Propiedades de Lenguajes Regulares

Pumping Lema

Pumpimg Lema

Enunciado
Sea L un lenguaje regular.
Entonces $\exists$ $\mathbf{n} \in \mathbb{N} / \forall$ $z \in L$,con$|z| \geq \mathbf{n}$ $\exists$ una descomposición z = uvw que cumple:

- $|uv| \leq \mathbf{n}$
- $|v| \geq 1$
- $\forall$ i $\geq 0, uv^i w \in L$

Contrarecíproco

Sea L un lenguaje y $\forall$ $\mathbf{n} \in \mathbb{N}/\exists$ $z \in L$,con$|z| \geq \mathbf{n}$ $\exists$ una descomposición z = uvw donde alguna de estas 3 condiciones no se cumple:

- $|uv| \leq \mathbf{n}$
- $|v| \geq 1$
- $\forall$ i $\geq 0, uv^i w \in L$

donde el que NO se cunpla la 3er condición se traduce en:

- $\exists i \geq 0$, uv$^i w \notin L$

Entonces L NO es un lenguaje regular

Ejemplo 1 - PL

Sea el lenguaje L definido sobre el alfabeto $\Sigma = \{a, b\}$

$L = \{\mathrm{a}^p b^k a^t / p \geq 1, k \geq 0, t \geq 0, k = p + t\}$

Ejemplo 1 - PL

$L = \{a^p b^k a^t / p \geq 1, k \geq 0, t \geq 1, k = p + t\}$

Lo primero que debemos observar es que en cada tira de L, existe una relación entre los símbolos que no puede representarse mediante expresiones regulares. Es decir, se puede ver que existe una dependencia entre la cantidad de bs y de as.
Eso nos hace pensar que intuitivamente **NO** es un Lenguaje Regular.

Por lo tanto, para intentar demostrarlo, utilizamos el contrarrecíproco del Pumping Lema (PL).

Ejemplo 1 - PL

Los pasos son entonces:

1.- Se fija en **N** a la constante del PL

2.- Se considera una tira z $\in$ L, expresada en función de la constante N y verificando que la cantidad de símbolos de ella, es decir su largo, $|z| \geq$ N

3.- Se toma z=ab^{N+1}a^N *donde* $|z| = 2N + 2 \geq N$

4.- Se estudian a continuación, todas aquellas descomposiciones de z que cumplen:

- $|uv| \leq N$
- $|v| \geq 1$

y para todos esos casos, se busca la falla en la 3er condición:

- $\exists i \geq 0,$ uv$^i w \notin L$

5.- Luego, cualquier otro caso que no contemplado en los estudiados, falla justamente en alguna de las otras dos condiciones

6.- Se puede afirmar entonces que L NO es un lenguaje regular

Ejemplo 1 - PL

Estudio de casos:

(1)
u $= \epsilon$
v $=$ ab^{j} $\quad$ *con* $\quad j \geq 0, j+1 \leq N$
w $=$ b$^{N+1-j}a^{N}$

$z_i =$ (ab^{j})$^{i} b^{N+1-j} a^{N}$

En este caso, para i=0 $z_0 =$ b$^{N+1-j}a^{N}$ no cumple la condición de p $\geq$ 1(cantidad de $\mathbf{a}_s$ al comienzo de la tira), y por lo tanto $z_0 \notin L$

Ejemplo 1 - PL

(2)
u $= ab^j$ $\quad j \geq 0$
v $= b^m$ $\quad m \geq 1, \; 1 + j + m \leq N$
w$= b^{N+1-j-m}a^N$

$z_i = ab^{N+1+(i-1)*m}a^N$

En este caso, para i=2 $z_2 = ab^{N+1+m}a^N$ no se cumple la relación entre las a_s y las b_s (es decir, la relación k=p+t) porque se tiene N+m+1 = N+1 , pero $m \geq 1$, por lo tanto $z_2 \notin L$

Ejemplo 1 - PL

Se puede observar que en cualquier otra descomposición de z se tiene la condición $|uv| > \text{N}$, o bien el substring $\text{v} = \epsilon$

Entonces, como se analizaron todas las descomposiciones posibles que cumplen $|uv| \leq N$ y $|v| \geq 1$, por el CR del Pumping Lema se puede afirmar que L NO es un Lenguaje Regular.

Ejemplo 2 - PL

Sea el lenguaje L definido sobre el alfabeto $\Sigma = \{a\}$

$$\mathrm{L} = \{\mathrm{a}^{k^2} / k \geq 0\}$$

Ejemplo 2 - PL

$L = \{a^{k^2} / k \geq 0\}$

1.- Se fija en **N** a la constante del PL
2.- Se considera una tira z $\in$ L, en función de N y que $|z| \geq$ N
3.- Se toma por ejemplo $z = a^{N^2}$
4.- Se estudian a continuación, todas aquellas descomposiciones de z que cumplen:

- $|uv| \leq N$
- $|v| \geq 1$

y para todos esos casos, se busca la falla en la 3er condición:

- $\exists i \geq 0, \;\; uv^i w \notin L$

Ejemplo 2 - PL

Se puede observar que hay una sóla descomposición posible que es:

$u = a^p \qquad p \geq 0$

$v = a^j \qquad j \geq 1, \;\; p + j \leq N$

$w = a^{N^2-j-p}$

$z_i = a^p (a^j)^i a^{N^2-j-p} = a^{N^2+(i-1)*j}$

Tomamos por ejemplo i=2, teniendo $z_2 = a^{N^2+j}$ y entonces hay que ver si $z_2 \in L$

Ejemplo 2 - PL

$z_2 = \mathrm{a}^{N^2+j}$

sabemos que se cumple: $\mathrm{N}^2 < N^2 + j \leq N^2 + N$ porque
$\mathrm{j} \geq 1$ y $j \leq N$

también se cumple que $\mathrm{N}^2 + N < N^2 + 2N + 1 = (N+1)^2$

juntando todo se tiene:

$\mathrm{N}^2 < N^2 + j < N^2 + N < (N+1)^2$ y $\nexists$ entero que esté entre N^2 y $(N+1)^2$

por lo tanto $\mathrm{a}^{N^2+j} \notin$ L ya que no es un cuadrado perfecto.

Como es la única descomposición posible, L NO es un lenguaje regular.