Producto escalar y vectorial

Ejercicio 5)

Hallar la ecuación cartesiana del plano que pasa por el punto A y es perpendicular a $\vec{n}$

Tomemos el caso a) de este ejercicio: conocemos el vector perpendicular al plano y un punto perteneciente al mismo $A = (2, 1, -1)$ y $\vec{n} = (-1, 1, 3)$

Utilizando lo visto en los videos, las coordenadas del vector normal son los coeficientes de x,y,z en la ecuación reducida del plano y el termino independiente se determina conociendo un punto perteneciente al plano. Ecuación cartesiana del plano es $ax + by + cz = d$, el plano que nos piden determinar tiene como vector normal, $\vec{n} = (-1, 1, 3)$ entonces -1x+1y+3z=d, aún no conocemos d pero sabemos que el punto A pertenece al plano que pretendemos determinar y por lo tanto las coordenadas del punto A deben verificar la ecuación del plano entonces -1(2)+1(1)+3(-1)=d y hallamos d para que la ecuación se verifique quedando $\boldsymbol{d = -4}$ y la ecuación del plano buscada: $\boldsymbol{-x + y + 3z = -4}$

Ejercicio 6)

Hallar la ecuación cartesiana del plano en los siguientes casos: Tomemos el caso
a) Pasa por $A = (1, 1, 1)$ y tiene vectores directores $v = (2, -1, 3)$ y $u = (4, 6, 2)$
Determinamos el vector normal y para hallar sus componentes lo expresamos como el siguiente determinante, lo cual nos permite recordar el calculo de las mismas:

$$\begin{vmatrix} i & j & k \\ 2 & -1 & 3 \\ 4 & 6 & 2 \end{vmatrix} = i* \begin{vmatrix} -1 & 3 \\ 6 & 2 \end{vmatrix} - j* \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 2 \end{vmatrix} + k* \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 4 & 6 \end{vmatrix} = -20i + 8j + 16k$$

Por lo tanto el vector normal al plano que estamos buscando es $\vec{n} = (-20, 8, 16)$ y podemos seguir el ejercicio como en el ejemplo anterior puesto que conocemos las componentes del vector normal y un punto del planos que queremos determinar,

Ejercicio 7)

Determinar los valores de a para que la recta r y el plano π sean paralelos.

Parte b) $\pi) ax - y + z = -1$ y $r = \begin{cases} x = 1 + \lambda \\ y = 3\lambda \\ z = -\lambda \end{cases}$

Si r es paralela a π entonces el vector $\vec{n}$ normal a π resulta normal a r por lo cual impondremos esta condición para hallar a.

$\vec{n}$ normal a r entonces $\vec{n}$ normal al vector director de r, por lo tanto si llamamos v_r al vector director de la recta r se tiene que cumplir que el producto escalar del vector director de la recta y el vector normal al plano da 0 por lo tanto
$< v_r, \vec{n} >=0 \iff < (1, 3, -1), (a, -1, 1) >=0 \iff a - 3 - 1 = 0 \iff$ a=4

Ejercicio 8)

Probar que dos rectas son perpendiculares

Para lo cual hay que probar que el producto escalar entre los vectores directores de ambas rectas es cero y además que las rectar se cortan.

Recordar que cuando dos rectas se cruzan y el producto escalar de sus vectores directores da cero decimos que son **ortogonales** y hablamos de perpendicularidad cuando se cortan y el producto escalar de los vectores directores da 0.

Por lo tanto para este ejercicio es conveniente hallar los vectores directores de ambas rectas. Repasemos que: Para hallar el vector director de una recta dada por su ecuación reducida o bien se parametriza o se hallan dos puntos de la recta y a partir de ellos su vector director.

Distancia entre dos planos paralelos

Ejercicio 9)

(Ver videos)

Probar que los siguientes planos son paralelos y hallar la distancia entre ellos.
Tomemos el caso b) $\pi_1)2x - 3y + 6z = 14$ y $\pi_2)4x - 6y + 12z = -21$
Los planos vienen dados por sus ecuaciones cartesianas o reducidas entonces fácilmente podemos hallar los vectores normales a cada uno de los planos. Si los planos son paralelos sus respectivos vectores normales son colineales.

Entonces $\vec{n_{\pi_1}}$ y $\vec{n_{\pi_2}}$ deben ser colineales Probarlo!

1- Luego la distancia entre los planos puede hallarse como la distancia de un punto cualquiera de uno de ellos al otro plano.(Porque ambos planos son paralelos)

(Observación: Recordamos que estamos trabajando en un Sistema ortogonal de coordenadas sino las formulas a utilizar no serian validas)

Si P(x_p,y_p,z_p) es un punto exterior a un plano π de ecuación $ax + by + cz + d = 0$ la distancia desde P exterior al plano πse halla utilizando la formula

d(P,π)=$\frac{|ax_p+by_p+cz_p+d|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$.

En el ejemplo: Sea $P \in \pi$ por ejemplo P(7,0,0) $d(P, \pi) = \frac{|4*7+0*(-6)+0*(12)+21|}{\sqrt{4^2+(-6)^2+12^2}} = \frac{49}{14} = \frac{7}{2}$

2- Si queremos usar la formula $d(\pi_1, \pi_2) = \frac{|d_1-d_2|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$.

Entonces como los vectores normales no son iguales lo podemos hacer, pero previamente hacemos lo siguiente para que sean iguales: Como $\vec{n_{\pi_1}} = 2*\vec{n_{\pi_2}}$ En el segundo plano dividimos todos los coeficientes por 2, incluyendo d, nos queda $\pi_2)$ $2x - 3y + 6z = \frac{-21}{2}$

Ahora si podemos usar la formula con $d_1 = 14$ y $d_2 = \frac{-21}{2}$. Otro cuidado a tener es como tomar el signo de d, si a d_1 lo tomo con el signo estando a la derecha del signo de igual en la ecuación del plano a d_2 también. Así nos queda:
d(P,π)=$\frac{|d_1-d_2|}{\sqrt{2^2+3^2+6^2}}$.=$\frac{\left|14-\frac{-21}{2}\right|}{\sqrt{2^2+3^2+6^2}}$=$\frac{\frac{49}{2}}{7}$=$\frac{7}{2}$.

3- Ahora veremos otra forma:

Tomamos P(7,0,0)$\in \pi_1$ y trazamos la recta r perpendicular a π_2

$r \begin{cases} x = 7 + 2\lambda \\ y = -3\lambda \\ z = 6\lambda \end{cases}$

Intersección de r con π_2 obtenemos Q .Para lo cual resolvemos el Sistema (¿Cuál?) y obtenemos las coordenadas de $Q(6, \frac{3}{2}, -3)$ **(Escribir el sistema a resolver y resolverlo)** Luego hallamos la $d(P, Q)$.

Ejercicio 10)

Estudiar las posiciones relativas de las siguientes rectas

a)

$r = \begin{cases} x = 1 - \lambda \\ y = -2 - \lambda \\ z = 1 - 3\lambda \end{cases}$ y $s = \begin{cases} x - 2y = 4 \\ x + z = -1 \end{cases}$

Ya hemos discutido las posiciones relativas entre rectas vinculándola con la solución del sistema de ecuaciones formado por las respectivas ecuaciones de las rectas. (Ver Práctico 3) Entonces planteamos el sistema

$S = \begin{cases} x = 1 - \lambda \\ y = -2 - \lambda \\ z = 1 - 3\lambda \\ x - 2y = 4 \\ x + z = -1 \end{cases}$

En este caso la recta r viene dada por sus ecuaciones paramétricas y la recta s por sus ecuaciones reducidas resultando un sistema de 5 ecuaciones y 4 incógnitas a resolver. Claro esta que podríamos aplicar el método general para resolver sistema visto (escolarización) pero por lo sencillo procedemos sustituyendo x,y,z dependientes de λ en la cuarta y quinta ecuación del sistema (ecuaciones de s)) quedando:

$$S = \begin{cases} (1 - \lambda) - 2(-2 - \lambda) = 4 \\ (1 - \lambda) + (1 - 3\lambda) = -1 \end{cases}$$

Como cada una de las ecuaciones depende solo de λ resolvemos cada una de ellas: De la primera obtenemos λ=-1 y de la segunda λ= $\frac{3}{4}$ por lo tanto no existe un valor de λ que verifique ambas ecuaciones con lo que el sistema resulta Incompatible.

$Sol(S) = \Phi$ En este caso las rectas o se cruzan o son paralelas.

Veamos si son paralelas, para lo cual consideremos los vectores directores de ambas:

$v_r = (-1, -1, -3)$ y $v_s(2, 1, -2)$ (Mientras que el de la recta r resulta inmediato el de s no. Hallarlo) Probar que no son colineales y por lo tanto las rectas no son paralelas entonces r y s se cruzan.

Ejercicio 11)

Estudiar las posiciones relativas de la recta y el plano

a)

$\pi : -x + 3y + 2z + 5 = 0$ y $r = \begin{cases} x = 1 + 2\lambda \\ y = 1 + 2\lambda \\ z = 1 - 2\lambda \end{cases}$ (Ver discusión de intersección de recta y plano en el practico 3) Estudiamos el sistema formado por la ecuación del planos y de la recta.

$$(S) \begin{cases} -x + 3y + 2z + 5 = 0 \\ x = 1 + 2\lambda \\ y = 1 + 2\lambda \\ z = 1 - 2\lambda \end{cases}$$ Tenemos un sistema de 4 ecuaciones y 4 incógnitas.

Resolverlo por escalerización.

Por simple en este caso, lo resolvemos(también) sustituyendo las x,y,z de la recta r en la ecuación reducida del plano π) Quedando: $-(1 + 2\lambda) + 3(1 + 2\lambda) + 2(1 - 2\lambda) + 5 = 0 \longleftrightarrow 9 + 0\lambda = 0$ que no tiene solución (¿Por qué?) y por lo tanto el sistema resulta incompatible entonces la recta y el

plano resultan paralelos.
¿Qué puedes decir acerca del producto escalar del vector director del la recta $r)(v_r)$ y el vector normal al plano n_π?
Probar la afirmación realizada.

¿Es suficiente probar que el producto escalar de v_r y n_π es cero para afirmar que la recta es paralela al plano? Justificar o dar un contraejemplo.

Ejercicio 13)

Hallar el valor de a para que las rectas $r = \begin{cases} 2x - y = a \\ z + 2y = 3 \end{cases}$ y $s = \begin{cases} x + y = 2 \\ x + 2z = 3 \end{cases}$ se corten.
Para el valor hallado de a en la parte anterior, determinar la ecuación del plano que contiene a r y a s

Estudiamos el Sistema formado por las ecuaciones reducidas de ambas rectas y el mismo tiene que ser Compatible y Determinado dando como solución las coordenadas del punto de corte.

$$(S))\begin{cases} 2x - y = a \\ z + 2y = 3 \\ x + y = 2 \\ x + 2z = 3 \end{cases}$$

$Sol = (x, y, z, a) = (1, 1, 1, 1)$ Probarlo!! Ahora las rectas r y s determinan un plano para hallarlo veremos dos formas:

1. Determinamos el vector director de cada recta y el Punto P(1,1,1) pertenece al plano.
Hallar los vectores directores.
Se obtiene $v_r = (1, 2, -4)$ y $v_s(2, -2, -1)$. Escribir la ecuación paramétrica del plano determinado. Pasar de la paramétrica a la ecuación reducida del plano se obtiene $-10x - 7y - 6z + 23 = 0$ Probarlo!

2. Hallar v_r y v_s y determinar las componentes de la normal al plano, recordar que el producto vectorial de los dos vectores directores del plano me dan las componentes del vector normal

$$v_r \times v_s = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & 2 & -4 \\ 2 & -2 & -1 \end{vmatrix} = -10i - 7j - 8k$$

Ahora la ecuación de π $-10x - 7y - 8z + d = 0$ falta determinar d. Hacerlo!

Como podrán comprobar llegamos a la misma ecuación reducida del plano por ambos procedimientos.

Ejercicio 14)
Calcular la distancia del punto Q a la recta r o plano π, según corresponda.

La distancia de un punto a un plano fue estudiada (Ver solución ejercicio 9)) al hallar la distancia entre dos planos paralelos, así que veremos para este ejercicio como hallar la distancia de un punto a una recta
Veamos el caso e)

$$Q = (1, 3, -2) \text{ y } r = \begin{cases} x = 2 + 3\lambda \\ y = -1 + \lambda \\ z = 1 - 2\lambda \end{cases}$$

Hacemos la siguiente construcción:
1- Trazar el plano π perpendicular a la recta r por el punto Q
2- Hallar el punto $P = \pi \bigcap r$
3- Hallar la $d(Q, P)$ (este valor es la distancia del punto Q a la recta r

1- Como el vector director de la recta es $v_r(3, 1, -2)$, el plano π perpendicular a r tiene como coeficientes de x, y, z las componentes del vector director de r (queremos que el plano resulte per-

pendicular a r por lo tanto, la normal al plano es el vector director de la recta r).
π) 3x+y-2z+d=0, falta determinar d sabemos que el plano debe contener a Q por lo tanto las coordenadas de Q deben verificar la ecuación del plano y hallamos d par que suceda 3*1+1*3-2*(-2)+d=0 entonces $d = -10$
π) 3x+y-2z=10

2-Para hacer 2- resolvemos el sistema formado por la recta y el plano π. $\begin{cases} x = 2 + 3\lambda \\ y = -1 + \lambda \\ z = 1 - 2\lambda \\ 3x + y - 2z = 10 \end{cases}$

Resolverlo!!

$P = (\frac{7}{2}, \frac{-1}{2}, 0)$

3- $d(Q, P)$, Hallar la distancia utilizando la formula de distancia entre dos puntos.

Ejercicio 15)

Probar que la recta r es paralela al plano π, y hallar la distancia entre ambos
$\pi : x + 3y = 0$ y $r = \begin{cases} x = 1 - 3\lambda \\ y = 2 + \lambda \\ z = 1 - \lambda \end{cases}$ Si la recta r es paralela a π entonces el vector normal al plano π es ortogonal al vector director de la recta. Para probarlo realizamos el producto escalar del vector director de la recta y el vector normal a π debe dar como resultado 0.

$v_r = (-3, 1, 1)$ y n_π=(1,3,0) entonces -3+3+0=0 Probado.
Observación: Es importante tener en cuenta que asumimos que si la recta esta incluida en el plano es paralela al mismo. en este caso la distancia de la recta al plano resultaría 0. Cuando discutimos el paralelismo a partir de la discusión del Sistema formado por la recta y el plano distinguimos el caso incluida en el plano (SCI) del caso exterior (S.Incompatible).

d(r,π)=d(Q,π) siendo Q un punto cualquiera de la recta (como la recta r es paralela al plano todos los puntos de la recta están a la misma distancia del plano). Aplicar la formula de distancia de un punto a un plano para finalizar el ejercicio.

Ejercicio 16)

Probar que la recta $r = \begin{cases} x = 0 \\ 3y + z = 0 \end{cases}$ y $s = \begin{cases} y = 0 \\ 2x - z = 3 \end{cases}$ no se cortan y hallar un plano que contenga a s y sea paralelo a r.

Para probar que las rectas no se cortan, se resuelve el sistema S) formado por las ecuaciones de ambas rectas, el mismo no debe tener solución, Sistema Incompatible. Es muy fácil en este caso demostrar la incompatibilidad del sistema. Hacerlo!

Ahora buscamos el plano que cumpla con lo pedido:

1- Para que contenga a s) el vector director de la recta s) pertenece a la dirección del plano y además el plano debe contener un punto de la recta s).

2-Si queremos que el plano sea paralelo a r) alcanza con que el vector director de r) pertenezca a la dirección del plano y por lo tanto tomamos como uno de los vectores directores del plano(buscado) a v_r.
Sea π el plano que buscamos queda determinado por: v_r, v_s y $Q \in s$ Escribir la ecuación paramétrica y la reducida del plano.

Ejercicio 17)

Dadas las rectas

$$r = \begin{cases} x + y - z = 0 \\ x + 2y = 7 \end{cases} \text{ y } s \text{ que pasa por los puntos } (2, -5, 1) \text{ y } (2, -5, 0)$$

hallar un punto A en r y un punto B en s, de tal forma, que el vector $\vec{AB}$ sea perpendicular a ambas rectas.
Calcular la distancia entre r y s.

AB es perpendicular a ambas rectas por lo tanto es la normal común a r y a s El vector director de la recta normal común es colineal con el producto vectorial de los vectores directores de r y s

1- Hallamos el vector director de r, es v_r
Sea v_r=(-2,1,-1). Explicar como se halla v_r.

2- Hallamos el vector director de s, es v_s
Sea v_s=(0,0,1). Explicar como se halla

3- Hallamos el producto vectorial de v_r y v_s $v_r \times v_s$ $=(1, 2, 0)$ Explicar como se halla.

Hallar la normal común
i- Hallar el plano α determinado por r (punto de r y vector director de r, v_r) y $v_r \times v_s$
En este caso: P(5,1,6), v_r=(-2,1,-1) y $v_r \times v_s$=(1,2,0)

ii- Hallar el plano β determinado por s (punto de s y v_s) y $v_r \times v_s$.
En este caso: Q(2,-5,0), v_s=(0,0,1) y $v_r \times v_s$=(1,2,0)
Después de hallar las respectivas ecuaciones reducidas de α y β, la normal común queda determinada por la intersección de ambos planos. Si le llamamos n a la normal común n= $\alpha \bigcap \beta$

En este caso quedara $n) = \begin{cases} y - 2x + 5z = 21 \\ -2x + y = -9 \end{cases}$

Hallar A y B

A es el punto de intersección de r y la normal común n. A= $n \bigcap r$.

B es el punto de intersección de s y la normal común n. B= $n \bigcap s$.

Resolver los respectivos sistemas $A(5, 1, 6)$ y $B(2, -5, 6)$ y luego determinar la distancia entre AyB.

SEGUNDA FORMA:

Para hallar la distancia entre dos rectas que se cruzan. Aplicamos la formula

$d(r, s)$= $|(v_r \times v_s).(PQ)|$* $\frac{1}{\|(v_r \times v_s\|}$

Para este caso:
$v_r \times v_s$=(1,2,0)
$PQ = Q - P$ donde P es un punto de r y Q un punto de s
$P(5, 1, 6)$ y $Q(2, -5, 0)$ entonces $Q - P$=$(-3, -6, -6)$
$\|(v_r \times v_s\|$=$\sqrt{5}$
$|(v_r \times v_s).(PQ)|$=$|(1, 2, 0).(-3, -6, -6)|$=15

d(r,s)=$\frac{15}{\sqrt{5}}$= $\frac{15*\sqrt{5}}{5}$=$\sqrt{45}$

Ejercicio 18)

Se consideran las rectas r y s de ecuaciones respectivas:

$$r = \begin{cases} x + 3y + 4z - 6 = 0 \\ 2x + y - 3z + 2 = 0 \end{cases} \text{ y } s = \begin{cases} x = -1 + 2\lambda \\ y = 1 + \lambda \\ z = 2 - 3\lambda \end{cases}$$

1. Estudiar la posición relativa de r y s.
2. Determinar la recta que corta perpendicularmente a r y s.
3. Calcular la distancia entre r y s.

1. Estudiamos el sistema formado por r y s.

$$(\text{S}) \begin{cases} x + 3y + 4z - 6 = 0 \\ 2x + y - 3z + 2 = 0 \\ x = -1 + 2\lambda \\ y = 1 + \lambda \\ z = 2 - 3\lambda \end{cases}$$

$(1 + 2\lambda) + 3(1 + \lambda) + 4(2 - 3\lambda) - 6 = 0$
$2(1 + 2\lambda) + (1 + \lambda) - 3(2 - 3\lambda) + 2 = 0$

Ambas ecuaciones deberían verificarse para el mismo valor de λ lo cual no ocurre entonces el Sistema es Incompatible.

2. Hallar la normal común, n. Hacerlo

3. La distancia entre ambas rectas es la distancia entre los puntos de intersección de las respectivas rectas y la normal común. $A= n \bigcap r$ y $B=n \bigcap s$