Señales y Sistemas

Práctico

Hoja de ejercicios adicionales de práctica para el primer parcial

2020

Cada ejercicio comienza con un símbolo indicando su dificultad de acuerdo a la siguiente escala: ✦ básico, ★ medio, ✷ avanzado, y ✹ desafiante. Además puede tener un número, como (1.21) que indica el número de ejercicio del libro del curso, *Señales y Sistemas*, Oppenheim/Willsky, 2nd.edition.

✦ Ejercicio 1 (6.47)

Considerar el filtro de media móvil definido por la siguiente ecuación en diferencias

$$y[n] = b\left(ax[n-1] + x[n] + ax[n+1]\right).$$

(a) Determinar la respuesta en frecuencia $H(e^{j\theta})$ en función de a y b.

(b) Determinar la relación entre a y b para que el sistema tenga ganancia unitaria *en continua* ($\theta = 0$).

(c) En las condiciones de la parte anterior, bosquejar la respuesta en frecuencia del filtro cuando $a = 1/2$.

(d) Explicar cómo cambia el módulo y la fase de $H(e^{j\theta})$ si se substituye este filtro por una versión causal de la forma

$$y[n] = b\left(ax[n-2] + x[n-1] + ax[n]\right).$$

✦ Ejercicio 2 (6.1)

Sea un SLIT en tiempo continuo con respuesta en frecuencia $H(j\omega) = |H(j\omega)|e^{\sphericalangle H(j\omega)}$ y respuesta al impulso real $h(t)$. Suponer que la entrada a este sistema es $x(t) = cos(\omega_0 t + \phi_0)$. Se puede demostrar que la salida resultante tiene la forma

$$y(t) = Ax(t - t_0),$$

donde A es un número real no negativo que representa un factor de escala en amplitud y t_0 es un retardo en tiempo.

(a) Expresar A en términos del módulo de $H(j\omega)$ ($|H(j\omega_0)|$).

(b) Expresar t_0 en términos de la fase de $H(j\omega)$ ($\sphericalangle H(j\omega_0)$).

✦ Ejercicio 3

(a) Definir la transformada de Fourier de tiempo contínuo para una señal de energía finita.

(b) Enunciar la identidad de Parseval para este tipo de señales.

(c) Hallar la relación exacta entre la energía de una señal $x(t)$ de energía finita y ancho de banda W y la señal $m(t) = x(t)\cos(\omega_c t)$, $\omega_c \gg 2W$.

✦ Ejercicio 4 (5.12)

Sea $h[n]$ la respuesta al impulso de un sistema S y $x[n]$ una señal de entrada, con

$$x[n] = \left(\frac{\sin\left(\frac{\pi}{4}n\right)}{\pi n}\right)^2 \text{ y } h[n] = \left(\frac{\sin\left((\theta_c n\right)}{\pi n}\right),$$

donde $|\theta_c| \leq \pi$. Determinar una restricción rigurosa en θ_c la cual asegure que la salida sea

$$y[n] = \left(\frac{\sin\left(\frac{\pi}{4}n\right)}{\pi n}\right)^2.$$

★ Ejercicio 5

Se consideran los filtros $A(e^{j\theta})$ y $B(e^{j\theta})$ causales, dados por sus ecuaciones en diferencias:

- $A(e^{j\theta})$: $y[n] = \alpha x[n] + \beta x[n-1] + \alpha x[n-2]$
- $B(e^{j\theta})$: $y[n] = \mu y[n-1] + \lambda x[n]$.

Para cada uno de los filtros:

(a) Calcular la respuesta al impulso.

(b) Estudiar estabilidad en función de los parámetros (α, β, μ y λ).

(c) Calcular la respuesta en frecuencia.

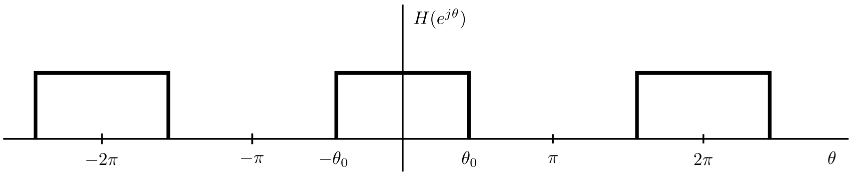
(d) Determinar los parámetros de los filtros (α, β, μ y λ) para que la ganancia sea unitaria a frecuencia $\theta = 0$ ($H(e^{j0}) = 1$) y el módulo cuadrado de la respuesta en frecuencia sea $1/2$ a frecuencia $\theta = \pi/2$. El filtro deberá tener una respuesta en frecuencia que no debe anularse nunca.

(e) En estas condiciones, graficar módulo y fase de los filtros determinados.

(f) Calcular la potencia a la salida de los filtros A y B cuando la entrada, en cada caso, es $x[n] = \delta[n]$.

⋆ Ejercicio 6 (6.40)

Considerar un filtro pasabajos ideal en tiempo discreto de frecuencia de corte θ_0 con respuesta al impulso $h[n]$ y para el que la respuesta en frecuencia $H(e^{j\theta})$ se muestra en la figura.



Se define un nuevo filtro con respuesta al impulso $h_1[n]$ y respuesta en frecuencia $H_1(e^{j\theta})$, de la siguiente forma

$$h_1[n] = \begin{cases} h[n/2] & \text{si } n \text{ es par,} \\ 0 & \text{si } n \text{ es impar.} \end{cases}$$

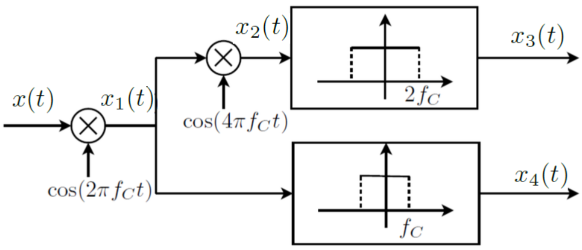
Esto equivale a insertar ceros entre los valores de $h[n]$.

(a) Bosquejar $h_1[n]$.

(b) Hallar y bosquejar $H_1(e^{j\theta})$ e indicar qué tipo de filtro es (pasabajos, pasabandas, pasaaltos).

⋆ Ejercicio 7

Considere el sistema de la figura, cuya entrada es la señal $x(t)$ de banda acotada W. Los filtros pasabajos son ideales, siendo $f_c \geq 2W$.



(a) Bosquejar los espectros de las señales $x(t)$, $x_1(t)$, $x_2(t)$, $x_3(t)$, y $x_4(t)$.

(b) Si E es la energía de la señal $x(t)$, hallar las energías de las señales $x_3(t)$ y $x_4(t)$.

⋆ Ejercicio 8 (6.5)

Sea un filtro pasabanda ideal en tiempo continuo cuya respuesta en frecuencia es

$$H(j\omega) = \begin{cases} 1, & \omega_c \leq |\omega| \leq 3\omega_c, \\ 0, & \text{con otro valor.} \end{cases}$$

y sea $h(t)$ su respuesta al impulso.

(a) Bosquejar $H(j\omega)$.

(b) Hallar y bosquejar respuesta al impulso del filtro pasabajos ideal de frecuencia de corte ω_c, $H_{\mathrm{LPF}}(j\omega)$.

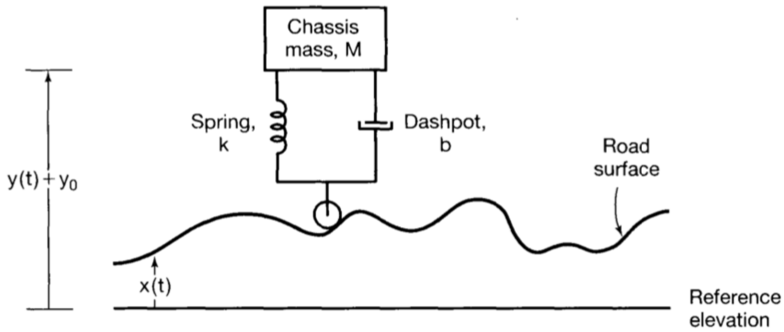
(c) Determinar la función $g(t)$ tal que

$$h(t) = \left(\frac{\sin \omega_c t}{\pi t}\right) g(t).$$

(d) A medida que ω_c aumenta, determinar si la respuesta al impulso se concentra más o menos alrededor del origen.

⋆ Ejercicio 9

Se desea estudiar la respuesta del sistema de suspensión de un automóvil, representado en la siguiente figura.



Se asume que el sistema es causal y se modela con la ecuación diferencial

$$m\frac{d^2y}{dt^2} = k\left(x(t) - y(t)\right) - b\left(\frac{dy}{dt} - \frac{dx}{dt}\right)$$

donde m representa la masa, k la constante del resorte y b la del amortiguador.

(a) Hallar la repuesta en frecuencia $H(j\omega)$ para este sistema en función de m, k, y b.

(b) Hallar la respuesta al impulso $h(t)$.

(c) Hallar la respuesta al escalón $s(t)$.

(d) Si $m = 200$ kg, hallar la constante k para que a una velocidad de 40 km/h el sistema filtre irregularidades en el terreno de longitudes menores a 10 cm.

(e) Con las constantes k y m en la parte anterior, calcular el rango de valores para la constante b en los que la respuesta al escalón no presenta oscilaciones.

∗ Ejercicio 10

Sean $x[n]$ e $y[n]$ dos secuencias complejas y $X(e^{j\theta})$ e $Y(e^{j\theta})$ sus transformadas de Fourier, respectivamente.

(a) Determinar, en función de $x[n]$ e $y[n]$, la secuencia cuya transformada de Fourier es $X(e^{j\theta})Y^*(e^{j\theta})$.

(b) Usando el resultado de la parte (a), mostrar que

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} x[n]y^*[n] = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} X(e^{j\theta})Y^*(e^{j\theta})d\theta.$$

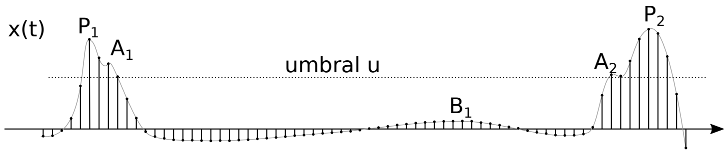
Esta ecuación es una forma más general del teorema de Parseval.

(c) Usar la expresión anterior para encontrar el valor numérico de la siguiente suma

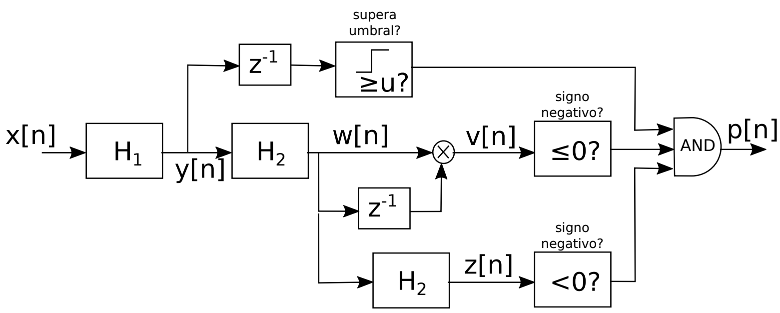
$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{\sin(\pi n/4)}{2\pi n}\frac{\sin(\pi n/6)}{5\pi n}.$$

✷ Ejercicio 11

En este problema se estudiará un sistema para detectar picos de una señal que superan un cierto valor umbral u. Como ejemplo se muestra la forma de onda de una señal $x[n]$ donde los puntos que deben ser detectados como picos son P_1 y P_2. Los puntos A_1 y A_2 deben ser descartados por ser picos espurios. Asimismo, el máximo B_1 debe ser descartado ya que no supera el valor de umbral u.



El diagrama de bloques del sistema que será estudiado es el siguiente, donde el bloque z^{-1} representa el retardo $y[n] \to y[n-1]$.



Se busca el cumplimiento de tres condiciones simultáneas:

1. que el valor de la señal sea mayor que el umbral u,
2. que la derivada se haya anulado,
3. que la derivada segunda sea negativa.

En particular la segunda condición se realizará detectando si el producto de dos muestras consecutivas es negativo o nulo.
El filtro $H_1(e^{j\theta})$ es un pasabajos cuyo objetivo es suavizar las pequeñas oscilaciones de $x[n]$ y así evitar la detección de picos en puntos como A_1 y A_2. La respuesta al impulso de $H_1(e^{j\theta})$ es $h_1[n] = 0.25\delta[n] + 0.5\delta[n-1] + 0.25\delta[n-2]$.

(a) Dar un diagrama de bloques del filtro $H_1(e^{j\theta})$.

(b) Hallar y bosquejar el módulo de la respuesta en frecuencia del filtro $H_1(e^{j\theta})$.

(c) Bosquejar la respuesta la salida del sistema $H_1(e^{j\theta})$ cuando la entrada es la señal $x[n]$ indicada en la Figura.

El filtro $H_2(e^{j\theta})$ es una aproximación de primer orden de un derivador; tiene respuesta al impulso $h_2[n] = \delta[n] - \delta[n-1]$.

(d) Dar un diagrama de bloques del filtro $H_2(e^{j\theta})$.

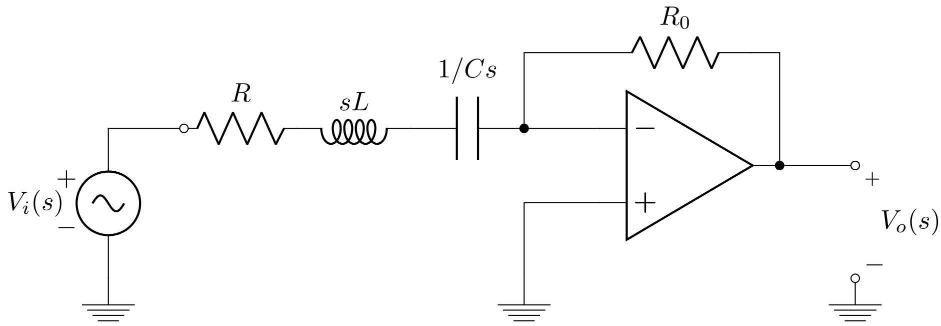
(e) Hallar y bosquejar el módulo de la respuesta en frecuencia del filtro $H_1(e^{j\theta})$.

(f) Explicar el funcionamiento de cada uno de los tres caminos que son evaluados mediante el operador lógico AND para la correcta detección de un pico.

Nota: el retardo en la primera rama es agregado para que las tres condiciones se cumplan simultáneamente en el instante de la comparación en el AND.

(g) Indicar en la gráfica los instantes en los que se cumplen cada una de las tres condiciones para la señal $x[n]$ dada.

✶Ejercicio 12



El amplificador de la figura es ideal y trabaja en zona lineal. Los componentes se relacionan según $R = \sqrt{\frac{L}{C}}$.

(a) Calcular la transferencia del sistema $H(s) = \frac{V_o(s)}{V_i(s)}$. Verificar que puede escribirse de la forma $K\frac{\omega_n^2 s}{s^2+2\zeta\omega_n s+\omega_n^2}$

(b) Calcular la respuesta al impulso $h(t)$

(c) Mostrar que el sistema es BIBO estable

(d) Obtener y bosquejar la respuesta en frecuencia $H(j\omega)$

(e) Calcular la respuesta $y(t)$ a la entrada $x(t) = \cos(\omega_n t)$

(f) Determinar si la respuesta al escalón $s(t)$ presenta oscilaciones

(g) Calcular $s_\infty = \lim_{t\to\infty} s(t)$