Señales y Sistemas

Práctico 6
Análisis de señales y sistemas en tiempo y frecuencia

2019

Cada ejercicio comienza con un símbolo indicando su dificultad de acuerdo a la siguiente escala: ✦ básico, ★ medio, ✷ avanzado, y ✹ desafiante. Además puede tener un número, como (1.21) que indica el número de ejercicio del libro del curso, *Señales y Sistemas*, Oppenheim/Willsky, 2nd.edition.

★ Ejercicio 1

Se desea implementar un filtro pasabajos mediante el siguiente sistema:

$$y[n] = x[n] + \alpha x[n-1] + \beta y[n-1]$$

donde todos los coeficientes son reales, y el sistema es causal.

(a) Dar un diagrama de bloques que implemente este sistema con la mínima cantidad de elementos de retardo posible.

(b) Expresar la respuesta frecuencial $H(e^{j\theta})$ del sistema, y la respuesta en módulo cuadrática $|H(e^{j\theta})|^2$.

(c) Calcular la respuesta al impulso del filtro.

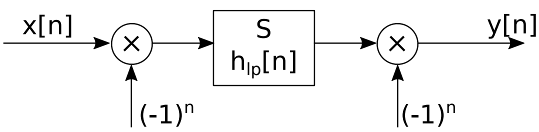
(d) Estudiar estabilidad del sistema en función de α y β.

El sistema deberá tener respuesta frecuencial 0 a frecuencia π, y además debe tener su caida -3dB en frecuencia $\pi/3$ (es decir, $\frac{|H(e^{j\pi/3})|^2}{|H(e^{j0})|^2} = 1/2$).

(e) Calcular α y β. Verificar que el sistema sea estable.

★ Ejercicio 2 (6.44)

En la figura se muestra un sistema implementado en tiempo discreto. El sistema S es lineal e invariante en el tiempo con respuesta al impulso $h_{lp}[n]$

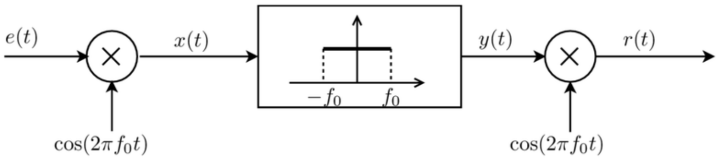


(a) Mostrar que el sistema completo es invariante en el tiempo

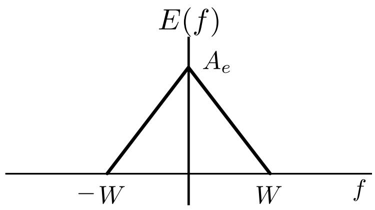
(b) Si $h_{lp}[n]$ es un filtro pasabajos, ¿qué tipo de filtro se implementa con el sistema completo?

✦ Ejercicio 3

Se considera una señal $e(t)$ de energía finita de banda acotada W, con $2W \ll f_0$. La señal $e(t)$ se inyecta al sistema de la figura, que consiste en un multiplicador en cascada con un filtro pasabajos ideal de frecuencia de corte f_0 y un multiplicador.



(a) Bosquejar los espectros de todas las señales de interés. Para esto asumir que el espectro de $e(t)$ viene dado por la siguiente figura.



(b) Hallar la relación exacta entre las energías de la señales $e(t)$ y $r(t)$.

✦ Ejercicio 4 (6.9)

Considerar un SLIT causal, estable y de tiempo continuo cuya entrada $x(t)$ y salida $y(t)$ están relacionadas mediante la ecuación diferencial

$$\frac{dy(t)}{dt} + 5y(t) = 2x(t).$$

Sea $s(t)$ la respuesta al escalón de este filtro.

(a) Hallar es el valor final s_∞.

(b) Determinar el valor de t_0 para el cual

$$s(t_0) = s_\infty \left(1 - \frac{1}{e^2}\right).$$

✦ Ejercicio 5 (6.6)

Considerar un filtro pasaaltos ideal en tiempo discreto cuya respuesta en frecuencia es

$$H(e^{j\theta}) = \begin{cases} 1, & \pi - \theta_c \leq |\theta| \leq \pi \\ 0, & |\theta| < \pi - \theta_c \end{cases}$$

(a) Bosquejar $H(e^{j\theta})$.

(b) Hallar y bosquejar respuesta al impulso del filtro pasabajos ideal de frecuencia de corte θ_c, $H_{\text{LPF}}(e^{j\theta})$.

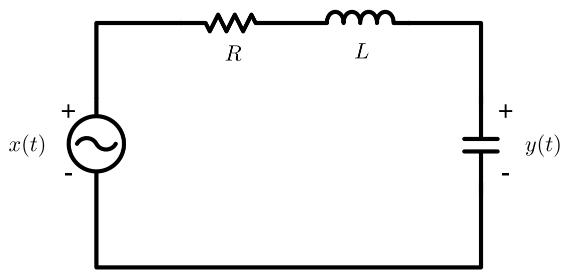
(c) Si $h[n]$ es la respuesta al impulso de este filtro determinar la función $g[n]$ tal que

$$h[n] = \left(\frac{\sin \theta_c n}{\pi n}\right) g[n].$$

(d) A medida que θ_c aumenta, determinar si la respuesta al impulso se concentra más o menos alrededor del origen.

★ Ejercicio 6 (6.19)

Considerar el SLIT construido como el circuito RLC mostrado en la figura. La fuente de voltaje $x(t)$ se considera la entrada a este sistema. El voltaje $y(t)$ a través del capacitor se considera la salida del sistema. Hallar la relación entre R, L y C para que no exista oscilación en la respuesta al escalón.



Soluciones

Las soluciones que se muestran deben ser consideradas como los resultados o respuestas de los ejercicios, no son ni deben considerarse como el desarrollo o procedimiento para llegar a estos.

Ejercicio 1

(a) Se pide la forma canónica, con 1 elemento de retardo. Los coeficientes no recursivos son 1 y α; el coeficiente recursivo es β.

(b)

$$H(e^{j\theta}) = \frac{1+\alpha e^{-j\theta}}{1-\beta e^{-j\theta}}$$

$$|H(e^{j\theta})|^2 = \frac{1+2\alpha\cos\theta+\alpha^2}{1-2\beta\cos\theta+\beta^2}$$

(c)

$$H = \frac{1}{1-\beta e^{-j\theta}} + \frac{\alpha e^{-j\theta}}{1-\beta e^{-j\theta}}$$

El primer término tiene respuesta al impulso $u[n]\beta^n$, y el segundo término $\alpha u[n-1]\beta^{n-1}$. Entonces:

$$h[n] = u[n]\beta^n + \alpha u[n-1]\beta^{n-1}$$

(d) $h[n]$ es sumable en módulo sólo si $|\beta| < 1$.
Como los coeficientes no recursivos no afectan a la estabilidad (salvo casos de cancelación cero-polo), la condición de estabilidad será la misma que para el sistema $y[n] = x[n] + \beta y[n-1]$, cuya respuesta al impulso es más fácil de sumar.
Otra forma de verlo es notar que salvo para algunos términos cerca de $n = 0$, $h[n]$ queda de la forma $(1+\alpha/\beta)\beta^n$.

(e) El numerador de H se debe anular en $\theta = \pi$, por lo tanto debe ser $\alpha = 1$.
Planteando $\frac{|H_{\pi/3}|^2}{|H_0|^2}$ queda:

$$\frac{3(\beta^2-2\beta+1)}{4(\beta^2-\beta+1)} = 1/2$$

Resolviendo la cuadrática resultante, queda $\beta = 2 \pm \sqrt{3}$. Se debe elegir la solución estable, es decir: $\beta = 2-\sqrt{3}$.

Ejercicio 2

(b)

Ejercicio 4

(a) Dada la ecuación diferencial podemos escribir la respuesta al impulso en frecuencia tomando la TF y usando sus propiedad

$$j\omega Y(j\omega) + 5Y(j\omega) = 2X(j\omega) \Rightarrow H(j\omega) = \frac{2}{5 + j\omega}$$

De donde obtenemos

$$h(t) = 2e^{-5t}u(t).$$

y la respuesta al escalón podemos calcularla como la integral de $h(t)$, esto es

$$s(t) = \int_{-\infty}^{t} h(v)dv = \frac{2}{5}\left(1 - e^{-5t}\right)u(t).$$

Por lo tanto

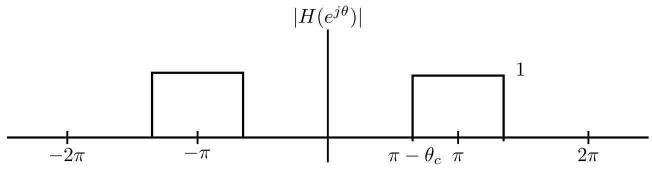
$$s_\infty = \frac{2}{5}$$

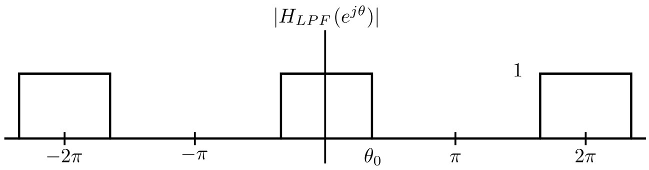
(b)

$$s(t_0) = \frac{2}{5}\left(1 - e^{-5t_0}\right) = \frac{2}{5}\left(1 - \frac{1}{e^2}\right) \Rightarrow t_0 = \frac{2}{5}$$

Ejercicio 5

(a)





(b) Su respuesta al impulso temporal queda

$$\mathcal{F}\left\{\Pi\left(\frac{\theta}{2\theta_0}\right)\right\} = \frac{\theta_0}{\pi}\text{sinc}\left[\frac{\theta_0 n}{\pi}\right]$$

(c) De las partes anteriores vemos que el filtro pasaalto puede interpretarse como la respuesta de un filtro pasabajo, centrados en π, y la periodización hace que también quede centrado en $-\pi$. Esto puede escribirse como

$$\begin{aligned} H(e^{j\theta}) &= H_{\text{LPF}}(e^{j(\theta-\pi)}) \\ &= H_{\text{LPF}}(e^{j\theta}) * \delta(\theta - \pi) \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
h[n] &= h_{\mathrm{LPF}}[n]e^{-j\pi n} \\
&= h_{\mathrm{LPF}}[n](-1)^n
\end{aligned}
$$

Por lo tanto

$$g[n] = (-1)^n.$$

(d) La respuesta al impulso en el tiempo es un seno cardinal que tiene ceros en múltiplos de $\frac{\pi}{\theta_c}$. Por lo tanto si θ_c aumenta el seno cardinal se concentra alrededor del origen.