Práctico 5

Conjuntos Consistentes y Completitud del Cálculo Proposicional

Ejercicio 4 (Teorema de compacidad)

Bosquejo de solución

Siguiendo la sugerencia planteada, intentaremos probar el contrarrecíproco del Teorema.

Γ es inconsistente **si y solo si** existe un subconjunto finito $\Delta \subseteq \Gamma$ inconsistente.

Demostración del directo.

$\Rightarrow$) Γ es inconsistente entonces existe un subconjunto finito $\Delta \subseteq \Gamma$ inconsistente.

H) Γ es inconsistente.

T) Existe un subconjunto finito $\Delta \subseteq \Gamma$ inconsistente.

Demo)

(Hipótesis)
Γ inconsistente
$\Leftrightarrow$ (Def. consistencia)
$\Gamma \vdash \bot$
$\Leftrightarrow$ (Def. $\vdash$)
$(\bar{\exists} D \in \texttt{DER})(H(D) \subseteq \Gamma \ y \ C(D) = \bot)$

Entonces, como en toda derivación interviene un conjunto finito de fórmulas, $H(D)$ es finito y $H(D) \vdash \bot = C(D)$.
Tomando $\Delta = H(D)$, entonces $\Delta \vdash \bot$, podemos afirmar que existe un subconjunto finito $\Delta \subseteq \Gamma$ que es inconsistente.

Demostración del recíproco.

$\Leftarrow$) Existe un subconjunto finito $\Delta \subseteq \Gamma$ inconsistente entonces Γ es inconsistente.

H) Existe un subconjunto finito $\Delta \subseteq \Gamma$ inconsistente.

T) Γ es inconsistente.

Demo)

Sea $\Delta \subseteq \Gamma$ inconsistente.

(Hipótesis)
Δ inconsistente
$\Leftrightarrow$ (Def. consistencia)
$\Delta \vdash \bot$
$\Leftrightarrow$ (Def. $\vdash$)
$(\bar{\exists} D \in \texttt{DER})(H(D) \subseteq \Delta)(C(D) = \bot)$

Entonces, como $H(D) \subseteq \Delta$ y por Hipotesis $\Delta \subseteq \Gamma$, en particular, $H(D) \subseteq \Gamma$. Tomando D como testigo, podemos afirmar que $\Gamma \vdash \bot$ porque $(\bar{\exists} D \in \texttt{DER})(H(D) \subseteq \Gamma)(C(D) = \bot)$, entonces es inconsistente.

Ejercicio 9

Bosquejo de solución

Se quiere probar Γ es consistente maximal si y sólo si Γ es una teoría y además existe una única valuación v tal que $v(\Gamma) = 1$.

Demostración del directo.

$\Rightarrow$) Γ es consistente maximal $\Rightarrow$ Γ es una teoría y además existe una única valuación v tal que $v(\Gamma) = 1$.

H) Γ es consistente maximal.

T) Γ es una teoría y además existe una única valuación v tal que $v(\Gamma) = 1$.

Demo)

- Γ es una teoría.

  (Por hipótesis)
  Γ es consistente maximal
  $\Rightarrow$ (Por lema 1.6.8 del teórico)
  Γ es una teoría

- Existe una única valuación v tal que $v(\Gamma) = 1$.

  (Por hipótesis)
  Γ es consistente maximal
  $\Rightarrow$ (Por def de consistente maximal)
  Γ es consistente
  $\Leftrightarrow$ (Condición suficiente y necesaria de consistencia)
  $(\bar{\exists} v : Val) v(\Gamma) = 1$

  Resta probar que dicha valuación es única.
  Por absurdo supongo que hay dos valuaciones $v_1,\ v_2$ tales que $v_1(\Gamma) = v_2(\Gamma) = 1$ y $v_1 \neq v_2$. Observar que para que dos valuaciones sean distintas tienen que diferir en el valor de al menos una letra proposicional. Supongamos, p_k es una letra proposicional tal que $v_1(p_k) = 1$ y $v_2(p_k) = 0$, por lo tanto $p_k \notin \Gamma$ **(A)**

  (por **(A)**)
  $p_k \notin \Gamma$
  $\Rightarrow$ (Γ es consistente maximal por hip y ejercicio 5)$\neg p_k \in \Gamma$
  $\Rightarrow$ (Def. de v_1 y v_2 y definición de valuación)
  $v_1(\neg p_k) = 0$ y $v_2(\neg p_k) = 1$ (Y esto es absurdo porque ambos pertenecen a Γ.)

Demostración del recíproco.

$\Leftarrow$) Γ es una teoría y además existe una única valuación v tal que $v(\Gamma) = 1 \Rightarrow \Gamma$ es consistente maximal.

H) Γ es una teoría y además existe una única valuación v tal que $v(\Gamma) = 1$.

T) Γ es consistente maximal.

Demo)

Como por hipótesis existe una valuación v_1 (que además es única) tal que $v_1(\Gamma) = 1$, por condición suficiente y necesaria de consistencia, se puede afirmar que Γ es consistente.

Por absurdo suponemos Γ consistente no maximal.

Γ consistente no maximal
$\Leftrightarrow$ (por definición de consistente maximal)
$(\bar{\exists}\varphi \in \texttt{PROP})(\varphi \notin \Gamma \text{ y } \Gamma \cup \{\varphi\} \text{ es consistente})(*1)$
$\Leftrightarrow$ (condición necesaria y sunficiente de consistencia)
$(\bar{\exists}v : Val)(\bar{\exists}\varphi \in \texttt{PROP})(\varphi \notin \Gamma \text{ y } v(\Gamma \cup \{\varphi\}) = 1)$
Sea v_1 la unica valuación que cumple $v_1(\Gamma) = 1$
$v_1(\Gamma \cup \{\varphi\}) = 1$
$\Rightarrow$
$v_1(\varphi) = 1$
$\Rightarrow$ (v_1 es la única valuación tal que $v_1(\Gamma) = 1$)
$\Gamma \models \varphi$
$\Leftrightarrow$ (corrección y completitud)
$\Gamma \vdash \varphi$
$\Rightarrow$ (Γ es teoría)
$\varphi \in \Gamma$
$\Rightarrow$ (absurdo en $(*1)$)
Γ es consistente maximal.

Ejercicio 12

Bosquejo de solución

a. I. **T)** $(\bar{\forall}k \in \mathbb{N})\Gamma_k \nvdash \perp$

Demo)

Consideremos un k arbitrario y una valuación v tal que $v\,(p_i) = 1$ con i múltiplo de k.
Sea φ arbitrario tal que $\varphi \in \Gamma_k$.

$\varphi \in \Gamma_k$
$\Rightarrow$ (Def. de Γ_k)
φ es de la forma $\varphi = p_i$ con i múltiplo de k
$\Rightarrow$ (Def. de v)
$v\,(\varphi) = v\,(p_i) = 1$
$\Rightarrow$ $(\varphi \in \Gamma_k arbitrario)$
$(\bar{\forall}\varphi \in \Gamma_k)v\,(\varphi) = 1$
$\Rightarrow$ (Por condición suficiente de consistencia)
Γ_k es consistente
$\Rightarrow$ (Def. de consistencia)
$\Gamma_k \nvdash \perp$
$\Rightarrow$ (k arbitrario)
$(\bar{\forall}k \in \mathbb{N})\Gamma_k \nvdash \perp$

II. **T)** $(\bar{\forall}k \in \mathbb{N})\Delta_k \nvdash \perp$

Demo)

Consideremos un k arbitrario y una valución v tal que $v(p_i) = 0$ para todo i que no es múltiplo de k.
Sea φ arbitrario, tal que $\varphi \in \Delta_k$.

$\varphi \in \Delta_k$
$\Rightarrow$ (Def. de Δ_k)
φ es de la forma $\varphi = \neg p_i$ con i no múltiplo de k
$\Rightarrow$ (Def. de v)
$v(\varphi) = v(\neg p_i) = 1 - v(p_i) = 1 - 0 = 1$
$\Rightarrow$ ($\varphi \in \Delta_k$ arbitrario)
$(\bar{\forall}\varphi \in \Delta_k) v(\varphi) = 1$
$\Rightarrow$ (Por condición suficiente de consistencia)
Δ_k es consistente
$\Rightarrow$ (Def. de consistencia)
$\Delta_k \nvdash \bot$
$\Rightarrow$ (k arbitrario)
$(\bar{\forall}k \in \mathbb{N}) \Delta_k \nvdash \bot$

III. **T)** $(\bar{\forall}n \in \mathbb{N}, m \in \mathbb{N})$si $n < m$ y $n > 0$ entonces $\Gamma_n \cup \Delta_m \vdash \bot$
Demo)

Sean n y m naturales tal que $n < m$ y $n > 0$.
Por un lado tenemos que:

n es múltiplo de n
$\Rightarrow$ (Def. de Γ_k)
$p_n \in \Gamma_n$
$\Rightarrow$ ($\Gamma_n \subseteq \Gamma_n \cup \Delta_m$)
$p_n \in \Gamma_n \cup \Delta_m$ **(A)**

Luego, tenemos que:

$\Rightarrow$ ($n < m$ y $n > 0$)
n no es múltiplo de m
$\Rightarrow$ (Def. de Δ_k)
$\neg p_n \in \Delta_m$
$\Rightarrow$ ($\Delta_m \subseteq \Gamma_n \cup \Delta_m$)
$\neg p_n \in \Gamma_n \cup \Delta_m$ **(B)**

Tomando ambas afirmaciones podemos concluir:

$\Rightarrow$ (**(A)** y **(B)**)
$p_n, \neg p_n \in \Gamma_n \cup \Delta_m$
$\Rightarrow$ (Por regla $E\neg$)
$\Gamma_n \cup \Delta_m \vdash \bot$

Por lo tanto podemos afirmar que

$$(\bar{\forall}n \in \mathbb{N}, m \in \mathbb{N})\text{si } n < m \text{ y } n > 0 \text{ entonces } \Gamma_n \cup \Delta_m \vdash \bot$$

b. La afirmación es verdadera y se debe demostrar.

T) $(\bar{\forall} k \in \mathbb{N})\textsc{Cons}(\Gamma_k \cup \Delta_k)$ es consistente maximal.

Demo)

Sea k un natural arbitrario, queremos probar que $\textsc{Cons}(\Gamma_k \cup \Delta_k)$ es consistente maximal.
Observemos que cualquier natural, o bien es múltiplo de k o bien no es múltiplo de k, por lo tanto:

$$(\bar{\forall} p_i \in P)(p_i \in (\Gamma_k \cup \Delta_k) \text{ o } \neg p_i \in (\Gamma_k \cup \Delta_k))$$

Como una valuación se determina por el valor de verdad de todas las letras proposicionales, la valuación v_1 definida como $v_1(p_i) = 1$ si y solo si i es múltiplo de k es la única que cumple que $v_1(\Gamma_k \cup \Delta_k) = 1$**(A)**.

Veamos que $\Gamma_k \cup \Delta_k$ es completo y por lo tanto $\textsc{Cons}(\Gamma_k \cup \Delta_k)$ es consistente maximal.

$\Gamma_k \cup \Delta_k$ es completo si y solo si es consistente y $(\bar{\forall} \varphi \in \texttt{PROP})(\Gamma_k \cup \Delta_k \vdash \varphi \text{ o } \Gamma_k \cup \Delta_k \vdash \neg\varphi)$.
Sabemos por **(A)** que v_1 cumple que $v_1(\Gamma_k \cup \Delta_k) = 1$.
Sea $\varphi \in \texttt{PROP}$ arbitrario, probemos que $(\Gamma_k \cup \Delta_k \vdash \varphi \text{ o } \Gamma_k \cup \Delta_k \vdash \neg\varphi)$

$\Gamma_k \cup \Delta_k \vdash \varphi$ o $\Gamma_k \cup \Delta_k \vdash \neg\varphi$
$\Leftrightarrow$ (corrección y completitud)
$\Gamma_k \cup \Delta_k \models \varphi$ o $\Gamma_k \cup \Delta_k \models \varphi$
$\Leftrightarrow$ (definición $\models$)
$(\bar{\forall} v : Val)(v(\Gamma_k \cup \Delta_k) = 1 \Rightarrow v(\varphi) = 1)$ o $(\bar{\forall} v : Val)(v(\Gamma_k \cup \Delta_k) = 1 \Rightarrow v(\neg\varphi) = 1)$
$\Leftrightarrow$ (definición de valuación)
$(\bar{\forall} v : Val)(v(\Gamma_k \cup \Delta_k) = 1 \Rightarrow v(\varphi) = 1)$ o $(\bar{\forall} v : Val)(v(\Gamma_k \cup \Delta_k) = 1 \Rightarrow v(\varphi) = 0)$
$\Leftrightarrow$ (v_1 es la única valuación que cumple $v_1(\Gamma_k \cup \Delta_k) = 1$ por **(A)**)
$v_1(\varphi) = 1$ o $v_1(\varphi) = 0$
(y esto se cumple trivialmente)

Como probamos que $\Gamma_k \cup \Delta_k$ es completo, por ejercicio 7 del práctico $\textsc{Cons}(\Gamma_k \cup \Delta_k)$ es consistente maximal.

Otra forma de realizar la demostración - idea
Sabiendo por **(A)** que v_1 es la única valuación que cumple $v_1(\Gamma_k \cup \Delta_k) = 1$, se puede probar que también es la única que cumple que $v_1(\textsc{Cons}(\Gamma_k \cup \Delta_k)) = 1$.
Si se demuestra además que $\textsc{Cons}(\Gamma_k \cup \Delta_k)$ es una teoría, por el ejercicio 9 del práctico, podemos afirmar que $\textsc{Cons}(\Gamma_k \cup \Delta_k)$ es consistente maximal.

Ejercicio 16

Bosquejo de solución

a. Definición inductiva de $\mathcal{L}_0$

a) $p_0 \in \mathcal{L}_0$

b) si $\alpha, \beta \in \mathcal{L}_0$ entonces $(\alpha \land \beta) \in \mathcal{L}_0$

c) si $\alpha, \beta \in \mathcal{L}_0$ entonces $(\alpha \lor \beta) \in \mathcal{L}_0$

b. Como ya sabemos, el valor de verdad de las letras proposicionales en `PROP` determina una única valuación.
Como en $\mathcal{L}_0$ hay una sola letra proposicional, hay dos posibles valores de verdad que ella puede tomar, definiendo solo dos valuaciones, $v_1(p_0) = 1$ y $v_2(p_0) = 0$.

c. Probaremos que $(\bar{\forall}\alpha \in \mathcal{L}_0)\alpha \texttt{ eq } p_0$, utilizando el PIP para $\mathcal{L}_0$.
Identificación de la propiedad: $P(\alpha) := \alpha \texttt{ eq } p_0$.

Paso Base

T) $P(p_0) : p_0 \texttt{ eq } p_0$

Demo)

$p_0 \texttt{ eq } p_0$
(se cumple por reflexiva de `eq`)

Paso Inductivo 1

H) $P(\alpha) : \alpha \texttt{ eq } p_0$
$P(\beta) : \beta \texttt{ eq } p_0$

T) $P(\alpha \land \beta) : (\alpha \land \beta) \texttt{ eq } p_0$

Demo)

$\alpha \land \beta$
`eq` (por hip y teorema de sustitución)
$p_0 \land p_0$
`eq` (por indempotencia del $\land$)
p_0

Paso Inductivo 2

H) $P(\alpha) : \alpha \texttt{ eq } p_0$
$P(\beta) : \beta \texttt{ eq } p_0$

T) $P(\alpha \lor \beta) : (\alpha \lor \beta) \texttt{ eq } p_0$

Demo)

$\alpha \lor \beta$
`eq` (por hip y teorema de sustitución)
$p_0 \lor p_0$
`eq` (por indempotencia del $\lor$)
p_0

Por la aplicación del PIP y por lo demostrado, se puede afirmar $(\bar{\forall}\alpha \in \mathcal{L}_0)\alpha \texttt{ eq } p_0$.

d. I. Hay que probar que para cualquier $\varphi \in \mathcal{L}_0$ y $\Gamma \subseteq \mathcal{L}_0$ se cumple que: $\Gamma \vdash \varphi$ si y solamente si $\Gamma \neq \emptyset$.
Sean $\varphi \in \mathcal{L}_0$ y $\Gamma \subseteq \mathcal{L}_0$ arbitrarios, demostraremos $\Gamma \vdash \varphi$ si y solamente si $\Gamma \neq \emptyset$.

Demostración del directo.

$\Rightarrow)$ $\Gamma \vdash \varphi$ entonces $\Gamma \neq \emptyset$.

H) $\Gamma \vdash \varphi$.
T) $\Gamma \neq \emptyset$.
Demo)
$\Gamma \vdash \varphi$
$\Leftrightarrow$ (def $\vdash$)
$(\bar{\exists} D \in \texttt{DER}_0)(Hip(D) \subseteq \Gamma \text{ y } Conc(D) = \varphi)$
$\Rightarrow$ (Lema 1)
$(\bar{\exists} D \in \texttt{DER}_0)(\emptyset \neq Hip(D) \subseteq \Gamma \text{ y } Conc(D) = \varphi)$
$\Rightarrow$ $(Hip(D) \subseteq \Gamma)$
$\Gamma \neq \emptyset$

Resta probar el Lema 1.
Vamos a probar $(\bar{\forall} D \in \texttt{DER}_0)H(D) \neq \emptyset$
Demostración usando el PIP para $\texttt{DER}_0$
Identificación de la propiedad: $P(D) := H(D) \neq \emptyset$
Paso Base
T) $P(\varphi) : Hip(\varphi) \neq \emptyset$
Demo)
$Hip(\varphi) = \{\varphi\} \neq \emptyset$
Paso Inductivo 1
Sean $D = \begin{array}{c}\Gamma \\ \bigvee \\ \varphi\end{array}$ y $D' = \begin{array}{c}\nabla D \\ p_0\end{array}$
H) $P(D) : Hip(D) \neq \emptyset$
T) $P(D') : Hip(D') \neq \emptyset$
Demo)
$Hip(D') = Hip(D)$ por construcción.
Además $Hip(D) \neq \emptyset$ por hipótesis, por lo que $Hip(D') \neq \emptyset$
Paso Inductivo 2
Sean $D = \begin{array}{c}\Gamma \\ \bigvee \\ p_0\end{array}$ y $D' = \begin{array}{c}\nabla D \\ \varphi\end{array}$
H) $P(D) : Hip(D) \neq \emptyset$
T) $P(D') : Hip(D') \neq \emptyset$
Demo)
$Hip(D') = Hip(D)$ por construcción.
Además $Hip(D) \neq \emptyset$ por hipótesis, por lo que $Hip(D') \neq \emptyset$

Demostración del recíproco.

$\Leftarrow$) $\Gamma \neq \emptyset$ entonces $\Gamma \vdash \varphi$.

H) $\Gamma \neq \emptyset$.

T) $\Gamma \vdash \varphi$.

Demo)

$\Gamma \neq \emptyset$, por lo que para algún $\psi \in \mathcal{L}_0$, se cumple que $\psi \in \Gamma$.
Por regla a, como $\psi \in \mathcal{L}_0$, $\psi \in \texttt{DER}_0$, aplicando las relgas de $\texttt{DER}_0$ construimos el siguiente elemento:

$$\cfrac{\cfrac{\psi}{p_0}\ regla\ b}{\varphi}\ regla\ c$$

Entonces, $(\bar{\exists} D \in \texttt{DER}_0)(Hip(D) \subseteq \Gamma$ y $Conc(D) = \varphi)$, por lo que $\Gamma \vdash \varphi$.

II. Hay que probar que para cualquier $\varphi \in \mathcal{L}_0$ y $\Gamma \subseteq \mathcal{L}_0$: $\Gamma \vdash \varphi$ si y solamente si $\Gamma \models \varphi$.
Sean $\varphi \in \mathcal{L}_0$ y $\Gamma \subseteq \mathcal{L}_0$ arbritrarios, demostraremos $\Gamma \vdash \varphi$ si y solamente si $\Gamma \models \varphi$.

Demostración del directo.

$\Rightarrow$) $\Gamma \vdash \varphi$ entonces $\Gamma \models \varphi$.

H) $\Gamma \vdash \varphi$.

T) $\Gamma \models \varphi$.

Demo)

$$\begin{array}{l} \Gamma \vdash \varphi \\ \Leftrightarrow \text{(por parte I. } \emptyset \neq \Gamma = \{\psi\} \cup \Gamma'\text{)} \\ \Gamma' \cup \{\psi\} \vdash \varphi(*^1) \end{array}$$

Queremos probar $\Gamma \models \varphi$, es decir que $(\bar{\forall} v : Val)(v(\Gamma) = 1 \Rightarrow v(\varphi) = 1)$
Sea $v_1 : Val$ tal que $v_1(\Gamma) = 1$, queremos probar $v_1(\varphi) = 1$

$$\begin{array}{l} v_1(\Gamma) = 1 \\ \Leftrightarrow \text{(por } (*^1)\text{)} \\ v_1(\Gamma' \cup \{\psi\}) = 1 \\ \Rightarrow \text{(parte c.)} \\ v_1(p_0) = 1 \\ \Rightarrow \text{(parte c.)} \\ v_1(\varphi) = 1 \end{array}$$

Demostración del recíproco.

$\Leftarrow$) $\Gamma \models \varphi$ entonces $\Gamma \vdash \varphi$.

H) $\Gamma \models \varphi$.

T) $\Gamma \vdash \varphi$.

Demo)

Supongo por absurdo $\Gamma \nvdash \varphi$

$$\begin{array}{l} \Gamma \nvdash \varphi \\ \Leftrightarrow \text{(por hipótesis y parte I. } \Gamma = \emptyset \text{)} \\ \models \varphi \\ \Leftrightarrow \text{(def. } \models\text{)} \\ (\bar{\forall} v : Val) v(\varphi) = 1 \\ \Leftrightarrow \text{(parte c.)} \\ (\bar{\forall} v : Val) v(p_0) = 1 \\ \text{(y esto es absurdo porque } p_0 \text{ no es una tautología)} \end{array}$$

Por lo tanto $\Gamma \vdash \varphi$.

Ejercicio 17

Caracterización semántica de la completitud

Queremos probar:

$$\Gamma \text{ completo} \Leftrightarrow (\bar{\exists} v : Val)(v \text{ única y } v(\Gamma) = 1)$$

Directo:

H) Γ completo

T) $(\bar{\exists} v : Val)(v \text{ única y } v(\Gamma) = 1)$

Demo.

Comenzamos probando la existencia de una valuación que satisface Γ.

$$\begin{array}{l} \scriptstyle\text{(por hip.)} \\ \Gamma \text{ completo} \\ \Rightarrow \scriptstyle\text{(def. completo)} \\ \Gamma \text{ consistente} \\ \Rightarrow \scriptstyle\text{(cond. nec. de consistencia)} \\ (\bar{\exists} v_1 : Val) v_1(\Gamma) = 1 \end{array}$$

Mostramos ahora que v_1 es única.

Para esto, sea $p_i \in \mathcal{P}$ una letra proposicional arbitraria. Luego se tiene,

$$\begin{array}{l} \scriptstyle\text{(por hip.)} \\ \Gamma \text{ completo} \\ \Rightarrow \scriptstyle\text{(def. completo, } p_i \in \texttt{PROP}\text{)} \\ \Gamma \vdash p_i \text{ o } \Gamma \vdash \neg p_i \\ \Rightarrow \scriptstyle\text{(corrección)} \\ \Gamma \models p_i \text{ o } \Gamma \models \neg p_i \end{array}$$

Sea v una valuación cualquiera que cumple $v(\Gamma) = 1$.
De lo anterior tenemos dos casos:

- Si $\Gamma \models p_i$ entonces $v(p_i) = 1$ (por definición de $\models$)
- Si $\Gamma \models \neg p_i$ entonces $v(p_i) = 0$ (por definición de $\models$ y valuación)

Concluímos que el valor de $v(p_i)$ es el mismo para cada valuación v que cumple $v(\Gamma) = 1$

Como una valuación queda determinada por el valor que asigna a las letras proposicionales, queda demostrado que todas las valuaciones v que cumplen $v(\Gamma) = 1$ son iguales entre sí.

Recíproco:

H) $(\bar{\exists} v : Val)(v \text{ única y } v(\Gamma) = 1)$

T) Γ completo

Demo.

Comenzamos probando la consistencia de Γ.

$$
\begin{array}{l}
\text{\scriptsize (por hip.)} \\
(\bar{\exists} v : Val) v(\Gamma) = 1 \\
\Rightarrow \text{\scriptsize (cond. suf. de consistencia)} \\
\Gamma \text{ consistente } \mathbf{(A)}
\end{array}
$$

Consideremos ahora una $\varphi \in \texttt{PROP}$ arbitraria y sea v la valuación considerada en la hipótesis de la prueba.
Como v es valuación se cumple de manera exlcuyente que $v(\varphi) = 1$ o $v(\varphi) = 0$.
Separamos según estos dos casos:

Caso 1) $v(\varphi) = 1$.

Como v es por hipótesis la única valuación que cumple $v(\Gamma) = 1$ podemos afirmar,

$$
\begin{array}{l}
(\bar{\forall} v : Val)(v(\Gamma) = 1 \Rightarrow v(\varphi) = 1) \\
\Rightarrow \text{\scriptsize (def. } \models \text{)} \\
\Gamma \models \varphi \\
\Rightarrow \text{\scriptsize (completitud)} \\
\Gamma \vdash \varphi \ \mathbf{(B1)}
\end{array}
$$

Caso 2) $v(\varphi) = 0$.

Como v es por hipótesis la única valuación que cumple $v(\Gamma) = 1$ podemos afirmar,

$$
\begin{array}{l}
(\bar{\forall} v : Val)(v(\Gamma) = 1 \Rightarrow v(\varphi) = 0) \\
\Rightarrow \text{\scriptsize (def. val.)} \\
(\bar{\forall} v : Val)(v(\Gamma) = 1 \Rightarrow v(\neg\varphi) = 1) \\
\Rightarrow \text{\scriptsize (def. } \models \text{)} \\
\Gamma \models \neg\varphi \\
\Rightarrow \text{\scriptsize (completitud)} \\
\Gamma \vdash \neg\varphi \ \mathbf{(B2)}
\end{array}
$$

De **(B1)** y **(B2)**, dado que φ arbitraria, se cumple

$$(\bar{\forall} \varphi \in \texttt{PROP}) \Gamma \vdash \varphi \text{ o } \Gamma \vdash \neg\varphi \ \mathbf{(B)}$$

Luego, de **(A)** y **(B)** se cumple que Γ es completo.