Teoría de Lenguajes

Pumping Lema
para
Lenguajes Regulares

Ejemplo

El siguiente lenguaje.....

$$L = \{ 0^k 1^k / k > 0 \}$$

¿es un lenguaje regular?

Pumping Lema

H) L es un Lenguaje Regular

T) $\exists\ n \in \mathbb{N}$ / $\forall\ z \in L \wedge |z| \geq n$ $\exists$ descomposición de z: $z = uvw$ /

i) $|uv| \leq n$

ii) $|v| \geq 1$

iii) $\forall\ i \geq 0\ \ z_i = uv^iw \in L$

Contrarrecíproco del Pumping Lema

H) Sea un lenguaje L

$\forall$ n $\in$ $\mathbb{N}$ / $\exists$ z $\in$ L $\wedge$ |z| $\geq$ n $\forall$ descomposición de z: z = uvw /

i) |uv| $\leq$ n

ii) |v| $\geq$ 1

iii) $\exists$ i $\geq$ 0, $z_i = uv^i w \notin L$

T) L no es un Lenguaje Regular

Contrarrecíproco del Pumping Lema

Para probar que L no es un Lenguaje Regular

Dado n $\in \mathbb{N}$

<u>Elegir z = …</u> (en función del n) con z $\in$ L $\wedge$ $|z| \geq n$

<u>Probar $\forall$ descomposición</u> de z = uvw /

i) $|uv| \leq n$

ii) $|v| \geq 1$

<u>Encontrar</u> $i \geq 0$ y **<u>justificar</u>** que $z_i = uv^i w \notin L$

<u>Agregar</u> la cláusula que dice "Estas son todas las descomposiciones de z que cumplen i) y ii), cualquier otra falla en la iii)"

Entonces L NO es un Lenguaje Regular

Pumping Lema

Sea el lenguaje

$$L = \{ 0^k 1^k / k > 0 \}$$

Intuitivamente creemos - en base a lo que estuvimos comentando antes - que NO es un lenguaje regular e intentaremos probarlo por el contrarrecíproco del PL

Pumping Lema

$L = \{ 0^k 1^k / k > 0 \}$

Pasos:

1.- Fijamos un N (positivo y arbitrario)

2.- Elegimos una tira $z \in L$, en función del N y que $|z| \geq N$

3.- Se hacen todas las descomposiciones de z que cumplan: $|uv| \leq N$ y $|v| \geq 1$;

4.- Se busca para cada caso un $i \geq 0$ de manera que $uv^iw \notin L$

5.- Si se logra, entonces podemos afirmar que L NO es un lenguaje regular

Pumping Lema

$L = \{ 0^k 1^k / k > 0 \}$

qué tiras puedo elegir:

- $z = 0^{|N/2|} 1^{|N/2|}$
- $z = 0^N 1^N$

Pumping Lema

$L = \{ 0^k 1^k / k > 0 \}$

qué tiras puedo elegir:

- $z = 0^{|N/2|}\ 1^{|N/2|}$
- $z = 0^N 1^N$
- $z = 0^{2N} 1^{2N}$
- $z = 0^{3N} 1^{3N}$
- $z = 0^{4N} 1^{4N}$
- ….

Aplicación (cont.)

$z = 0^{|N/2|}\, 1^{|N/2|}$

N/2 N/2

00000……..00011111………..1111111

(1) | u || v || w |

(2) | u || v || w |

(3) | u || v || w |

Aplicación (cont.)

$z = 0^{|N/2|} 1^{|N/2|}$

N/2 N/2

00000……..00011111………..1111111

(1) | u || v || w |

(2) | u || v || w |

(3) | u || v || w |

(1) $u = 0^p$ $p \geq 0$
$v = 0^q$ $q \geq 1$
$p+q \leq N$

$w = 0^{|N/2|-p-q} 1^{|N/2|}$

Aplicación (cont.)

$z = 0^{|N/2|} 1^{|N/2|}$

N/2 N/2

00000……..00011111………..1111111

(1) | u || v | w |

(2) | u || v || w |

(3) | u || v || w |

(1) $u = 0^p$ $p \geq 0$

$v = 0^q$ $q \geq 1$

$p+q \leq N$

$w = 0^{|N/2|-p-q}1^{|N/2|}$

$zi = 0^p(0^q)^i 0^{|N/2|-q-p}1^{|N/2|} = 0^{|N/2|+(i-1)q}1^{|N/2|}$

con i=0

$z^0 = 0^{|N/2|-q}1^{|N/2|}$

$z_0 \notin L$ porque hay menos 0s que 1s (porque $q \geq 1$)

Aplicación (cont.)

$z = 0^{|N/2|} 1^{|N/2|}$

N/2 N/2

00000……..00011111………..1111111

(1) | u || v || w |

(2) | u || v || w |

(3) | u || v || w |

(1) $u = 0^p$ $p \geq 0$
$v = 0^q$ $q \geq 1$
$p+q \leq N$

$w = 0^{|N/2|-p-q} 1^{|N/2|}$

(2) $u = 0^{|N/2|-p}$
$v = 0^p 1^q$ $p,q \geq 1$
$w = 1^{|N/2|-q}$

Aplicación (cont.)

$z = 0^{|N/2|}\,1^{|N/2|}$

N/2 N/2

00000……..00011111………..1111111

(1) | u || v || w |

(2) | u || v || w |

(3) | u || v || w |

(1) $u = 0^p$ $p\geq 0$

$v = 0^q$ $q\geq 1$

$p+q\leq N$

$w = 0^{|N/2|-p-q}1^{|N/2|}$

(2) $u = 0^{|N/2|-p}$

$v = 0^p\,1^q$ $p,q\geq 1$

$w = 1^{|N/2|-q}$

$zi = 0^{|N/2|-p}(0^p1^q)^i1^{|N/2|-q}$

con i=2

$z2 = 0^{|N/2|-p}0^p1^q0^p1^q1^{|N/2|-q} = 0^{|N/2|}1^q0^p1^{|N/2|}$

$z_2 \notin L$ porque se mezclan 0's con 1's

(porque p≥1)

Aplicación (cont.)

$z = 0^{|N/2|} 1^{|N/2|}$

N/2 N/2

00000……..00011111………..1111111

(1) | u || v | w |

(2) | u || v || w |

(3) | u || v || w |

(1) $u = 0^p$ $p \geq 0$

$v = 0^q$ $q \geq 1$

$p+q \leq N$

$w = 0^{|N/2|-p-q} 1^{|N/2|}$

(2) $u = 0^{|N/2|-p}$

$v = 0^p 1^q$ $p,q \geq 1$

$w = 1^{|N/2|-q}$

(3) $u = 0^{|N/2|} 1^p$ $p \geq 0$

$v = 1^q$ $q \geq 1$

$w = 1^{|N/2|-p-q}$

Aplicación (cont.)

$z = 0^{|N/2|}\, 1^{|N/2|}$

N/2 N/2

00000……..00011111………..1111111

(1) | u || v | w |

(2) | u || v || w |

(3) | u || v || w |

(1) $u = 0^p \quad p \geq 0$

$v = 0^q \quad q \geq 1$

$p+q \leq N$

$w = 0^{|N/2|-p-q} 1^{|N/2|}$

(2) $u = 0^{|N/2|-p}$

$v = 0^p\, 1^q \quad p,q \geq 1$

$w = 1^{|N/2|-q}$

(3) $u = 0^{|N/2|} 1^p \quad p \geq 0$

$v = 1^q \quad q \geq 1$

$w = 1^{|N/2|-p-q}$

el caso (3) es análogo al caso (1) pero al revés, si elijo la misma i, la cantidad de 0's queda mayor que la cantidad de 1's

Aplicación II (eligiendo otra tira)

$z = 0^N 1^N$

N N

00000……..00011111………..1111111

(1) | u | | v | | w |

Aplicación II (cont.)

$z = 0^N 1^N$

$$\overbrace{00000\ldots\ldots..000}^{N}\overbrace{11111\ldots\ldots\ldots..1111111}^{N}$$

(1) | u || v || w |

(1) $u = 0^p$ $p \geq 0$

$v = 0^q$ $q \geq 1$ $p+q \leq N$

$w = 0^{N-p-q}1^N$

Aplicación II (cont.)

$z = 0^N 1^N$

N N

00000……..00011111………..1111111

(1) | u | | v | | w |

(1) $u = 0^p$ $p \geq 0$

$v = 0^q$ $q \geq 1$ $p+q \leq N$

$w = 0^{N-p-q}1^N$

De donde $z^i = 0^p(0^q)^i0^{N-q-p}1^N$

Luego, tomando por ejemplo i=0 queda:

$z^0 = 0^{N-q}1^N$ y como $q \geq 1$, la cantidad de 0’s es menor que la cantidad de 1’s

Aplicación II (cont.)

$z = 0^N 1^N$

$$\overset{N}{00000\ldots\ldots..000}\overset{N}{11111\ldots\ldots\ldots..1111111}$$

(1) | u || v || w |

(1) $u = 0^p$ $p \geq 0$

$v = 0^q$ $q \geq 1$ $p+q \leq N$

$w = 0^{N-p-q}1^N$

De donde $z^i = 0^p(0^q)^i 0^{N-q-p}1^N$

Luego, tomando por ejemplo i=0 queda:

$z_0 = 0^{N-q}1^N$ y como $q \geq 1$, la cantidad de 0's es menor que la cantidad de 1's

(Notación: $|z_0|_0 < |z_0|_1$) y por lo tanto $z_0 \notin L$

y como es la <u>única</u> descomposición que cumple $|uv| \leq N$ y $|v| \geq 1 \Rightarrow$ **L NO Regular**

Aplicación III - (otro ejemplo)

Sea el lenguaje

$$L_2 = \{ x \,/\, x = d_1d_2d_3\ldots d_na^p \,/\, d_i \in \{1,2,3\} \wedge \sum_{i=1}^{i=n} di = 3*p \text{ , } p>0\}$$

(Febrero 2021)

¿es regular?

Ejemplos de tiras:

- 33aa
- 312aa
- 223131aaaa
- …