\rho}{S} a_2\left[1 + \frac{\pi}{2}\right]$

$R_2 = \frac{2\pi a_2 \rho/S}{2} = \frac{\rho}{S}\pi a_2$

Sabemos además que la resistencia equivalente del circuito es igual a $10\,\Omega$, por lo que:

$$R_{eq} = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} = \frac{\frac{\rho}{S}\pi a_2 \cdot \left[1 + \pi/2\right]\frac{\rho}{S} a_2}{\frac{\rho}{S} a_2\left[1 + \frac{\pi}{2}\right] + \frac{\rho}{S}\pi a_2} = \frac{\frac{\rho}{S}\pi a_2\left[2 + \pi\right]}{2 + 3\pi} = 10\,\Omega$$

Despejando de esta expresión obtenemos que: $\frac{\rho}{S} = 7{,}07\,\frac{\Omega}{m}$

Además tenemos:

$$I_1 = \frac{V}{R_1} = \frac{5\,V}{7{,}07\,\frac{\Omega}{m} \cdot 1\,m\left[1 + \frac{\pi}{2}\right]} = 0{,}275\ \text{Amp.}$$

$$I_2 = \frac{5V}{7{,}07\,\Omega/m \cdot 1m \cdot \pi} = 0{,}225 \text{ Amp}$$

Ley de Kirchhoff aplicada al circuito equivalente:

$I = I_1 + I_2$ y además $I = \frac{V}{R_{eq}} = \frac{5V}{10\,\Omega} = 0{,}5$ Amp

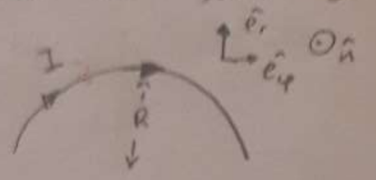
Y por otro lado $I_1 + I_2 = 0{,}275 + 0{,}225 = 0{,}5$ Amp ✓

Lo que corrobora el resultado.

Ahora sabemos que el campo magnético generado por una espira por la circula una corriente I viene dado por la ley de Biot-Savart:

$$d\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} I \frac{d\vec{s} \times \hat{r}}{r^2}$$

Esta expresión debe ser integrada sobre toda la espira para obtener el campo total. En este caso, debemos integrar en una semicircunferencia, con lo que obtenemos:

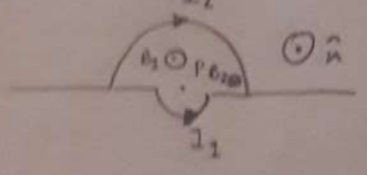


$d\vec{s} = R\,d\theta\,\hat{e}_\varphi$

$\hat{r} = \hat{e}_r$ $\Rightarrow$ $\hat{e}_\varphi \times \hat{e}_r = \hat{n}$

$$\Rightarrow \vec{B} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int_0^{\pi} \frac{R\,d\theta\;\hat{e}_\varphi \times \hat{e}_r}{R^2} = \frac{\mu_0 I R}{4\pi R^2} \cdot \pi = \frac{\mu_0 I}{4R}$$

En el caso particular del problema tenemos 2 corrientes, y el campo que genera la corriente I_2 será entrante al plano y el campo que genera la corriente I_1 saliente



$\Rightarrow$ Aplicando la ec calculada anteriormente:

$$\vec{B} = \left[\frac{\mu_0 I_1}{4 a_1} - \frac{\mu_0 I_2}{4 a_2}\right]\hat{n} = \frac{\mu_0}{4}\left[\frac{0{,}275 \text{ Amp}}{0{,}5\,m} - \frac{0{,}225}{1\,m}\right]\hat{n} = 0{,}102 \times 10^{-6}\,T =$$

saliente al plano → $\boxed{\vec{B} = 102\,nT\,\hat{n}}$