

6

Torsión

6-1. Introducción

En los primeros cuatro capítulos se presentaron métodos detallados de análisis para determinar los esfuerzos y las deformaciones en barras cargadas axialmente. Relaciones análogas para miembros sometidos a pares de torsión respecto a sus ejes longitudinales serán desarrolladas en este capítulo. Las relaciones constitutivas por cortante vistas en el capítulo precedente serán usadas para este fin. *Las investigaciones se confinan al efecto de un solo tipo de acción (es decir, al de un par de torsión que genera una torsión en un miembro)*. Los miembros sometidos simultáneamente a torsión y flexión, que ocurren con frecuencia en la práctica, serán tratados en el capítulo 13.

Por mucho, la gran parte de este capítulo se dedica a miembros de secciones transversales circulares, ya sean macizas o bien tubulares. La solución de tales problemas elásticos e inelásticos puede obtenerse usando los procedimientos de la mecánica de sólidos. Para la solución de problemas de torsión con secciones transversales no circulares deben emplearse los métodos de la teoría matemática de la elasticidad (o elementos finitos). Este tema se estudia brevemente para hacer consciente al lector de las diferencias en tales soluciones respecto a las de los miembros circulares. Además, para enfatizar la diferencia en las soluciones analizadas, este capí-

tulo está subdividido en cuatro partes distintas. Sin embargo, debe notarse que en la práctica, los miembros para transmitir pares de torsión, como flechas para motores, pares de torsión para equipo de potencia, etc. son predominantemente circulares macizos o tubulares en sus secciones transversales. Por lo tanto, numerosas aplicaciones caen dentro del alcance de las fórmulas deducidas en este capítulo.

6-2. Aplicación del método de las secciones

En la mecánica de sólidos, al analizar los miembros respecto a pares de torsión, independientemente del tipo de sección transversal que se tenga, se emplea el método básico de las secciones (Sección 1-2). Para los problemas de torsión analizados aquí, hay *sólo una* ecuación importante de estática. Entonces, si el eje x está dirigido a lo largo de un miembro, tal ecuación es $\sum M_x = 0$. Por consiguiente, en sistemas estáticamente determinados, sólo puede haber un par de torsión reactivo. Después de determinar este par, el análisis empieza separando un miembro por una *sección perpendicular al eje del miembro*. Entonces cualquier lado de un miembro puede ser aislado y encontrar así el par de torsión *interno*. Este par de torsión interno debe *equilibrar* los pares aplicados externamente (es decir, *los pares de torsión externo e interno son iguales*) pero ellos tienen sentido opuesto. En problemas estáticamente determinados, el cálculo formal de una reacción puede pasarse por alto aislando un segmento de barra que contenga el extremo no soportado. Sin embargo, el equilibrio de todo el sistema debe estar siempre garantizado. En los problemas estáticamente indeterminados, las reacciones deben siempre encontrarse antes de poder calcular los pares de torsión internos. En la Sección 6-9 de este capítulo se proporciona alguna guía para el cálculo de las reacciones en problemas estáticamente indeterminados.

Por simplicidad, los miembros tratados en este capítulo serán supuestos "sin peso" o soportados a intervalos frecuentes tales que pueda no tomarse en cuenta el efecto de la flexión. De momento, las fuerzas axiales que pueden también actuar simultáneamente sobre las barras no serán consideradas.

Ejemplo 6.1

Encuentre el par de torsión interno en la sección $K-K$ para la flecha mostrada en la figura 6-1(a) sobre la que actúan los tres pares de torsión indicados.

SOLUCIÓN

El par de torsión de $30 \text{ N}\cdot\text{m}$ en C está equilibrado por los dos pares de 20 y $10 \text{ N}\cdot\text{m}$ en A y B , respectivamente. Por tanto, el cuerpo en su conjunto está en equilibrio. Luego, pasando una sección $K-K$ perpendicular al eje de la barra en *cualquier parte* entre A y B , se obtiene un diagrama de cuerpo libre de una parte de la flecha mostrado en la figura 6-1(b). Entonces, de $\sum M_x = 0$,

$$\text{par de torsión aplicado externamente} = \text{par de torsión interno}$$

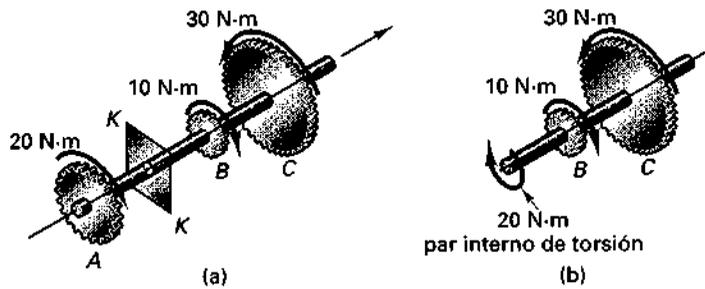


Fig. 6-1

se concluye que el par de torsión interno o resistente desarrollado en la flecha entre A y B es de $20 \text{ N}\cdot\text{m}$. Consideraciones similares conducen a la conclusión de que el par de torsión interno resistido por la flecha entre B y C es de $30 \text{ N}\cdot\text{m}$.

Puede verse intuitivamente que para un miembro de sección transversal constante, el par de torsión interno máximo causa el esfuerzo máximo e impone la condición más severa sobre el material. Por lo tanto, al investigar un miembro a torsión, varias secciones deben examinarse para determinar el par de torsión interno máximo. Una sección donde se desarrolla el máximo par de torsión interno es la *sección crítica*. En el ejemplo 6-1, la sección crítica es cualquier sección entre los puntos B y C . Si el miembro varía en tamaño, es más difícil decidir dónde el material está más sometido a un esfuerzo crítico. Varias secciones tendrán que ser investigadas y sus *esfuerzos calculados* para determinar la sección crítica. Esas situaciones son análogas al caso de una barra axialmente cargada y deben desarrollarse medios para determinar los esfuerzos como función del par de torsión interno y del tamaño del miembro. En las siguientes secciones se obtendrán las fórmulas necesarias.

En vez de flechas curvas como en la figura 6-1, se usarán también en este texto vectores de cabeza doble que obedezcan la convención de signos asociada a la regla de la mano derecha; véase la figura 6-2. El par de torsión \mathbf{T} es un vector, similar al vector fuerza \mathbf{P} encontrado en la Sección 1-4. Como la dirección de \mathbf{T} se conoce *a priori*, por simplicidad se usa su representación escalar T .

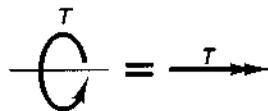


Fig. 6-2 Representaciones alternativas de un par de torsión.

Parte A TORSIÓN DE BARRAS CIRCULARES ELÁSTICAS

6-3. Hipótesis básicas para miembros circulares

Para establecer una relación entre el par de torsión interno y los esfuerzos que éste genera en miembros con *secciones transversales circulares macizas y tubulares*, es necesario plantear dos hipótesis, cuya validez se justificará después. Éstas, junto con la homogeneidad del material, son:

1. Una sección plana de material perpendicular al eje de un miembro circular permanece *plana* después de aplicados los pares de torsión (es decir, no tiene lugar ningún *alabeo* o distorsión de planos paralelos normales al eje de un miembro).¹
2. En un miembro circular sometido a un par de torsión, las *deformaciones unitarias cortantes* γ varían linealmente desde el eje central, alcanzando $\gamma_{\text{máx}}$ en la periferia. Esta hipótesis está ilustrada en la figura 6-3 y significa que un plano imaginario como el DO_1O_3C se traslada al $D'O_1O_3C$ cuando se aplica el par de torsión. Alternativamente, si un radio imaginario O_3C se considera fijo en dirección, radios similares inicialmente en O_2B y O_1D girarán a las respectivas nuevas posiciones O_2B' y O_1D' . Esos radios permanecen rectos.

Debe recalcar que estas hipótesis son válidas sólo para miembros circulares macizos y tubulares. Para este tipo de miembros, estas hipótesis funcionan tan bien que son aplicables más allá del límite de comportamiento elástico de un material. Estas hipótesis se usarán de nuevo en la sección 6-13, donde se analiza la distribución del esfuerzo más allá del límite proporcional.

3. Si la atención se confina a un material linealmente elástico, la ley de Hooke es aplicable y se infiere que el esfuerzo cortante es proporcional a la deformación unitaria cortante. Para este caso se encuentra una concordancia completa entre las cantidades determinadas experimentalmente y las calculadas con las fórmulas derivadas de esfuerzo y deformación basadas en esas hipótesis. Además, su validez puede demostrarse rigurosamente con los métodos de la teoría matemática de la elasticidad.

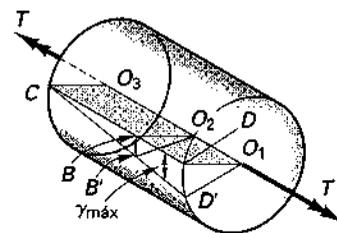


Fig. 6-3 Variación de la deformación unitaria en un miembro circular sometido a un par de torsión.

¹Para pequeñas deformaciones se supone que planos paralelos perpendiculares al eje permanecen separados una cierta distancia constante. Esto no es cierto si las deformaciones son grandes. Sin embargo, como las deformaciones usuales son muy pequeñas, los esfuerzos no considerados aquí son despreciables. Para los detalles, véase S. Timoshenko, *Strength of Materials*, 3a. ed., parte II, *Advanced Theory and Problems*, Nueva York: Van Nostrand, 1956, capítulo VI.

6-4. La fórmula de la torsión

En el caso *elástico*, con base en las hipótesis previas, como el esfuerzo es proporcional a la deformación unitaria y ésta varía linealmente desde el centro, los *esfuerzos varían linealmente desde el eje central de un miembro circular*. Los esfuerzos inducidos por las deformaciones supuestas son esfuerzos *cortantes* y se encuentran en el plano paralelo a la sección normal al eje de una barra. La variación del esfuerzo cortante se infiere directamente de la hipótesis de la deformación unitaria cortante y del uso de la ley de Hooke por cortante dada por la ecuación 5-1. Esto se ilustra en la figura 6-4. A diferencia del caso de una barra cargada axialmente, este esfuerzo *no* es de intensidad uniforme. El esfuerzo cortante máximo ocurre en los puntos más remotos del centro O y se designa por $\tau_{\text{máx}}$. Esos puntos, como los C y D en las figuras 6-3 y 6-4, se encuentran en la periferia de una sección a una distancia c del centro. Para una variación lineal del esfuerzo cortante, en *cualquier* punto arbitrario a una distancia ρ desde O , el esfuerzo cortante es $(\rho/c)\tau_{\text{máx}}$.

El par de torsión resistente puede expresarse en términos del esfuerzo una vez que la distribución de éste en una sección se ha establecido. Por equilibrio, este par de torsión resistente debe ser igual al par de torsión T aplicado externamente. Por consiguiente,

$$\int_A \underbrace{\frac{\rho}{c} \tau_{\text{máx}}}_{\text{esfuerzo}} \underbrace{dA}_{\text{área}} \rho = T$$

$\underbrace{\hspace{10em}}_{\text{fuerza}} \quad \underbrace{\hspace{10em}}_{\text{brazo}}$
 $\underbrace{\hspace{10em}}_{\text{par de torsión}}$

donde la integral suma todos los pares de torsión desarrollados sobre el corte por las fuerzas infinitesimales actuando a una distancia ρ desde el eje del miembro, O en la figura 6-4, sobre toda el área A de la sección transversal y donde T es el par de torsión resistente.

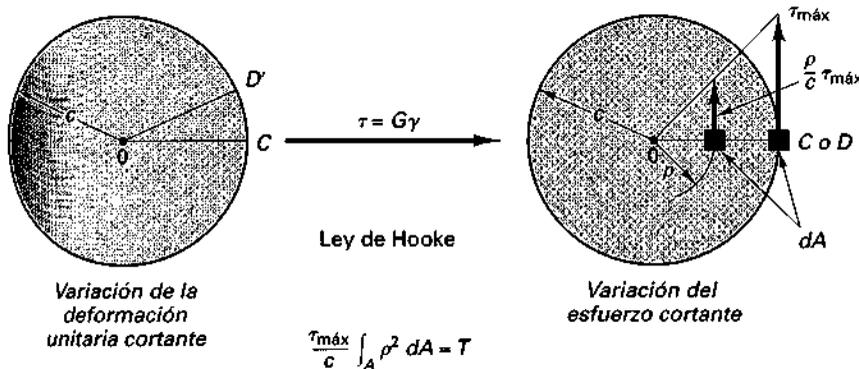


Fig. 6-4 Hipótesis de la deformación unitaria cortante que conduce a una distribución del esfuerzo cortante elástico en un miembro circular.

En una sección dada cualquiera, $\tau_{\text{máx}}$ y c son constantes; por consiguiente, la relación previa puede escribirse como

$$\frac{\tau_{\text{máx}}}{c} \int_A \rho^2 dA = T \quad (6-1)$$

Sin embargo, $\int_A \rho^2 dA$ que es el *momento polar de inercia* del área de una sección transversal, es también una constante para un área transversal particular. Será designado por I_p en este texto. Para una sección circular, $dA = 2\pi\rho d\rho$, donde $2\pi\rho$ es la circunferencia de un anillo² de radio ρ de ancho $d\rho$. Por consiguiente,

$$I_p = \int_A \rho^2 dA = \int_0^c 2\pi\rho^3 d\rho = 2\pi \left[\frac{\rho^4}{4} \right]_0^c = \frac{\pi c^4}{2} = \frac{\pi d^4}{32} \quad (6-2)$$

O bien

$$I_p = \frac{\pi c^4}{2} = \frac{\pi d^4}{32} \quad (6-2)$$

donde d es el diámetro de un eje macizo circular. Si c o d se mide en milímetros, I_p tiene unidades de mm^4 ; si se mide en pulgadas, las unidades son entonces in^4 .

Usando el símbolo I_p para el momento polar de inercia de un área circular, la ecuación 6-1 puede escribirse en forma más compacta como

$$\tau_{\text{máx}} = \frac{Tc}{I_p} \quad (6-3)$$

Esta ecuación es la bien conocida *fórmula de la torsión*³ para flechas circulares que expresa el esfuerzo cortante máximo en términos del par de torsión resistente y las dimensiones del miembro. Al aplicar esta fórmula, el par de torsión interno T puede expresarse en newton-metros, $\text{N}\cdot\text{m}$ o en libras-pulgada, c en metros o pulgadas e I_p en m^4 o en in^4 . Las unidades del esfuerzo cortante torsionante son entonces

$$\frac{[\text{N}\cdot\text{m}][\text{m}]}{[\text{m}^4]} = \left[\frac{\text{N}}{\text{m}^2} \right]$$

o *pascales* (Pa) en unidades SI, o

$$\frac{[\text{in}\cdot\text{lb}][\text{in}]}{[\text{in}^4]} = \left[\frac{\text{lb}}{\text{in}^2} \right]$$

o *psi* en unidades del sistema inglés.

²Un anillo es un área contenida entre dos círculos concéntricos.

³Fue desarrollada por Coulomb, un ingeniero francés, alrededor de 1775, en conexión con su trabajo sobre instrumentos eléctricos. Su nombre ha sido immortalizado por su uso en una unidad práctica de carga en electricidad.

Un
te τ , en

Las
ya que
bargo,
ra 6-5,
Por con

o, de o
maciza
do el d
Par
tubo, I_p

donde
ciones.
En
si, como
formac
de la le
most
más rig
esfuerz

pe
a
t
re
tu
ma
pro
pro

Fig. 6-6
terior de

Una relación más general que la ecuación 6-3 para un esfuerzo cortante τ , en cualquier punto a una distancia ρ desde el centro de una sección, es

$$\tau = \frac{\rho}{c} \tau_{\max} = \frac{T\rho}{I_p} \quad (6-4)$$

Las ecuaciones 6-3 y 6-4 son aplicables con igual rigor a tubos circulares ya que se usan aquí las mismas hipótesis de la deducción previa. Sin embargo, es necesario modificar I_p . Para un tubo, como puede verse en la figura 6-5, los límites de integración en la ecuación 6-2 se extienden de b a c . Por consiguiente, para un tubo circular,

$$I_p = \int_A \rho^2 dA = \int_b^c 2\pi\rho^3 d\rho = \frac{\pi c^4}{2} - \frac{\pi b^4}{2} \quad (6-5)$$

o, de otra manera, I_p para un tubo circular es igual a I_p para una flecha maciza usando el diámetro exterior más $-I_p$ para una flecha maciza usando el diámetro interior.

Para tubos muy delgados, si b es casi igual a c y $c - b = t$, el espesor del tubo, I_p se reduce a una expresión aproximada simple:

$$I_p \approx 2\pi R_{\text{prom}}^3 t \quad (6-6)$$

donde $R_{\text{prom}} = (b + c)/2$, que es suficientemente exacta en algunas aplicaciones.

En una barra circular hecha de dos materiales diferentes unidos entre sí, como se muestra en la figura 6-6(a), se aplica la misma hipótesis de *deformación unitaria* que para un miembro macizo. Para tal caso, por medio de la ley de Hooke, la distribución del *esfuerzo* cortante está dada por la mostrada en la figura 6-6(b). Si el módulo de cortante para el tubo exterior más rígido es G_1 y el del núcleo interior más blando es G_2 , la razón de los esfuerzos cortantes respectivos sobre un anillo de radio OB es G_1/G_2 .

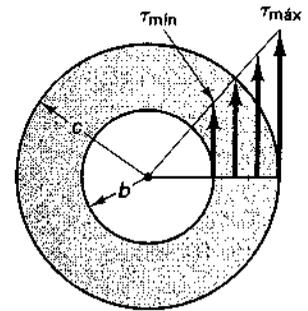


Fig. 6-5 Variación del esfuerzo en un tubo circular elástico.

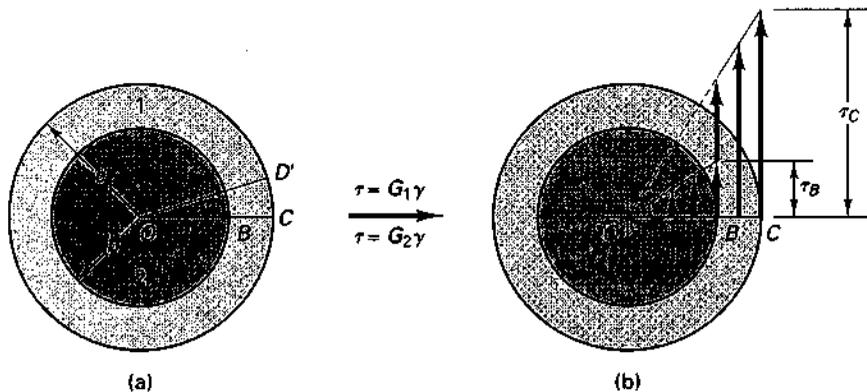


Fig. 6-6 Comportamiento elástico de un miembro circular en torsión con núcleo interior de material blando.

Resumen del procedimiento Para el problema de la torsión de flechas circulares, los *tres conceptos básicos* de la mecánica de sólidos tal como se han usado previamente, pueden resumirse de la siguiente manera:

1. *Las condiciones de equilibrio* se usan para determinar los pares de torsión resistentes internos en una sección.
2. *La geometría de la deformación* (cinemática) se postula de manera que las deformaciones unitarias cortantes varíen linealmente desde el eje de una flecha.
3. *Las propiedades del material* (relaciones constitutivas) se usan para relacionar las deformaciones unitarias cortantes con los esfuerzos cortantes y permiten el cálculo de los esfuerzos cortantes en una sección.

Sólo un caso elástico lineal —usando la ley de Hooke— se consideró en el análisis precedente. Éste se extenderá en la sección 6-13 al comportamiento no lineal del material.

Estos conceptos básicos se usan para determinar esfuerzos y ángulos de torsión de flechas circulares. Sin embargo, similar al caso de barras cargadas axialmente, grandes esfuerzos *locales* aparecen en los puntos de aplicación de pares de torsión concentrados o de cambios en sección transversal. De acuerdo con el *principio de Saint-Venant*, los esfuerzos y deformaciones unitarias son exactamente descritos por la teoría desarrollada sólo más allá de una distancia aproximadamente igual al diámetro de una flecha medida desde esas posiciones. Típicamente, los esfuerzos locales se determinan usando factores de concentración de esfuerzos.

6-5. Observaciones sobre la fórmula de la torsión

Hasta ahora, los esfuerzos cortantes dados por las ecuaciones 6-3 y 6-4 han sido considerados actuando en el plano de un corte perpendicular al eje de la flecha. Ellos actúan ahí formando un par de torsión resistente a los pares aplicados externamente. Sin embargo, para entender mejor el problema, aislamos un elemento cilíndrico infinitesimal⁴ mostrado en la figura 6-7(b).

Los esfuerzos cortantes que actúan en los planos perpendiculares al eje de la barra se conocen de la ecuación 6-4. *Sus direcciones coinciden con la dirección del par de torsión interno.* (Esto debe ser claramente visualizado por el lector.) Sobre planos paralelos adyacentes de un elemento en forma de disco, esos esfuerzos actúan en direcciones opuestas. Sin embargo, esos esfuerzos cortantes que actúan en el plano de los cortes tomados normalmente al eje de una barra *no pueden existir solos*, como se demostró en la sección 1-4. Numéricamente, esfuerzos cortantes iguales deben actuar sobre los planos axiales [como los planos *aef* y *bcg* en la figura 6-7(b)] para satisfacer los requisitos de equilibrio estático de un elemento.⁵

⁴Dos planos perpendiculares al eje de la barra, dos planos por el eje y dos superficies en radios diferentes se usan para aislar este elemento. Las propiedades de este elemento son expresables matemáticamente en coordenadas cilíndricas.

⁵Nótese que los esfuerzos cortantes máximos, como se muestran en la figura 6-7(a), actúan en realidad sobre planos perpendiculares al eje de la barra y sobre planos que pasan por el eje de la misma. La representación que se muestra es puramente esquemática. La *superficie* libre de una flecha o eje está *libre* de todo esfuerzo.

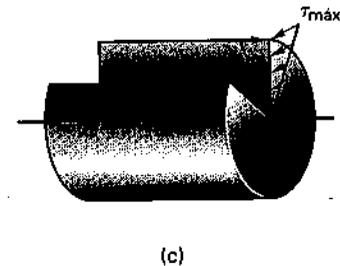
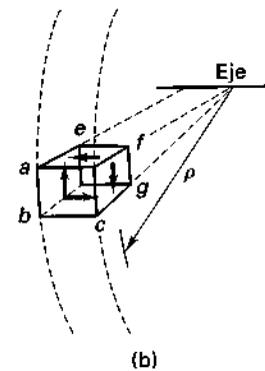
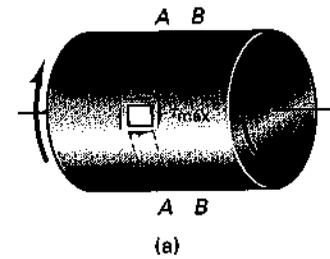


Fig. 6-7 Existencia de esfuerzos cortantes sobre planos mutuamente perpendiculares en una flecha circular sometida a torsión.

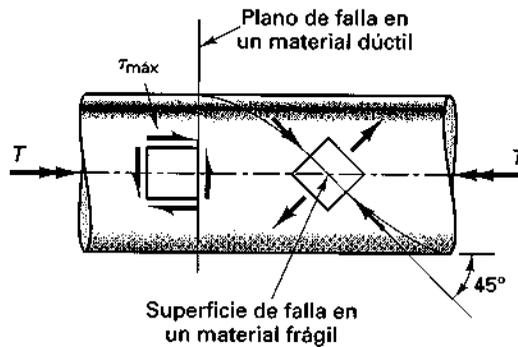


Fig. 6-8 Superficies potenciales de falla torsional en materiales dúctiles y frágiles.

Los esfuerzos cortantes que actúan en los planos axiales siguen la misma variación de intensidad que los esfuerzos cortantes en los planos perpendiculares al eje de la barra. Esta variación de los esfuerzos cortantes sobre los planos mutuamente perpendiculares se muestra en la figura 6-7(c), donde una porción de la flecha se ha suprimido para fines de ilustración.

De acuerdo con la sección 5-7, tales esfuerzos *cortantes* pueden transformarse en un sistema *equivalente* de esfuerzos *normales* actuando a 45° con los esfuerzos cortantes (véase la figura 5-11). Numéricamente, esos esfuerzos están relacionados entre sí de la siguiente manera: $\tau = \sigma_1 = -\sigma_2$. Por lo tanto, si la resistencia cortante de un material es menor que su resistencia en tensión, tiene lugar una falla cortante sobre un plano perpendicular al eje de la barra;⁶ véase la figura 6-8. Este tipo de falla ocurre gradualmente y exhibe un comportamiento *dúctil*. Alternativamente, si la proposición inversa es cierta (es decir, $\sigma_1 < \tau$), una fractura frágil es causada por los esfuerzos de tensión a lo largo de una hélice que forma un ángulo de 45° con el eje de la barra;⁶ véase la figura 6-8. En la figura 6-9 se muestra una fotografía de una fractura dúctil en una probeta de acero y en la figura 6-10 la de una fractura frágil en una de hierro fundido. Otro ejemplo de una fractura frágil, en arenisca, se muestra en la figura 6-11.

La transformación del esfuerzo visto en el análisis previo, como no depende de las propiedades del material, es también aplicable a materiales anisótropos. Por ejemplo, la madera muestra propiedades diferentes de resistencia en direcciones diferentes. La resistencia cortante de la madera en planos paralelos al grano es mucho menor que sobre planos perpendiculares al grano. Por consiguiente, aunque existen iguales intensidades del esfuerzo cortante sobre planos mutuamente perpendiculares, las flechas de madera de tamaño inadecuado fallan longitudinalmente a lo largo de planos axiales. Tales flechas son ocasionalmente usadas en las industrias de procesos.

⁶El gis ordinario se comporta en forma similar. Esto puede demostrarse en el salón de clase torciendo un pedazo de gis hasta que falle.

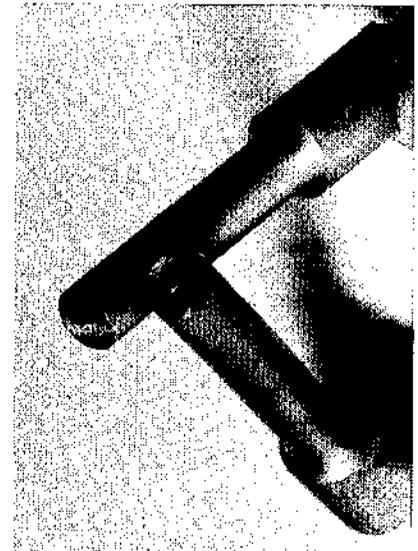


Fig. 6-9 Probeta de acero A322 fracturada por torsión.

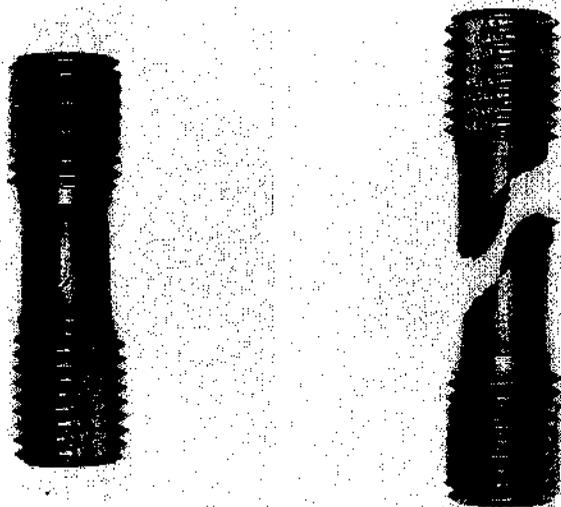


Fig. 6-10 Probeta de hierro fundido fracturada por torsión. La fotografía a la derecha muestra la probeta más ampliamente separada.



Fig. 6-11 Parte de un núcleo de una probeta de arenisca fracturada por torsión. (Experimento hecho por D. Pirtz.)

Ejemplo 6-2

Encuentre el máximo esfuerzo cortante por torsión en la flecha *AC* mostrada en la figura 6-1(a). Suponga que la flecha de *A* a *C* tiene 10 mm de diámetro.

SOLUCIÓN

Del ejemplo 6-1, sabemos que el par de torsión interno máximo resistido por esta flecha es de 30 N·m. Por consiguiente, $T = 30 \text{ N}\cdot\text{m}$ y $c = d/2 = 5 \text{ mm}$. De la ecuación 6-2,

$$I_p = \frac{\pi d^4}{32} = \frac{\pi \times 10^4}{32} = 982 \text{ mm}^4$$

y de la ecuación 6-3,

$$\tau_{\text{máx}} = \frac{Tc}{I_p} = \frac{30 \times 10^3 \times 5}{982} = 153 \text{ MPa}$$

Este esfuerzo cortante máximo a 5 mm del eje de la barra actúa en el plano de un corte perpendicular al eje de la barra y a lo largo de planos longitudinales que pasan por el eje de la barra [Fig. 6-7(c)]. Igual que para un elemento cartesiano, los esfuerzos cortantes sobre planos mutuamente perpendiculares de un elemento cilíndrico son iguales. Es conveniente no-

tar que los resultados de esta solución pueden representarse en forma matricial por dos elementos en un tensor esfuerzo como

$$\begin{pmatrix} 0 & \tau_{\text{máx}} & 0 \\ \tau_{\text{máx}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 153 & 0 \\ 153 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{MPa} \quad (6-7)$$

Éste debe contrastarse con el tensor esfuerzo totalmente poblado dado por la ecuación 1-1b.

Ejemplo 6-3

Considere un tubo largo con diámetro exterior d_o de 20 mm y con diámetro interior d_i de 16 mm que está torcido alrededor de su eje longitudinal por un par de torsión T de 40 N·m. Determine los esfuerzos cortantes en el exterior y en el interior del tubo; véase la figura 6-12.

SOLUCIÓN

De la ecuación 6-5,

$$I_p = \frac{\pi(c^4 - b^4)}{2} = \frac{\pi(d_o^4 - d_i^4)}{32} = \frac{\pi(20^4 - 16^4)}{32} = 9270 \text{ mm}^4$$

y de la ecuación 6-3,

$$\tau_{\text{máx}} = \frac{Tc}{I_p} = \frac{40 \times 10^3 \times 10}{9270} = 43.1 \text{ MPa}$$

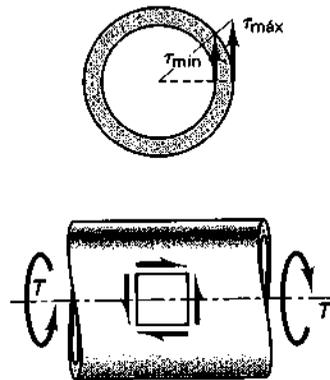


Fig. 6-12

Similarmente, de la ecuación 6-4,

$$\tau_{\min} = \frac{T\rho}{I_p} = \frac{40 \times 10^3 \times 8}{9270} = 34.5 \text{ MPa}$$

En un tubo de pared delgada, todo el material trabaja aproximadamente al mismo nivel de esfuerzo. Por tanto, los tubos de pared delgada son más eficientes en la transmisión de pares de torsión que los ejes sólidos. Estos tubos son también útiles para crear un "campo" esencialmente uniforme de esfuerzo cortante puro necesario para establecer relaciones τ - γ (Sección 5-2). Sin embargo, para evitar el pandeo local, el espesor de la pared no debe ser excesivamente delgado.

6-6. Diseño de miembros circulares en torsión por resistencia

En el diseño de miembros por resistencia deben seleccionarse esfuerzos cortantes permisibles. Estos dependen de la información disponible de los experimentos y de la aplicación pretendida. La información exacta sobre la capacidad de los materiales para resistir esfuerzos cortantes proviene de pruebas en tubos de pared delgada. Sistemas de ejes sólidos se emplean en pruebas de rutina. Además, como los miembros a torsión son a menudo usados en equipo de transmisión de potencia, se llevan también a cabo muchos experimentos de fatiga. La resistencia por cortante de los materiales dúctiles es, usualmente, sólo cerca de la mitad de su resistencia por tensión. El código de la ASME (Sociedad Americana de Ingenieros Mecánicos) sobre prácticas recomendadas para la transmisión de potencia por flechas, da un valor permisible de 8000 psi para el esfuerzo cortante en aceros no especificados y 0.3 de fluencia o de 0.18 para la resistencia última en cortante, rigiendo la más pequeña.⁷ En los diseños prácticos, las cargas aplicadas repentinamente o las cargas de impacto requieren de una consideración especial. (Véase la Sección 6-11.)

Después de que el par de torsión que será transmitido mediante una flecha se ha determinado, y que el esfuerzo cortante máximo permisible se ha seleccionado, de acuerdo con la ecuación 6-3, las proporciones de un miembro están dadas por

$$\frac{I_p}{c} = \frac{T}{\tau_{\max}} \quad (6-8)$$

donde I_p/c es el *parámetro* del que depende la resistencia elástica de una flecha. Para una barra axialmente cargada, tal parámetro es el área transversal de un miembro. Para una *flecha maciza*, $I_p/c = \pi c^3/2$, donde c es el radio externo. Usando esta expresión y la ecuación 6-8, el radio requerido de una flecha puede determinarse. Cualquier número de flechas *tubulares*

⁷Recomendaciones para otros materiales pueden encontrarse en libros sobre diseño de máquinas. Por ejemplo, véase J. E. Shigley, *Mechanical Engineering Design*, 3a. ed., Nueva York: McGraw-Hill, 1977, o R. C. Juvinall, *Stress, Strain, and Strength*, Nueva York: McGraw-Hill, 1967.

puede escogerse para satisfacer la ecuación 6-8 variando la razón del radio externo al radio interno, c/b , para proporcionar el valor requerido de I_p/c .

El lector debe notar cuidadosamente que grandes esfuerzos locales se desarrollan por lo general en cambios de sección transversal y en ranuras para cuñas y chaveteros, donde el par es transmitido realmente. Estos temas, de importancia crítica en el diseño de flechas rotatorias, serán analizados brevemente en la siguiente sección.

Los miembros sometidos a pares de torsión son ampliamente usados como flechas giratorias para la transmisión de potencia. Para referencia futura, se obtendrá una fórmula para la conversión de caballos de potencia, que es la unidad convencional usada en la industria, en par de torsión actuando en la flecha. Por definición, 1 hp efectúa el trabajo de 745.7 N·m/s. Un N·m/s se denomina watt (W) en el sistema de unidades SI. Así entonces, 1 hp puede convertirse en 745.7 W. Se recordará de la dinámica que la potencia es igual al par de torsión multiplicado por el ángulo, medido en radianes, que la flecha gira por unidad de tiempo. Para una flecha que gira con frecuencia de f Hz,⁸ el ángulo es $2\pi f$ rad/s. Por consiguiente, si una flecha transmite un par de torsión constante T medido en N·m, efectúa un trabajo por segundo de $2\pi f T$ N·m. Igualando esto a los caballos de potencia suministrados,

$$\text{hp} \times 745.7 = 2\pi f T \text{ [N} \cdot \text{m/s]}$$

o

$$T = \frac{119 \times \text{hp}}{f} \text{ [N} \cdot \text{m]} \quad (6-9)$$

o

$$T = \frac{159 \times \text{kW}}{f} \text{ [N} \cdot \text{m]} \quad (6-10)$$

donde f es la frecuencia en hertz de la flecha al transmitir el caballaje hp o los kilowatts kW. Esas ecuaciones convierten la potencia aplicada en par de torsión aplicado.

En el sistema inglés, 1 hp efectúa un trabajo de 550 ft-lb/s o $550 \times 12 \times 60$ in-lb/min. Si la flecha gira a N rpm (revoluciones por minuto), puede obtenerse una ecuación similar a las antes dadas:

$$T = \frac{63,000 \times \text{hp}}{N} \text{ [in-lb]} \quad (6-11)$$

Ejemplo 6-4

Seleccione una flecha maciza para un motor de 10 hp que opera a 30 Hz. El esfuerzo cortante máximo está limitado a 55 MPa.

⁸1 hertz (Hz) = 1 ciclo por segundo (cps.)

SOLUCIÓN

De la ecuación 6-9,

$$T = \frac{119 \times \text{hp}}{f} = \frac{119 \times 10}{30} = 39.7 \text{ N} \cdot \text{m}$$

y de la ecuación 6-8,

$$\frac{I_p}{c} = \frac{T}{\tau_{\text{máx}}} = \frac{39.7 \times 10^3}{55} = 722 \text{ mm}^3$$

$$\frac{I_p}{c} = \frac{\pi c^3}{2} \quad \text{o} \quad c^3 = \frac{2 I_p}{\pi c} = \frac{2 \times 722}{\pi} = 460 \text{ mm}^3$$

Por consiguiente, $c = 7.72 \text{ mm}$ o $d = 2c = 15.4 \text{ mm}$.

Por razones prácticas, probablemente se seleccionaría una flecha de 16 mm de diámetro.

Ejemplo 6-5

Seleccione flechas macizas para transmitir cada una 150 kW sin exceder un esfuerzo cortante de 70 MPa. Una de esas flechas opera a una frecuencia de 0.30 Hz y la otra a una frecuencia de 300 Hz.

SOLUCIÓN

El subíndice 1 se aplica a la flecha de baja velocidad y el 2 a la flecha de alta velocidad. De la ecuación 6-10,

$$T_1 = \frac{159 \times \text{kW}}{f_1} = \frac{159 \times 150}{0.30} = 79,500 \text{ N} \cdot \text{m}$$

Similarmente,

$$T_2 = 79.5 \text{ N} \cdot \text{m}$$

De la ecuación 6-8,

$$\frac{I_{p1}}{c} = \frac{T_1}{\tau_{\text{máx}}} = \frac{79,500}{70} = 1.14 \times 10^6 \text{ mm}^3$$

$$\frac{I_{p1}}{c} = \frac{\pi d_1^3}{16} \quad \text{o} \quad d_1^3 = \frac{16}{\pi} (1.14 \times 10^6) = 5.81 \times 10^6 \text{ mm}^3$$

Por consiguiente,

$$d_1 = 180 \text{ mm} \quad \text{y} \quad d_2 = 18 \text{ mm}$$

Este ejemplo ilustra la tendencia moderna a usar máquinas de alta velocidad en el equipo mecánico. La diferencia en tamaño de las dos flechas es

sorp
usar

6-7

Las
bula
tran
cons
lucio
dián
gran
loca
dete
canc
máx
tene
aná
mie
de l
para
figu

K

Fig.
dos

tions

sorprendente. Ahorros adicionales en el peso de material pueden lograrse usando tubos huecos.

6-7. Concentraciones de esfuerzo

Las ecuaciones 6-3, 6-4 y 6-8 se aplican sólo a flechas circulares macizas y tubulares mientras el material se comporta elásticamente. Además, las áreas transversales a lo largo de la flecha deben permanecer razonablemente constantes. Si el diámetro varía *gradualmente*, las ecuaciones previas dan soluciones satisfactorias. Por otra parte, para flechas escalonadas, donde los diámetros de las porciones adyacentes cambian abruptamente, tienen lugar grandes perturbaciones de los esfuerzos cortantes. Altos esfuerzos cortantes *locales* ocurren en puntos alejados del centro de la flecha. Los métodos para determinar esas concentraciones locales de esfuerzos están más allá del alcance de este texto. Sin embargo, formando una razón del esfuerzo cortante máximo verdadero al esfuerzo máximo dado por la ecuación 6-3, puede obtenerse un factor de concentración de esfuerzos torsionantes. Un método análogo se usó para obtener los factores de concentración de esfuerzos en miembros axialmente cargados (Sección 3-3). Esos factores dependen sólo de la geometría de un miembro. Los factores de concentración de esfuerzos para varias proporciones de flechas redondas escalonadas se muestran en la figura 6-13.⁹

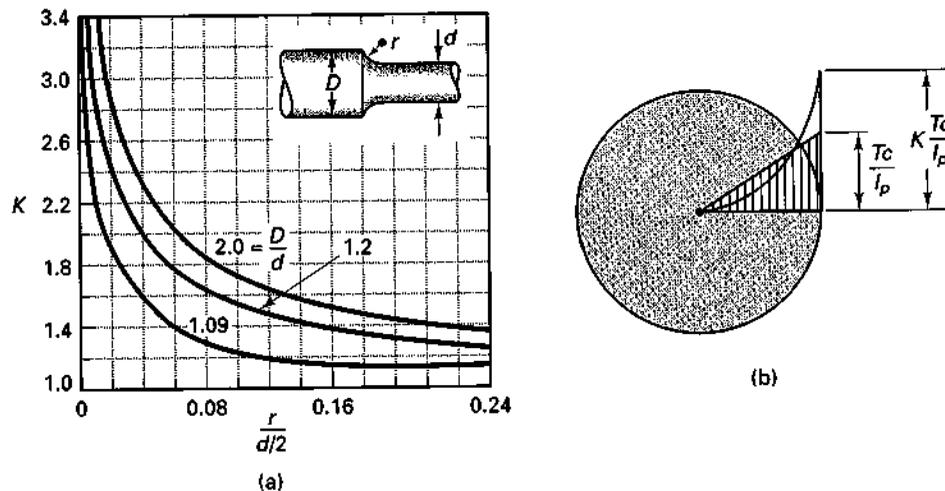


Fig. 6-13 (a) Factores de concentración de esfuerzos torsionales en flechas circulares de dos diámetros. (b) Incremento del esfuerzo en un filete.

⁹Esta figura está adaptada de un artículo por L. S. Jacobsen, "Torsional-Stress Concentrations in Shafts of Circular and Variable Diameter", *Trans. ASME*, 47, 1925, pág. 632.

Para obtener el esfuerzo real en una discontinuidad geométrica de una flecha escalonada, se selecciona una curva para una D/d particular en la figura 6-13. Luego, correspondiente a la razón $r/(d/2)$, se lee en la curva el factor K de concentración de esfuerzos. Finalmente, de la definición de K , se obtiene el esfuerzo cortante máximo real a partir del esfuerzo modificado dado por la ecuación 6-3:

$$\tau_{\max} = K \frac{Tc}{I_p} \quad (6-12)$$

donde el esfuerzo cortante Tc/I_p se determina para la flecha más pequeña.

Un estudio de los factores de concentraciones de esfuerzos mostrados en la figura 6-13 evidencia la necesidad de usar un filete de buen tamaño de radio r en todas las secciones donde se tiene una transición en el diámetro de la flecha.

Incrementos considerables de esfuerzos se tienen también en agujeros para aceite y en chaveteros para unir poleas y engranes a la flecha. Una flecha preparada para una chaveta, figura 6-14, deja de ser un miembro circular. Sin embargo, de acuerdo con los procedimientos sugeridos por la ASME, en el diseño ordinario, los cálculos de flechas con chaveteros pueden llevarse a cabo usando la ecuación 6-3 o la 6-8, pero el esfuerzo cortante permisible debe reducirse 25%. Esto compensa, presumiblemente, la concentración de esfuerzos, la reducción del área transversal y la carga cíclica.

Debido a la respuesta inelástica o no lineal en los materiales reales, por razones análogas a las señaladas en la Sección 3-3, las concentraciones teóricas de esfuerzos basadas en el comportamiento del material elástico lineal tienden a ser algo grandes.

6-8. Ángulo de torsión de miembros circulares

En esta sección veremos un método para determinar el ángulo de torsión en flechas *elásticas* circulares macizas y tubulares sometidas a carga torsionante. El interés en este problema es por lo menos triple. Primero, es importante predecir el giro de una flecha ya que a veces no es suficiente diseñar sólo por resistencia: las deformaciones no deben ser excesivas. Luego, las magnitudes de las rotaciones de las flechas se necesitan en el análisis de vibraciones torsionantes de maquinaria. Finalmente, la rotación torsionante de los miembros es necesaria al tratar con problemas estáticamente indeterminados de torsión.

De acuerdo con la hipótesis 1 establecida en la sección 6-3, los planos perpendiculares al eje de una barra circular no se alabean. Los elementos de una flecha experimentan deformaciones del tipo mostrado en la figura 6-15(b). El elemento sombreado se muestra en su forma no deformada en la figura 6-15(a). Para tal flecha, se muestra aislado un elemento típico de longitud dx en la figura 6-16 similar a la figura 6-3.

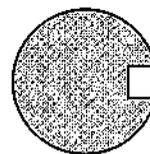


Fig. 6-14 Flecha circular con un chavetero.

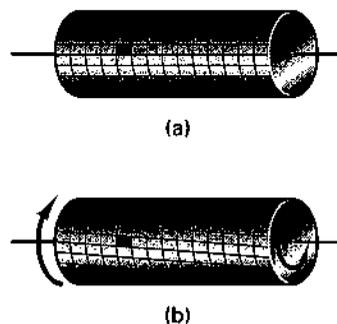


Fig. 6-15 Flecha circular (a) antes y (b) después de la aplicación del par de torsión.

En el elemento mostrado, una línea sobre su superficie como la CD es inicialmente paralela al eje de la flecha. Después de aplicado el par, ella toma una nueva posición CD' . Al mismo tiempo, en virtud de la hipótesis 2 de la sección 6-3, el radio OD permanece recto y gira un pequeño ángulo $d\phi$ hasta la nueva posición OD' .

Denotando el pequeño ángulo DCD' por $\gamma_{\text{máx}}$, se tienen por geometría dos expresiones alternativas para el arco DD' :

$$\text{arco } DD' = \gamma_{\text{máx}} dx \quad \text{o} \quad \text{arco } DD' = d\phi c$$

donde ambos ángulos son pequeños y se miden en radianes. Por consiguiente,

$$\gamma_{\text{máx}} dx = d\phi c \quad (6-13)$$

El $\gamma_{\text{máx}}$ se aplica sólo en la zona de un "tubo" infinitesimal de esfuerzo cortante máximo constante $\tau_{\text{máx}}$. Considerando una respuesta elástica lineal, la ley de Hooke resulta aplicable. Por lo tanto, de acuerdo con la ecuación 5-1, el ángulo $\gamma_{\text{máx}}$ es proporcional a $\tau_{\text{máx}}$ (es decir, $\gamma_{\text{máx}} = \tau_{\text{máx}}/G$). Además, por la ecuación 6-3, $\tau_{\text{máx}} = Tc/I_p$. Por consiguiente, $\gamma_{\text{máx}} = Tc/(I_p G)$.¹⁰ Sustituyendo la última expresión en la ecuación 6-13 y simplificando, se obtiene la ecuación diferencial gobernante para el ángulo de torsión:

$$\frac{d\phi}{dx} = \frac{T}{I_p G} \quad \text{o} \quad d\phi = \frac{T dx}{I_p G} \quad (6-14)$$

Esto da el ángulo relativo de torsión de dos secciones adyacentes separadas una distancia infinitesimal dx . Para encontrar el ángulo total de giro ϕ entre dos secciones cualesquiera A y B sobre una flecha separadas una distancia finita, deben sumarse las rotaciones de todos los elementos. Por consiguiente, una expresión general para el ángulo de torsión entre dos secciones cualesquiera de una flecha de material elástico lineal es

$$\phi = \phi_B - \phi_A = \int_A^B d\phi = \int_A^B \frac{T_x dx}{I_{px} G} \quad (6-15)$$

donde ϕ_B y ϕ_A son, respectivamente, las rotaciones globales de la flecha en los extremos B y A . La rotación en A no tiene que ser necesariamente igual a cero. En esta ecuación, el par de torsión interno T_x , el momento polar de inercia I_{px} , así como G , pueden variar a lo largo de la longitud de la flecha. En tales casos, $T_x = T(x)$, $I_{px} = I_p(x)$ y $G = G(x)$. El sentido del ángulo de giro ϕ coincide con el sentido del par de torsión aplicado T .

La ecuación 6-15 es válida para flechas macizas y huecas, lo que se infiere de las hipótesis usadas en su deducción. El ángulo ϕ se mide en radianes. Note la gran similitud de esta relación con la ecuación 3-3 para la deformación de barras axialmente. Los siguientes tres ejemplos ilustran aplicaciones de estos conceptos.

¹⁰El razonamiento anterior puede llevarse a cabo en términos de cualquier γ , que progresivamente se vuelve más pequeña cuando se acerca al eje de la barra. La única diferencia en la deducción consiste en tomar un arco correspondiente a DD' a una distancia ρ desde el centro de la flecha y usar $T\rho/I_p$, en vez de Tc/I_p para τ .

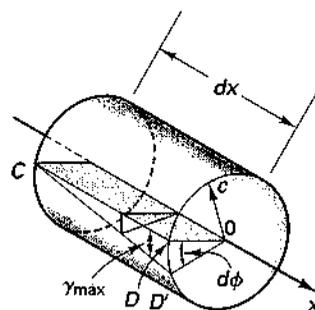


Fig. 6-16 Deformación de un elemento de barra circular debido a un par de torsión.

Ejemplo 6-6

Encuentre la rotación relativa de la sección $B-B$ con respecto a la sección $A-A$ de la flecha elástica maciza mostrada en la figura 6-17 cuando se transmite por ella un par de torsión constante T . El momento polar de inercia de su sección transversal I_p es constante.

SOLUCIÓN

En este caso, $T_x = T$ e I_p es constante; por tanto, de la ecuación 6-15,

$$\phi = \int_A^B \frac{T_x dx}{I_p G} = \int_0^L \frac{T dx}{I_p G} = \frac{T}{I_p G} \int_0^L dx = \frac{TL}{I_p G}$$

Es decir,

$$\phi = \frac{TL}{I_p G} \quad (6-16)$$

Al aplicar la ecuación 6-16 nótese particularmente que el ángulo ϕ se expresa en *radianes*. Obsérvese también la gran similitud de esta relación con la ecuación 3-4, $\Delta = PL/AE$, para barras cargadas axialmente. Aquí, $\phi \Leftrightarrow \Delta$, $T \Leftrightarrow P$, $I_p \Leftrightarrow A$ y $G \Leftrightarrow E$. Análogamente a la ecuación 3-4, la ecuación 6-16 puede reescribirse para expresar la *constante torsionante del resorte* o *rigidez torsionante* k , como

$$k_t = \frac{T}{\phi} = \frac{I_p G}{L} \left[\frac{\text{in}\cdot\text{lb}}{\text{rad}} \right], \quad \text{o} \quad \left[\frac{\text{N}\cdot\text{m}}{\text{rad}} \right] \quad (6-17)$$

Esta constante representa el par de torsión requerido para generar una rotación de 1 radián (es decir, $\phi = 1$). Depende sólo de las propiedades del material y del tamaño del miembro. Igual que para barras cargadas axialmente, los miembros sometidos a torsión pueden visualizarse como resortes; véase la figura 6-18.

El recíproco de k_t define la *flexibilidad torsionante* f_t . Por tanto, para una flecha circular maciza o hueca,

$$f_t = \frac{1}{k_t} = \frac{L}{I_p G} \left[\frac{\text{rad}}{\text{in}\cdot\text{lb}} \right] \quad \text{o} \quad \left[\frac{\text{rad}}{\text{N}\cdot\text{m}} \right] \quad (6-18)$$

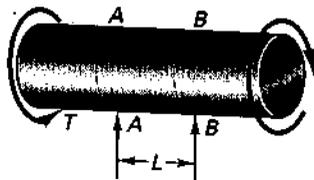


Fig. 6-17

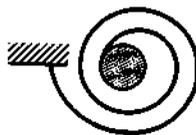


Fig. 6-18 Representación esquemática de un resorte de torsión.

Esta constante define la rotación resultante de la aplicación de un par de torsión unitario (es decir, $T = 1$). Al multiplicarla por el par de torsión T , se obtiene la ecuación 6-16.

Si en el análisis una flecha debe subdividirse en varias regiones, deben adscribirse subíndices apropiados identificadores a las definiciones dadas por las ecuaciones 6-17 y 6-18. Por ejemplo, para el i -ésimo segmento de una barra, puede escribirse $(k_i)_i = I_p G_i / L_i$ y $(f_i)_i = L_i / I_p G_i$.

Las ecuaciones previas son ampliamente usadas en el análisis de vibraciones mecánicas de flechas de transmisión, incluidos los cigüeñales.¹¹ Esas ecuaciones son útiles también para resolver problemas estáticamente indeterminados, que serán considerados en la próxima sección. Esas ecuaciones se requieren en el diseño de miembros por rigidez torsionante cuando es esencial limitar la cantidad de rotación torsionante. Para tales aplicaciones, note que I_p en vez de I_p/c , usado en el cálculo de resistencia, es el parámetro gobernante. En problemas de barras cargadas axialmente, el área A de la sección transversal sirve para ambos propósitos.

Finalmente, debe notarse que como en una prueba de torsión ϕ , T , L e I_p pueden medirse o calcularse a partir de las dimensiones de la probeta, el módulo de elasticidad por cortante para aquella puede determinarse con la ecuación 6-16 ya que $G = TL / I_p \phi$.

Ejemplo 6-7

Considere la flecha escalonada mostrada en la figura 6-19(a) unida rígidamente a un muro en E y determine el ángulo de torsión en el extremo A cuando se aplican los dos pares de torsión en B y D . Suponga un módulo de cortante $G = 80$ GPa, que es un valor típico para los aceros.

SOLUCIÓN

Excepto por la diferencia en parámetros, la solución de este problema es muy similar a la del ejemplo 3-2 para una barra cargada axialmente. Primero, el par de torsión en E se determina para asegurar el equilibrio. Luego se examinan pares de torsión en secciones arbitrarias, aislando el segmento izquierdo de una flecha, como el mostrado en la figura 6-19(b). Si el sentido del vector par de torsión T coincide con el del eje x positivo, se toma como positivo o viceversa. Esto conduce a la conclusión de que entre A y B no hay par de torsión, mientras que entre B y D el par es $+150$ N·m. El par entre D y E es $+1150$ N·m. El diagrama de par torsionante está dibujado en la figura 6-19(c). Los pares de torsión internos, identificados por subíndices para los varios segmentos de flecha, son

$$T_{AB} = 0, T_{BD} = T_{BC} = T_{CD} = 150 \text{ N} \cdot \text{m}, \text{ y } T_{DE} = 1150 \text{ N} \cdot \text{m}$$

¹¹Según S. P. Timoshenko, *Vibration Problems in Engineering*, 2a. ed., Nueva York: Van Nostrand, 1937, en 1902, H. Frahm —un ingeniero alemán— fue el primero en reconocer y estudiar este importante problema.

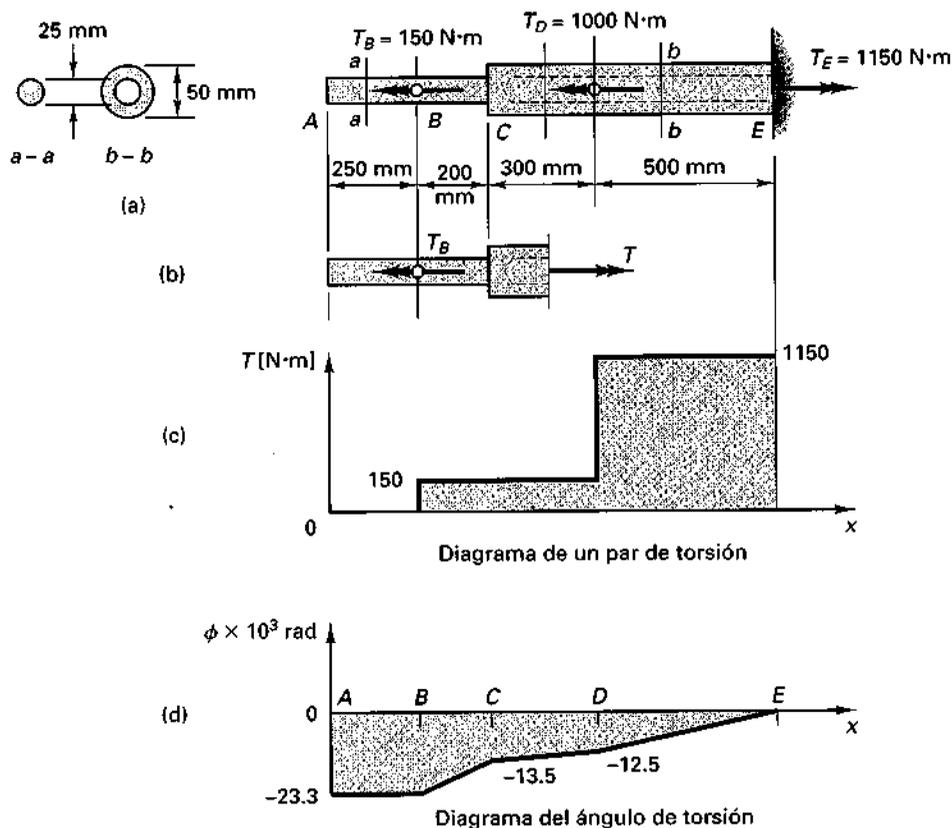


Fig. 6-19

Los momentos polares de inercia para los dos tipos de secciones transversales que ocurren en este problema se encuentran usando las ecuaciones 6-2 y 6-5; se obtiene

$$(I_p)_{AB} = (I_p)_{BC} = \frac{\pi d^4}{32} = \frac{\pi \times 25^4}{32} = 38.3 \times 10^3 \text{ mm}^4$$

$$(I_p)_{CD} = (I_p)_{DE} = \frac{\pi}{32}(d_o^4 - d_i^4) = \frac{\pi}{32}(50^4 - 25^4) = 575 \times 10^3 \text{ mm}^4$$

Para encontrar el ángulo de torsión del extremo A, se aplica la ecuación 6-15 a cada segmento y los resultados se suman. Los límites de integración para los segmentos ocurren en puntos donde los valores de T o I_p cambian abruptamente.

$$\phi = \int_A^E \frac{T_x dx}{I_{px} G} = \int_A^B \frac{T_{AB} dx}{(I_p)_{AB} G} + \int_B^C \frac{T_{BC} dx}{(I_p)_{BC} G} + \int_C^D \frac{T_{CD} dx}{(I_p)_{CD} G} + \int_D^E \frac{T_{DE} dx}{(I_p)_{DE} G}$$

En el último grupo de integrales las T e I_p son constantes entre los límites considerados, de modo que cada integral conduce a una solución conocida, dada por la ecuación 6-16. Por lo tanto,

$$\begin{aligned}\phi &= \sum_i \frac{T_i L_i}{(I_p)_i G_i} = \frac{T_{AB} L_{AB}}{(I_p)_{AB} G} + \frac{T_{BC} L_{BC}}{(I_p)_{BC} G} + \frac{T_{CD} L_{CD}}{(I_p)_{CD} G} + \frac{T_{DE} L_{DE}}{(I_p)_{DE} G} \\ &= 0 + \frac{150 \times 10^3 \times 200}{38.3 \times 10^3 \times 80 \times 10^3} + \frac{150 \times 10^3 \times 300}{575 \times 10^3 \times 80 \times 10^3} \\ &\quad + \frac{1150 \times 10^3 \times 500}{575 \times 10^3 \times 80 \times 10^3} \\ &= 0 + 9.8 \times 10^{-3} + 1.0 \times 10^{-3} + 12.5 \times 10^{-3} = 23.3 \times 10^{-3} \text{ rad}\end{aligned}$$

Como puede verse en las ecuaciones precedentes, los ángulos de torsión para los cuatro segmentos de flecha comenzando por la izquierda son, 0 rad, 9.8×10^{-3} rad, 1.0×10^{-3} rad, y 12.5×10^{-3} . Sumando estas cantidades, comenzando en *A*, para obtener la función para el ángulo de torsión a lo largo de la flecha, nos da la línea quebrada de *A* a *E*, mostrada en la figura 6-19(d). Como no puede ocurrir torsión en el extremo empotrado *E*, esta función debe ser cero en *E*, como lo requiere la condición de frontera. Por lo tanto, de acuerdo con la convención de signos adoptada, el ángulo de torsión en *A* es de -23.3×10^{-3} rad en el sentido de los pares de torsión aplicados.

Sin duda ocurren perturbaciones locales en los esfuerzos y deformaciones unitarias en las posiciones de los pares de torsión concentrados y en los cambios de tamaño de la flecha, así como en el extremo empotrado. Sin embargo, esos son efectos locales que tienen influencia limitada sobre el comportamiento global de la flecha.

Ejemplo 6-8

Determine la rigidez torsionante k_r del buje de hule mostrado en la figura 6-20. Suponga que el hule está adherido a la flecha de acero y al tubo exterior también de acero que está unido al bastidor de una máquina. El módulo cortante del hule es G . No tome en cuenta las deformaciones en las partes metálicas del conjunto.

SOLUCIÓN

Debido a la simetría axial del problema, sobre cada superficie cilíndrica imaginaria de hule de radio r , el par de torsión aplicado T es resistido por esfuerzos cortantes constantes τ . El área de la superficie imaginaria es $2\pi rL$. Con base en esto, la ecuación de equilibrio para el par de torsión aplicado T y el par de torsión resistente desarrollado por los esfuerzos cortantes τ actuando en un radio r es

$$T = (2\pi rL)\tau r \quad [\text{área} \times \text{esfuerzo} \times \text{brazo}]$$

De esta relación, $\tau = T/2\pi r^2 L$. Por consiguiente, usando la ley de Hooke, dada por la ecuación 5-1, la deformación unitaria cortante γ puede determinarse para un tubo infinitesimal de radio r y espesor dr , figura 6-20(a), de las relaciones siguientes:

$$\gamma = \frac{\tau}{G} = \frac{T}{2\pi L G r^2}$$

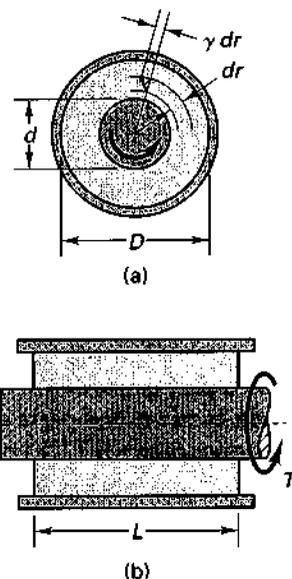


Fig. 6-20

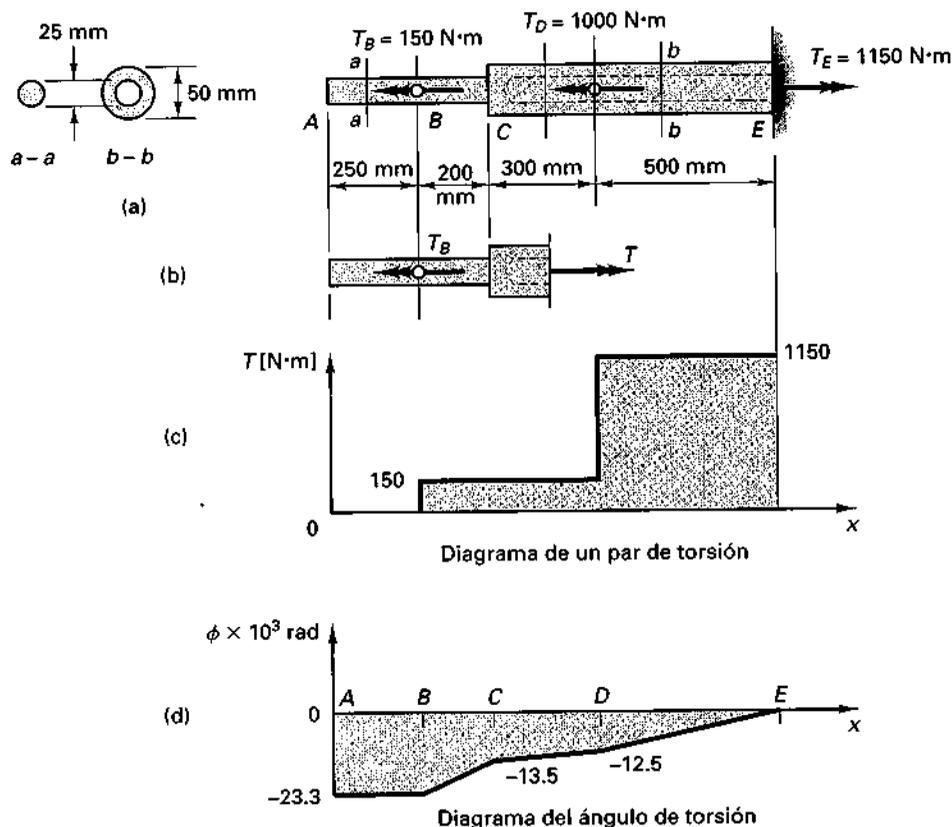


Fig. 6-19

Los momentos polares de inercia para los dos tipos de secciones transversales que ocurren en este problema se encuentran usando las ecuaciones 6-2 y 6-5; se obtiene

$$(I_p)_{AB} = (I_p)_{BC} = \frac{\pi d^4}{32} = \frac{\pi \times 25^4}{32} = 38.3 \times 10^3 \text{ mm}^4$$

$$(I_p)_{CD} = (I_p)_{DE} = \frac{\pi}{32}(d_o^4 - d_i^4) = \frac{\pi}{32}(50^4 - 25^4) = 575 \times 10^3 \text{ mm}^4$$

Para encontrar el ángulo de torsión del extremo A , se aplica la ecuación 6-15 a cada segmento y los resultados se suman. Los límites de integración para los segmentos ocurren en puntos donde los valores de T o I_p cambian abruptamente.

$$\phi = \int_A^E \frac{T_x dx}{I_{px} G} = \int_A^B \frac{T_{AB} dx}{(I_p)_{AB} G} + \int_B^C \frac{T_{BC} dx}{(I_p)_{BC} G} + \int_C^D \frac{T_{CD} dx}{(I_p)_{CD} G} + \int_D^E \frac{T_{DE} dx}{(I_p)_{DE} G}$$

En el último grupo de integrales las T e I_p son constantes entre los límites considerados, de modo que cada integral conduce a una solución conocida, dada por la ecuación 6-16. Por lo tanto,

Com
ra lo
9.8 x
menz
de la
Com
be se
acuer
de -
Si
nes u
camb
emba
comp

Ejem

Deter
6-20.
rior ta
lo con
partes

SOLU
Debido
imagin
esfuer
 $2\pi rL$
aplica
tantes

De es
dada p
minar
de las

$$\begin{aligned}\phi &= \sum_i \frac{T_i L_i}{(I_p)_i G} = \frac{T_{AB} L_{AB}}{(I_p)_{AB} G} + \frac{T_{BC} L_{BC}}{(I_p)_{BC} G} + \frac{T_{CD} L_{CD}}{(I_p)_{CD} G} + \frac{T_{DE} L_{DE}}{(I_p)_{DE} G} \\ &= 0 + \frac{150 \times 10^3 \times 200}{38.3 \times 10^3 \times 80 \times 10^3} + \frac{150 \times 10^3 \times 300}{575 \times 10^3 \times 80 \times 10^3} \\ &\quad + \frac{1150 \times 10^3 \times 500}{575 \times 10^3 \times 80 \times 10^3} \\ &= 0 + 9.8 \times 10^{-3} + 1.0 \times 10^{-3} + 12.5 \times 10^{-3} = 23.3 \times 10^{-3} \text{ rad}\end{aligned}$$

Como puede verse en las ecuaciones precedentes, los ángulos de torsión para los cuatro segmentos de flecha comenzando por la izquierda son, 0 rad , $9.8 \times 10^{-3} \text{ rad}$, $1.0 \times 10^{-3} \text{ rad}$, y 12.5×10^{-3} . Sumando estas cantidades, comenzando en A , para obtener la función para el ángulo de torsión a lo largo de la flecha, nos da la línea quebrada de A a E , mostrada en la figura 6-19(d). Como no puede ocurrir torsión en el extremo empotrado E , esta función debe ser cero en E , como lo requiere la condición de frontera. Por lo tanto, de acuerdo con la convención de signos adoptada, el ángulo de torsión en A es de $-23.3 \times 10^{-3} \text{ rad}$ en el sentido de los pares de torsión aplicados.

Sin duda ocurren perturbaciones locales en los esfuerzos y deformaciones unitarias en las posiciones de los pares de torsión concentrados y en los cambios de tamaño de la flecha, así como en el extremo empotrado. Sin embargo, esos son efectos locales que tienen influencia limitada sobre el comportamiento global de la flecha.

Ejemplo 6-8

Determine la rigidez torsionante k_τ del buje de hule mostrado en la figura 6-20. Suponga que el hule está adherido a la flecha de acero y al tubo exterior también de acero que está unido al bastidor de una máquina. El módulo cortante del hule es G . No tome en cuenta las deformaciones en las partes metálicas del conjunto.

SOLUCIÓN

Debido a la simetría axial del problema, sobre cada superficie cilíndrica imaginaria de hule de radio r , el par de torsión aplicado T es resistido por esfuerzos cortantes constantes τ . El área de la superficie imaginaria es $2\pi rL$. Con base en esto, la ecuación de equilibrio para el par de torsión aplicado T y el par de torsión resistente desarrollado por los esfuerzos cortantes τ actuando en un radio r es

$$T = (2\pi rL)\tau r \quad [\text{área} \times \text{esfuerzo} \times \text{brazo}]$$

De esta relación, $\tau = T/2\pi r^2 L$. Por consiguiente, usando la ley de Hooke, dada por la ecuación 5-1, la deformación unitaria cortante γ puede determinarse para un tubo infinitesimal de radio r y espesor dr , figura 6-20(a), de las relaciones siguientes:

$$\gamma = \frac{\tau}{G} = \frac{T}{2\pi L G r^2}$$

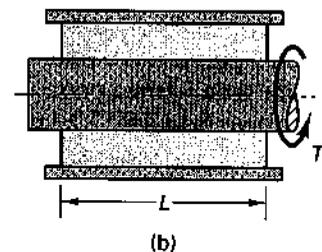
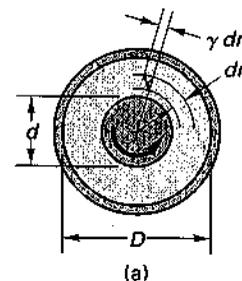


Fig. 6-20

Esta deformación unitaria cortante en un tubo infinitesimal permite que la flecha gire un ángulo infinitesimal $d\phi$. Como en el límite $r + dr$ es igual a r , la magnitud de este ángulo es

$$d\phi = \frac{\gamma dr}{r}$$

La rotación total ϕ de la flecha es una integral, sobre el buje de hule, de esas rotaciones infinitesimales; es decir,

$$\phi = \int d\phi = \frac{T}{2\pi LG} \int_{d/2}^{D/2} \frac{dr}{r^3} = \frac{T}{\pi LG} \left(\frac{1}{d^2} - \frac{1}{D^2} \right)$$

de donde

$$k_t = \frac{T}{\phi} = \frac{\pi LG}{1/d^2 - 1/D^2} \quad (6-19)$$

6-9. Problemas estáticamente indeterminados

El análisis de miembros estáticamente indeterminados sometidos a torsión es análogo al procedimiento analizado antes en el capítulo 3 en conexión con barras cargadas axialmente. Al considerar problemas *linealmente elásticos* con un grado de indeterminación *externa* (es decir, casos donde se tienen dos reacciones), el método de las *fuerzas* (flexibilidades) es particularmente apropiado. Tales problemas se reducen a estáticamente determinados retirando una de las reacciones redundantes y calculando la rotación ϕ_0 en el soporte liberado. Las condiciones requeridas de frontera son entonces restauradas torciendo el miembro en el extremo liberado un ángulo ϕ_1 tal que

$$\phi_0 + \phi_1 = 0 \quad (6-20)$$

Tales problemas son sencillos de analizar sin importar el número y tipo de pares de torsión aplicados o variaciones en el tamaño del eje o material.

Los problemas de torsión también ocurren con indeterminación *estática interna* en flechas compuestas formadas de dos o más tubos o materiales, como se muestra en la figura 6-6. En tales casos, el ángulo de torsión ϕ es el mismo para cada parte constituyente del miembro. Por tanto, el método de los *desplazamientos* (rigideces) es particularmente simple en su aplicación a problemas elásticos lineales. En tales problemas, el par de torsión T_i para cada i -ésima parte de las flechas es $T_i = (k_i)\phi$, de acuerdo con las ecuaciones 6-16 y 6-17. El par de torsión total aplicado T es entonces la suma de n partes; es decir,

$$T = \sum_{i=1}^n T_i = \sum_{i=1}^n (k_i)\phi_i \quad (6-21)$$

Para problemas elásticos complejos *externamente* estáticamente indeterminados con varios grados de libertad cinemáticos, puede usarse el método general de los desplazamientos, similar al dado en la sección 4-6. Sin embargo, aquí el análisis se limitará al caso de *un sólo grado de libertad*. Estos casos pueden analizarse usando el procedimiento descrito en la sección 4-6. Aplicando este enfoque a la flecha en la figura 6-21, pueden escribirse las dos siguientes ecuaciones básicas:

Por equilibrio global:

$$T_1 + T_2 + T = 0 \quad (6-22)$$

Por compatibilidad geométrica:

$$\phi_{AB} = \phi_{BC} \quad (6-23)$$

donde ϕ_{AB} y ϕ_{BC} son, respectivamente, las torsiones en B de los segmentos de barra AB y BC , suponiendo que los extremos A y C están fijos.

De acuerdo con la ecuación 6-16, para comportamiento linealmente elástico, la ecuación 6-23 toma la forma

$$\frac{T_1 L_1}{(I_p)_1 G_1} = \frac{T_2 L_2}{(I_p)_2 G_2} \quad (6-24)$$

donde los módulos de rigidez están dados como G_1 y G_2 para tomar en cuenta la posibilidad de tener materiales diferentes en las dos partes de la flecha.

Las soluciones para problemas *inelásticos* estáticamente indeterminados de un grado de libertad, se obtienen siguiendo el procedimiento dado en el ejemplo 4-7 para barras cargadas axialmente.

Los procedimientos previos pueden aplicarse al análisis de barras estáticamente indeterminadas con secciones diferentes a las circulares, como las vistas en las secciones 6-14 y 6-16.

Se da a continuación un ejemplo del método de las fuerzas para un problema elástico estáticamente indeterminado.

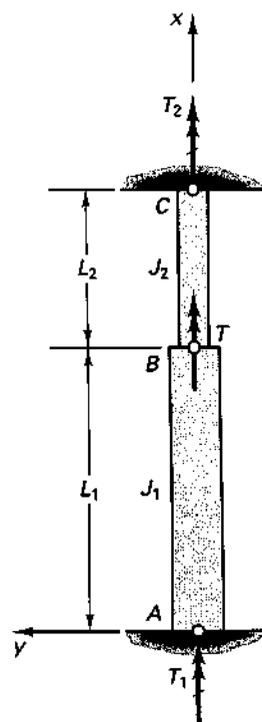


Fig. 6-21 Barra en torsión externamente estáticamente indeterminada.

Ejemplo 6-9

Suponga que la flecha escalonada del ejemplo 6-7 está cargada de la misma manera que antes pero que ahora está empotrada en ambos extremos, como se muestra en la figura 6-22. Determine las reacciones en los extremos y dibuje el diagrama de par de torsión de la flecha. Aplique el método de las fuerzas.

SOLUCIÓN

Hay dos reacciones desconocidas, T_A y T_E . Una de ellas puede considerarse como redundante y, arbitrariamente, retiramos la reacción T_A . Esto conduce al diagrama de cuerpo libre mostrado en la figura 6-22(b). La solución del ejemplo 6-7 da la rotación del extremo $\phi_0 = 23.3 \times 10^{-3}$ radianes.

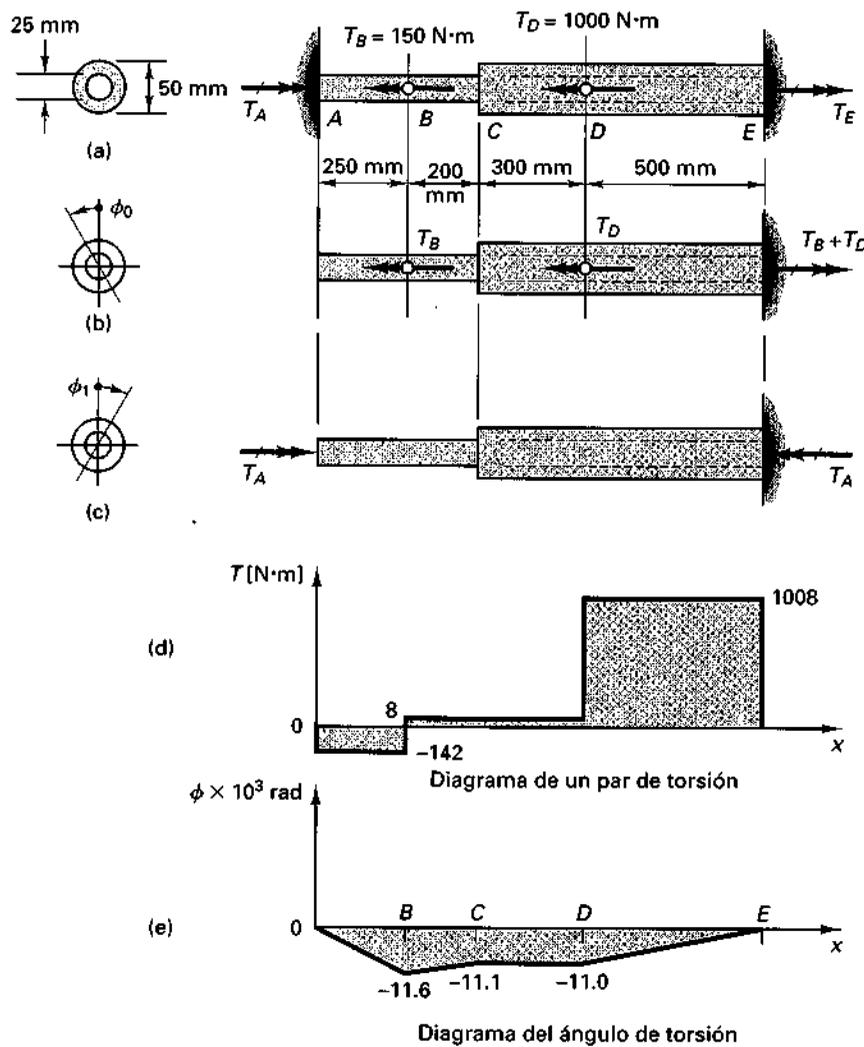


Fig. 6-22

Del ejemplo 6-7, $(I_p)_{AC} = 38.3 \times 10^3 \text{ mm}^2$ e $(I_p)_{CE} = 575 \times 10^3 \text{ mm}^2$. Aplicando T_A a la barra *descargada*, como se muestra en la figura 6-22(c), la rotación ϕ_1 en el extremo A se encuentra usando la ecuación 6-16.

$$\begin{aligned} \phi_1 &= \sum_i \frac{T_i L_i}{(I_p)_i G_i} \\ &= T_A \times 10^3 \left(\frac{450}{38.3 \times 10^3 \times 80 \times 10^3} + \frac{800}{575 \times 10^3 \times 80 \times 10^3} \right) \\ &= (147 \times 10^{-6} + 17 \times 10^{-6}) T_A = 164 \times 10^{-6} T_A \text{ rad} \end{aligned}$$

donde T_A tiene las unidades de N·m.

Usando la ecuación 6-20 y definiendo la rotación en el sentido de T_A como positiva, se tiene

$$-23.3 \times 10^{-3} + 164 \times 10^{-6} T_A = 0$$

Por consiguiente,

$$T_A = 142 \text{ N} \cdot \text{m} \quad \text{y} \quad T_B = 1150 - 142 = 1008 \text{ N} \cdot \text{m}$$

El diagrama de par torsionante para la flecha se muestra en la figura 6-22(d). Igual que en la figura 6-19(c) del ejemplo 6-7, si el sentido del vector par de torsión interno T sobre la parte *izquierda* de un segmento aislado de flecha coincide con el del eje x positivo, el vector se considera como positivo. Nótese que la mayor parte del par aplicado es resistido en el extremo E . Como la flecha de A a C es más flexible que de C a E , sólo un pequeño par se desarrolla en A .

Calculando los ángulos de torsión para los cuatro segmentos de flecha, como en el ejemplo 6-7, puede obtenerse el diagrama de ángulo de torsión a lo largo de la flecha, dado en la figura 6-22(e). (La verificación de este diagrama se deja como ejercicio al lector.) El ángulo de torsión en A y E debe ser cero por las condiciones de frontera prescritas. Como es de esperarse, la flecha gira en el sentido de los pares aplicados.

Aunque el problema es indeterminado sólo de primer grado, tiene tres grados de libertad cinemáticos. Dos de ellos están asociados con los pares aplicados y uno con el cambio en el tamaño de la flecha. Por lo tanto, la aplicación del método de los desplazamientos sería más complicado, requiriendo la resolución de tres ecuaciones simultáneas.

6-10. Enfoque alternativo de la ecuación diferencial para problemas de torsión

Para una $I_p G$ constante, la ecuación 6-14 puede reescribirse en forma de una ecuación diferencial de segundo orden. Antes de hacer esto, consideremos el elemento mostrado en la figura 6-23 sometido a los pares de torsión extremos T y $T + dT$ y a un par de torsión t_x distribuido con las unidades de lb-in/in o N·m/m. Usando la regla de la mano derecha para los pares, todas esas cantidades se muestran en la figura con sentido positivo. Por equilibrio de este elemento infinitesimal,

$$t_x dx + dT = 0 \quad \text{o} \quad \frac{dT}{dx} = -t_x \quad (6-25)$$

Al diferenciar la ecuación 6-14 con respecto a x , tenemos

$$I_p G \frac{d^2 \phi}{dx^2} = \frac{dT}{dx} = -t_x \quad (6-26)$$

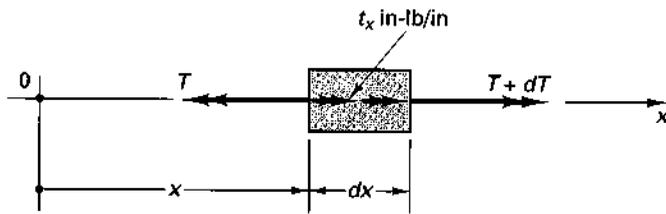


Fig. 6-23 Elemento infinitesimal de una barra circular sometida a un par de torsión.

Las constantes que aparecen en la solución de esta ecuación diferencial se determinan a partir de las condiciones de frontera en los extremos de una flecha y la rotación ϕ o bien el par de torsión T debe ser especificado. Las condiciones de rotación en la frontera para ϕ deben ser evidentes del enunciado del problema, mientras que aquellas para el par de torsión T se obtienen de la ecuación 4-14 ya que $T = I_p G d\phi/dx$.

La ecuación 6-26 puede usarse para la solución de problemas estáticamente determinados e indeterminados. Usando las funciones de singularidad vistas en la Sección 6-16, esta ecuación puede usarse para problemas con momentos concentrados.

El siguiente ejemplo ilustra la aplicación de la ecuación 6-26 cuando el par de torsión aplicado es una función continua.

Ejemplo 6-10

Considere una barra circular elástica con $I_p G$ constante sometida a un par de torsión t_x uniformemente variable, como se muestra en la figura 6-24. Determine la rotación de la barra a lo largo de su longitud y las reacciones en los extremos A y B para dos casos: (a) Suponga que el extremo A es libre y que el extremo B está empotrado, y (b) suponga que ambos extremos de la barra están empotrados.

SOLUCIÓN

(a) Integrando la ecuación 6-26 dos veces y determinando las constantes de integración C_1 y C_2 a partir de las condiciones de frontera, la solución requerida queda determinada.

$$I_p G \frac{d^2 \phi}{dx^2} = -t_x = \frac{x}{L} t_o$$

$$I_p G \frac{d\phi}{dx} = T = \frac{-t_o x^2}{2L} + C_1$$

$$T_A = T(0) = 0 \quad \text{por tanto, } C_1 = 0$$

$$T_B = T(L) = -\frac{t_o L}{2}$$

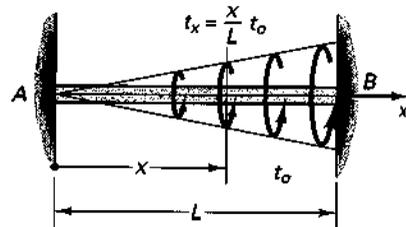


Fig. 6-24

El s
tido
(b) I
de s

6-11

Los co
tudiad
como
mente
puede
 U_{sh} de
(Ec. 3-
3-9) as

$$I_p G \phi = -\frac{t_o x^3}{6L} + C_2$$

$$\phi_B = \phi(L) = 0 \quad \text{por tanto, } C_2 = \frac{t_o L^2}{6}$$

$$I_p G \phi = \frac{t_o L^2}{6} - \frac{t_o x^3}{6L}$$

El signo negativo de T_B significa que el vector par de torsión actúa con sentido opuesto al del eje x positivo.

(b) Excepto por el cambio en las condiciones de frontera, el procedimiento de solución es el mismo que en la parte (a).

$$I_p G \frac{d^2 \phi}{dx^2} = -t_x = -\frac{x}{L} t_o$$

$$I_p G \frac{d\phi}{dx} = T = -\frac{t_o x^2}{2L} + C_1$$

$$I_p G \phi = -\frac{t_o x^3}{6L} + C_1 x + C_2$$

$$\phi_A = \phi(0) = 0 \quad \text{por tanto, } C_2 = 0$$

$$\phi_B = \phi(L) = 0 \quad \text{por tanto, } C_1 = \frac{t_o L}{6}$$

$$I_p G \phi = \frac{t_o L x}{6} - \frac{t_o x^3}{6L}$$

$$T_A = T(0) = \frac{t_o L}{6}$$

$$T_B = T(L) = -\frac{t_o L}{2} + \frac{t_o L}{6} = -\frac{t_o L}{3}$$

6-11. Energía y cargas de impacto

Los conceptos de energía de deformación elástica y cargas de impacto estudiados en las Secciones 3-5 y 3-6 para miembros cargados axialmente, así como aquellos de la Sección 5-3 para cortante puro, se transfieren directamente al problema de la torsión. Por ejemplo, la deflexión de un miembro puede determinarse igualando la energía interna de deformación cortante U_{sh} de un miembro con el trabajo externo W_e debido a la fuerza aplicada (Ec. 3-16). Este concepto puede aplicarse a problemas estáticos (Ejemplo 3-9) así como a las soluciones elementales de problemas de dinámica.



Ejemplo 6-11

(a) Encuentre la energía absorbida por una flecha circular elástica sometida a un par de torsión constante en términos del esfuerzo cortante máximo y del volumen del material; véase la figura 6-25. (b) Encuentre la rotación del extremo de una flecha circular elástica con respecto al extremo empotrado cuando se aplica un par de torsión T en el extremo libre.

SOLUCIÓN

(a) El esfuerzo cortante en una flecha circular elástica sometida a un par de torsión varía linealmente desde el eje longitudinal. Por consiguiente, el esfuerzo cortante que actúa sobre un elemento a una distancia ρ desde el centro de la sección transversal es $\tau_{\text{máx}}\rho/c$. Entonces, usando la ecuación 5-5 e integrando sobre el volumen de la barra de longitud L , se obtiene

$$\begin{aligned} U_{\text{sh}} &= \int_V \frac{\tau^2}{2G} dV = \int_V \frac{\tau_{\text{máx}}^2 \rho^2}{2Gc^2} 2\pi\rho d\rho L \\ &= \frac{\tau_{\text{máx}}^2}{2G} \frac{2\pi L}{c^2} \int_0^c \rho^3 d\rho = \frac{\tau_{\text{máx}}^2}{2G} \frac{2\pi L}{c^2} \frac{c^4}{4} \\ &= \frac{\tau_{\text{máx}}^2}{2G} \left(\frac{1}{2} \text{vol} \right) \end{aligned}$$

Si los esfuerzos cortantes fuesen uniformes en todo el miembro, se obtendría un arreglo más eficiente para absorber energía. Los bujes de hule (Ejemplo 6-8) con sus pequeños valores de G proporcionan un dispositivo excelente para absorber en una flecha los pares de impacto.

(b) Si el par de torsión T es gradualmente aplicado a la flecha, el trabajo externo $W_e = \frac{1}{2}T\phi$, donde ϕ es la rotación del extremo libre en radianes. La expresión para la energía interna de deformación U_{sh} que se encontró en el

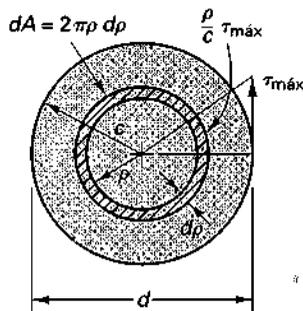


Fig. 6-25

inciso (a), puede escribirse en forma más conveniente notando que $\tau_{\max} = Tc/I_p$, el volumen de la barra $= \pi c^2 L$ e $I_p = \pi c^4/2$. Entonces,

$$U_{sh} = \frac{\tau_{\max}^2}{2G} \left(\frac{1}{2} \text{vol} \right) = \frac{T^2 c^2}{2I_p^2 G} \frac{1}{2} \pi c^2 L = \frac{T^2 L}{2I_p G}$$

De $W_e = U_{sh}$,

$$\frac{T\phi}{2} = \frac{T^2 L}{2I_p G} \quad \text{y} \quad \phi = \frac{TL}{I_p G}$$

que es la misma que la ecuación 6-16.

6-12. Coples de ejes o flechas

Suelen tenerse situaciones en que las longitudes disponibles de las flechas no son suficientemente largas. Igualmente, por razones de mantenimiento o ensamble, es a menudo deseable formar una flecha a base de varias piezas menores. Para unir entre sí las piezas de una flecha, se usan los coples con bridas del tipo mostrado en la figura 6-26. Cuando se atornillan entre sí, dichos coples se denominan *rígidos*, para diferenciarlos de otro tipo denominado *flexible* que toma en cuenta los desalineamientos de flechas adyacentes. Este último tipo es casi universalmente usado para unir la flecha de un motor con el equipo impulsado. Aquí consideraremos sólo los coples tipo rígido. Para el otro tipo, se refiere al lector a textos sobre diseño de máquinas y a los catálogos de los fabricantes.

En los coples rígidos es usual suponer que las deformaciones unitarias cortantes en los tornillos varían directamente (linealmente) con sus distancias desde el eje de la flecha. La fricción entre las bridas se desprecia. Por tanto, de forma análoga al problema de la torsión en flechas circulares, si los tornillos están hechos del mismo material, los *esfuerzos* cortantes elásticos en los tornillos también varían linealmente con sus respectivas distancias desde el centro de un cople. Se supone que el esfuerzo cortante en

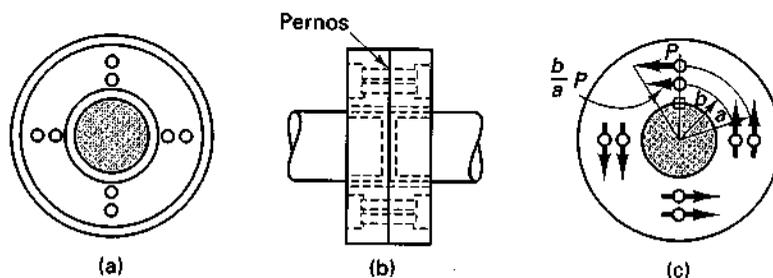


Fig. 6-26 Coples con bridas para flechas.

cualquier tornillo es *uniforme* y que está gobernado por la distancia de su centro al centro del cople. Entonces, si el esfuerzo cortante en un tornillo se multiplica por su área transversal, se encuentra la fuerza en el tornillo. Por ejemplo, para tornillos de *igual tamaño* en dos "círculos de tornillos", las fuerzas sobre los tornillos localizados por los radios respectivos a y b , son como se muestran en la figura 6-26(c). El momento de las fuerzas desarrollado por los tornillos respecto al eje de una flecha da la capacidad por par de torsión de un cople.

El razonamiento previo es el mismo que el aplicado al deducir la fórmula de la torsión para flechas circulares, excepto que, en vez de una sección transversal continua, se considera un número discreto de puntos. Este es un análisis crudo ya que indudablemente se tienen presentes concentraciones de esfuerzos en los puntos de contacto de los tornillos con las bridas de un cople.

El método delineado de análisis es válido sólo en el caso de un cople en el que los tornillos trabajan principalmente en cortante. Sin embargo, en algunos coples, los tornillos son apretados tan fuertemente que el cople trabaja de diferente manera. La tensión inicial en los tornillos es suficientemente grande para causar que todo el cople trabaje en fricción. Bajo esas circunstancias, el análisis sugerido no es válido o es válido sólo como una medida de la resistencia última del cople en caso de que los esfuerzos en los tornillos se reduzcan. Sin embargo, si se usan tornillos de alta resistencia, habrá poco peligro de que esto suceda y la resistencia del cople puede ser mayor que si los tornillos tuviesen que trabajar en cortante.¹²

Ejemplo 6-12

Estime la capacidad por par de torsión de un cople de acero forjado integralmente con la flecha, mostrado en la figura 6-27, si el criterio gobernante es el esfuerzo cortante permisible de 40 MPa en los ocho pernos. El círculo de pernos tiene un diámetro de 240 mm.

SOLUCIÓN

Área de un perno:

$$A = (1/4)\pi(30)^2 = 706 \text{ mm}^2$$

Fuerza permisible en un perno:

$$P_{\text{perm}} = A\tau_{\text{perm}} = 706 \times 40 = 28.2 \times 10^3 \text{ N}$$

Como se tienen ocho pernos a una distancia de 120 mm desde el eje,

$$T_{\text{perm}} = 28.2 \times 10^3 \times 120 \times 8 = 27.1 \times 10^6 \text{ N} \cdot \text{mm} = 27.1 \times 10^3 \text{ N} \cdot \text{m}$$

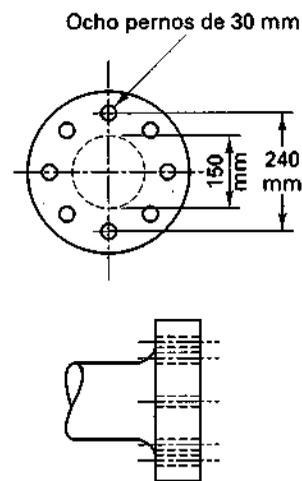


Fig. 6-27

¹²Véase "Symposium on High-Strength Bolts", Parte I, por L. T. Wyly y Parte II por E. J. Ruble, *Proc. AISC*, 1950. Véase también la Sección 1-8.

Parte B TORSIÓN DE BARRAS CIRCULARES INELÁSTICAS

6-13. Esfuerzos y deformaciones cortantes en flechas circulares en el rango inelástico

La fórmula de la torsión para secciones circulares deducida antes, se basa en la ley de Hooke. Por tanto, se aplica sólo hasta el punto en que el límite proporcional de un material en cortante es alcanzado en el anillo exterior de una flecha. La solución se ampliará ahora para incluir el comportamiento inelástico del material. Igual que antes, deben satisfacerse los requisitos de equilibrio en una sección. La hipótesis de una variación lineal de la deformación unitaria desde el eje sigue siendo aplicable. Sólo la diferencia en las propiedades del material afectan la solución.

En la figura 6-28(a) se muestra una sección transversal de una flecha. La variación lineal de la deformación unitaria se muestra esquemáticamente en la misma figura. Algunas posibles propiedades mecánicas de los materiales en cortante, obtenidas, por ejemplo, en experimentos con tubos delgados en torsión, se muestran en las figuras 6-28(b), (c) y (d). La distribución correspondiente del esfuerzo cortante se muestra a la derecha en cada caso. Los esfuerzos se determinan a partir de las deformaciones unitarias. Por ejemplo, si la deformación unitaria cortante es a en un anillo interior, figura 6-28(a), el esfuerzo correspondiente se encuentra del diagrama esfuerzo-deformación unitaria. Este procedimiento es aplicable a flechas macizas así como a flechas integrales hechas de tubos concéntricos de diferentes materiales, siempre que los correspondientes diagramas esfuerzo-deformación unitaria sean usados. La deducción para un material elástico lineal es simplemente un caso especial de este enfoque.

Una vez conocida la distribución del esfuerzo, el par de torsión T generado por esos esfuerzos se encuentra igual que antes; es decir,

$$T = \int_A (\tau dA) \rho \quad (6-27)$$

Esta integral debe evaluarse sobre toda el área de la sección transversal de la flecha.

Aunque la distribución del esfuerzo cortante después que se excede el límite elástico no es lineal y la ecuación 6-3 para la torsión elástica no es aplicable, ella se usa a veces para calcular un esfuerzo ficticio para el par de torsión último. El esfuerzo calculado se llama *módulo de ruptura*; véanse las ordenadas máximas de la línea de rayas en las figuras 6-28(f) y (g). Él sirve como un índice burdo de la resistencia última de un material en torsión. Para un tubo de pared delgada, la distribución del esfuerzo es casi la misma, independientemente de las propiedades del material; véase la figura 6-29. Por esta razón son ampliamente usados los experimentos con tubos de pared delgada para establecer los diagramas esfuerzo-deformación unitaria τ - γ en cortante.

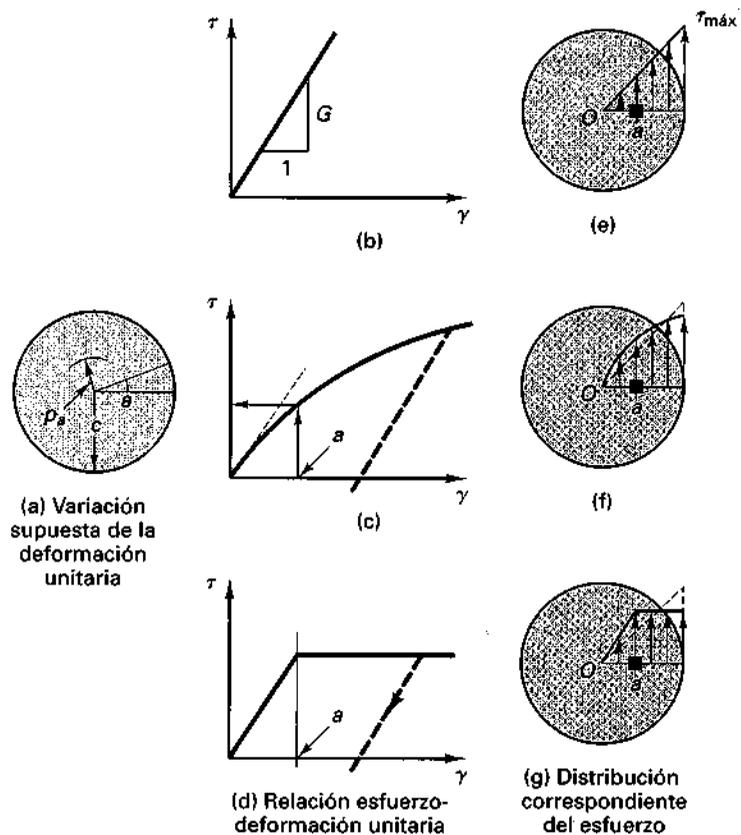


Fig. 6-28 Esfuerzos en miembros circulares debido a un par de torsión.

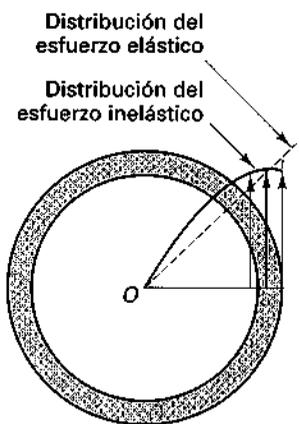


Fig. 6-29 Para tubos de pared delgada, la diferencia entre los esfuerzos elásticos e inelásticos es pequeña.

Si una flecha es deformada dentro del rango inelástico y luego se retira el par de torsión aplicado, todo anillo "imaginario" se recupera elásticamente. Debido a las diferencias en las trayectorias de la deformación unitaria, que ocasionan deformaciones permanentes en el material, se desarrollan esfuerzos residuales. Este proceso será ilustrado en uno de los ejemplos que siguen.

Para determinar la razón de torsión de una flecha o tubo circular, la ecuación 6-13 puede usarse en la forma siguiente:

$$\frac{d\phi}{dx} = \frac{\gamma_{\text{máx}}}{c} = \frac{\gamma_a}{\rho_a} \quad (6-28)$$

Aquí debe usarse la deformación unitaria cortante máxima en c o la deformación unitaria en ρ_a determinada con el diagrama esfuerzo-deformación unitaria.

Ejemplo 6-13

Una flecha maciza de acero de 24 mm de diámetro está tan fuertemente torcida que sólo queda un núcleo elástico de 8 mm de diámetro en el interior, como se muestra en la figura 6-30(a). Si las propiedades del material pueden idealizarse como se muestra en la figura 6-30(b), ¿qué esfuerzos residuales y qué rotación residual permanece al liberar el par de torsión aplicado? Sea $G = 80$ GPa.

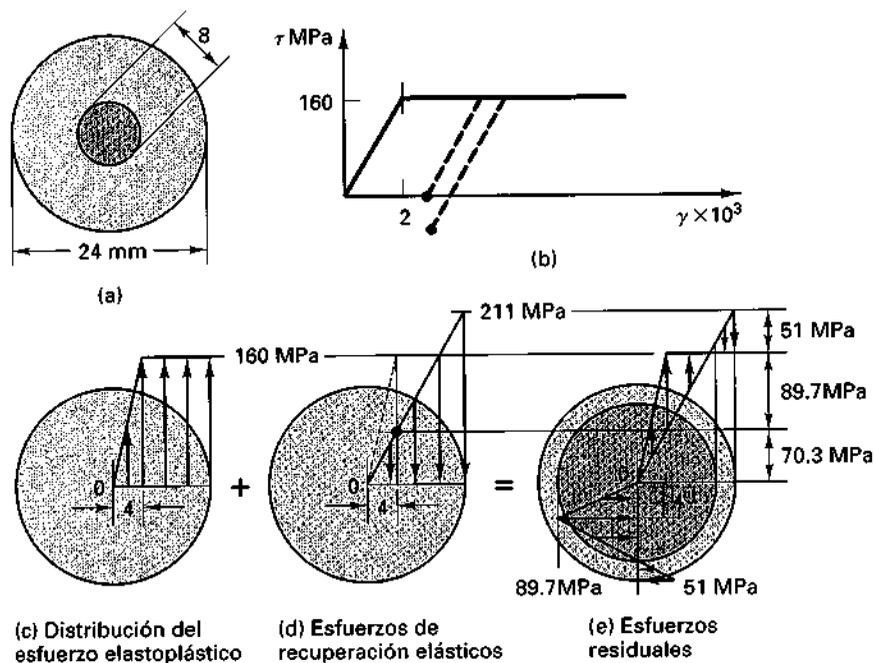


Fig. 6-30

SOLUCIÓN

Para comenzar, deben determinarse la magnitud del par aplicado inicialmente y el correspondiente ángulo de torsión. La distribución de esfuerzos correspondiente a la condición dada se muestra en la figura 6-30(c). Los esfuerzos varían linealmente de 0 a 160 MPa cuando $0 \leq \rho \leq 4$ mm; el esfuerzo es constante e igual a 160 MPa para $\rho > 4$ mm. La ecuación 6-27 puede usarse para determinar el par de torsión T aplicado. La liberación del par T causa esfuerzos elásticos y la ecuación 6-3 es entonces aplicable; véase la figura 6-30(d). La diferencia entre las dos distribuciones de esfuerzos, correspondiente a ningún par externo, da los esfuerzos residuales.

$$\begin{aligned} T &= \int_A \tau \rho \, dA = \int_0^c 2\pi \tau \rho^2 \, d\rho = \int_0^4 \left(\frac{\rho}{4} 160\right) 2\pi \rho^2 \, d\rho \\ &\quad + \int_4^{12} (160) 2\pi \rho^2 \, d\rho \\ &= (16 + 558) \times 10^3 \, \text{N} \cdot \text{mm} = 574 \times 10^3 \, \text{N} \cdot \text{mm} \end{aligned}$$

Note la pequeña contribución al total de la primera integral.

$$\tau_{\text{máx}} = \frac{Tc}{I_p} = \frac{574 \times 10^3 \times 12}{(\pi/32) \times 24^4} = 211 \, \text{MPa}$$

En $\rho = 12$ mm, $\tau_{\text{residual}} = 211 - 160 = 51$ MPa.

Dos diagramas residuales alternativos se muestran en la figura 6-30(e). Por claridad, los resultados iniciales están regraficados desde la línea vertical. En toda la porción sombreada del diagrama, el par de torsión residual tiene sentido horario; un par de torsión residual exactamente igual actúa en sentido opuesto en la porción interior de la flecha.

La rotación inicial se determina calculando el giro del núcleo elástico. En $\rho = 4$ mm, $\gamma = 2 \times 10^{-3}$. La recuperación elástica de la flecha está dada por la ecuación 6-16. La diferencia entre los giros inelástico y elástico da la rotación residual por unidad de longitud de flecha. Si el par de torsión inicial es vuelto a aplicar en el mismo sentido, la flecha responde elásticamente.

Inelástico:

$$\frac{d\phi}{dx} = \frac{\gamma_a}{\rho_a} = \frac{2 \times 10^{-3}}{4 \times 10^{-3}} = 0.50 \, \text{rad/m}$$

Elástico:

$$\frac{d\phi}{dx} = \frac{T}{I_p G} = \frac{574 \times 10^3 \times 10^3}{(\pi/32) \times 24^4 \times 80 \times 10^3} = 0.22 \, \text{rad/m}$$

Residual:

$$\frac{d\phi}{dx} = 0.50 - 0.22 = 0.28 \, \text{rad/m}$$

Ejemplo 6-14

Determine el par de torsión último tomado por una flecha circular maciza de acero dulce cuando son alcanzados en toda su sección transversal esfuerzos cortantes superiores al límite proporcional. Para el acero dulce, el diagrama esfuerzo-deformación unitaria por cortante puede idealizarse por el mostrado en la figura 6-31(a). El esfuerzo de fluencia cortante τ_{yp} debe tomarse como el mismo que el límite proporcional en cortante τ_{pl} .

SOLUCIÓN

Si un miembro se somete a un par de torsión muy grande, aparecen en todas partes grandes deformaciones unitarias, excepto cerca del centro. Correspondiente a las grandes deformaciones unitarias del material idealizado considerado, el esfuerzo de fluencia cortante se alcanza en todas partes excepto cerca del centro. Sin embargo, la resistencia al par de torsión aplicado ofrecida por el material cerca del centro de la flecha es despreciable ya que las ρ correspondientes son pequeñas [figura 6-31(b)]. (Véase la contribución al par de torsión T por la acción elástica en el ejemplo 6-13.) Por consiguiente, puede suponerse con un grado de exactitud suficiente que un esfuerzo cortante constante τ_{yp} está actuando en todas partes sobre la sección considerada. El par de torsión correspondiente a esta condición puede considerarse como el par de torsión *último*. [La figura 6-31(c)] da una base más firme para esta aseveración) Entonces,

$$\begin{aligned} T_{\text{últ}} &= \int_A (\tau_{yp} dA) \rho = \int_0^c 2\pi\rho^2 \tau_{yp} d\rho = \frac{2\pi c^3}{3} \tau_{yp} \quad (6-29) \\ &= \frac{4}{3} \frac{\tau_{yp}}{c} \frac{\pi c^4}{2} = \frac{4}{3} \frac{\tau_{yp} I_p}{c} \end{aligned}$$

Como la capacidad máxima por par de torsión elástico de una flecha maciza es $T_{yp} = \tau_{yp} I_p / c$ y $T_{\text{últ}}$ es $\frac{4}{3}$ veces este valor, la capacidad del par restante después de la fluencia es $\frac{1}{3}$ de aquella en la fluencia. En la figura 6-31(c) se muestra una gráfica del par de torsión T versus θ (ángulo de torsión por distancia unitaria) cuando se desarrolla una plasticidad plena. El punto A corresponde a los resultados encontrados en el ejemplo precedente; la línea AB es la recuperación elástica y el punto B es la θ residual para el mismo problema.

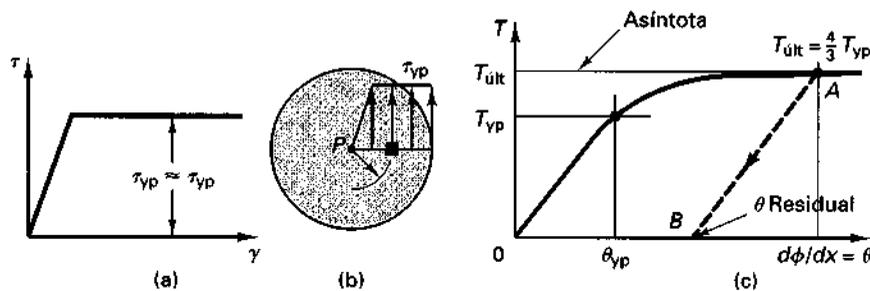


Fig. 6-31

Debe notarse que en miembros de máquinas, debido a las propiedades de fatiga de los materiales, la capacidad estática última de las flechas tal como se evaluaron aquí, es de menor importancia.

Parte C TORSIÓN DE MIEMBROS SÓLIDOS NO CIRCULARES

6-14. Barras sólidas con cualquier sección transversal

El tratamiento analítico de los miembros no circulares macizos en torsión está más allá del alcance de este libro. Matemáticamente, el problema es complejo.¹³ Las primeras dos hipótesis establecidas en la Sección 6-3 no se aplican a miembros no circulares. Las Secciones perpendiculares al eje de un miembro se alabean cuando se aplica un par de torsión. La naturaleza de las distorsiones que tienen lugar en una sección rectangular pueden imaginarse observando la figura 6-32.¹⁴ En un miembro rectangular, los elementos en las esquinas no se distorsionan en absoluto. Por tanto, los esfuerzos cortantes en las esquinas son cero; son máximos en los puntos medios de los lados largos. La figura 6-33 muestra la distribución del esfuerzo cortante a lo largo de tres líneas radiales que parten del centro. Note particularmente la diferencia en esta distribución de esfuerzos respecto a la de una sección circular. En ésta, el esfuerzo es máximo en el punto más remoto, pero en la primera el esfuerzo es cero en el punto más remoto. Esta situación puede aclararse considerando un elemento de esquina, como se muestra en la figura 6-34. Si existiese un esfuerzo cortante τ en la esquina, este podría resolverse en dos componentes paralelas a los bordes de la barra. Sin embargo, como los cortantes siempre ocurren en pares actuando sobre planos mutuamente perpendiculares, esas componentes tendrían que ser equilibradas por cortantes situados en los planos de las superficies exteriores. Esta última situación es imposible ya que las superficies exteriores están libres de todo esfuerzo. Por consiguiente, τ debe ser cero. Similares consideraciones pueden hacerse a otros puntos sobre la frontera. Todos los esfuerzos cortantes en el plano de un corte cerca de las fronteras actúan paralelamente a ellas.

Se han obtenido¹⁵ soluciones analíticas para miembros elásticos rectangulares sometidos a torsión. Los métodos usados están más allá del alcance

¹³Este problema permaneció sin ser resuelto hasta que el famoso experto francés en elasticidad, B. de Saint-Venant, desarrolló una solución para tales problemas en 1853. El problema general de la torsión se llama a veces problema de Saint-Venant.

¹⁴Un experimento con un borrador de goma sobre la cual se dibuja una retícula rectangular evidencia este tipo de distorsión.

¹⁵S. Timoshenko y J. N. Goodier, *Theory of Elasticity*, 3a. ed., Nueva York: McGraw-Hill, 1970, pág. 312. La tabla de coeficientes que sigue está adaptada de esta fuente.

de
int
dedo
lad
lar.
cua
das

Tab

b/
 α
 β

gido

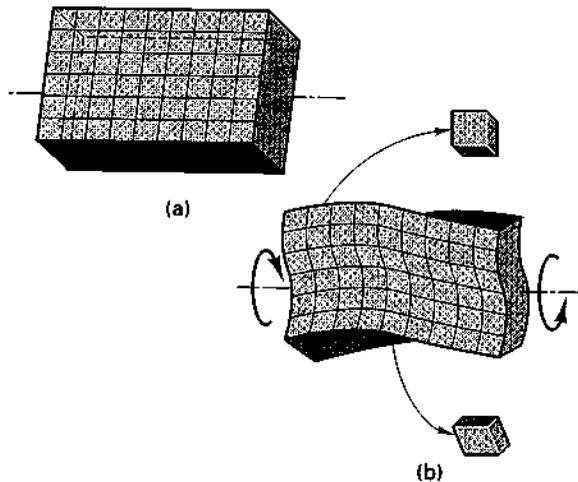


Fig. 6-32 Barra rectangular (a) antes y (b) después de aplicar un par de torsión.

de este libro. Sin embargo, los resultados finales de este análisis son de gran interés. Para el esfuerzo cortante máximo (véase la figura 6-33) y el ángulo de torsión, esos resultados pueden escribirse en la forma siguiente:

$$\tau_{\max} = \frac{T}{\alpha b t^2} \quad \text{y} \quad \phi = \frac{TL}{\beta b t^3 G} \quad (6-30)$$

donde T , igual que antes, es el par de torsión aplicado, b es la longitud del lado largo y t es el espesor o ancho del lado corto de una sección rectangular. Los valores de los parámetros α y β dependen de la razón b/t . Unos cuantos de estos valores se dan en la siguiente tabla. Para secciones delgadas, donde b es mucho mayor que t , los valores de α y β tienden a $1/3$.

Tabla de coeficientes para barras rectangulares

b/t	1.00	1.50	2.00	3.00	6.00	10.0	∞
α	0.208	0.231	0.246	0.267	0.299	0.312	0.333
β	0.141	0.196	0.229	0.263	0.299	0.312	0.333

Es útil reescribir la segunda ecuación 6-30, de manera que exprese la rigidez torsional k_t para una sección rectangular, en la forma

$$k_t = \frac{T}{\phi} = \beta b t^3 \frac{G}{L} \quad (6-31)$$

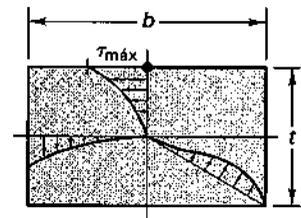


Fig. 6-33 Distribución del esfuerzo cortante en una flecha rectangular sometida a un par de torsión.

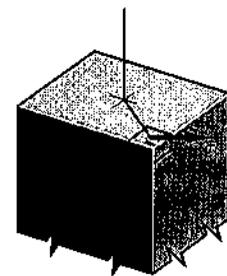


Fig. 6-34 El esfuerzo cortante mostrado no puede existir.

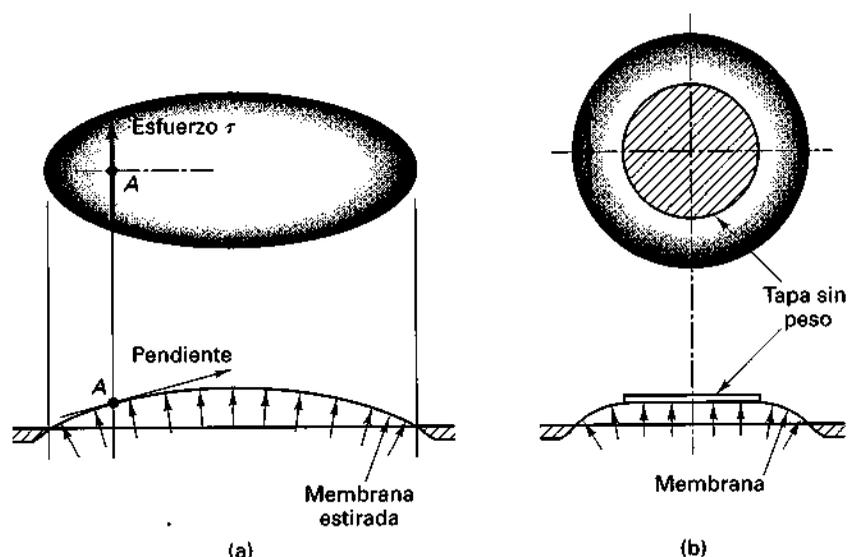


Fig. 6-35 Analogía de la membrana: (a) región simplemente conectada y (b) región múltiplemente (tubular) conectada.

Fórmulas como éstas pueden encontrarse en libros más avanzados para muchos otros tipos de secciones.¹⁶

Para los casos que no pueden resolverse matemáticamente en forma conveniente, se ha desarrollado un método sorprendente.¹⁷ Resulta que la solución de la ecuación diferencial parcial que debe resolverse en el problema de la torsión elástica es matemáticamente idéntica a la de una membrana delgada, como el caso de una película de jabón ligeramente estirada sobre un agujero. Este agujero debe ser geoméricamente similar a la sección transversal de la flecha en estudio. Debe mantenerse una ligera presión de aire sobre un lado de la membrana. Puede demostrarse entonces que lo siguiente se cumple:

1. El esfuerzo cortante en cualquier punto es proporcional a la pendiente de la membrana estirada en el mismo punto, figura 6-35(a).
2. La dirección de un esfuerzo cortante particular en un punto está en ángulo recto a la pendiente de la membrana en el mismo punto, figura 6-35(a).
3. El doble del volumen encerrado por la membrana es proporcional al par de torsión tomado por la sección.

La analogía anterior se llama *analogía de la membrana*. Además de su valor en aplicaciones experimentales, es una ayuda mental muy útil para visualizar los esfuerzos y las capacidades por torsión de miembros. Por

¹⁶R. J. Roark y W. C. Young, *Formulas for Stress and Strain*, 5a. ed., Nueva York: McGraw-Hill, 1975. Se dispone también de análisis por elemento finito de barras macizas de sección transversal arbitraria. Véase, por ejemplo, L. R. Herrmann, "Elastic torsional analysis of irregular shapes", *J. Eng. Mech. Div., ASCE*, diciembre de 1965, 91 EMD, págs. 11-19.

¹⁷Esta analogía fue introducida por el científico e ingeniero alemán L. Prandtl en 1903.

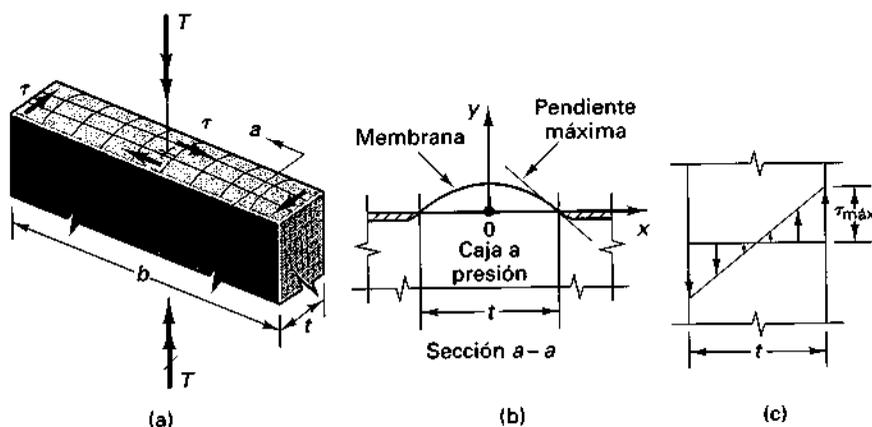


Fig. 6-36 Ilustración de la analogía de la membrana para una barra rectangular en torsión.

ejemplo, considere una barra rectangular estrecha sometida al par de torsión T , como se muestra en la figura 6-36. Una membrana estirada para este miembro se muestra en la figura 6-36(a). Si tal membrana es estirada ligeramente por presión interna, una sección a través de la membrana es una parábola, figura 6-36(b). Para esta superficie, la pendiente máxima, y por consiguiente el esfuerzo cortante máximo, ocurre a lo largo de los bordes, figura 6-36(c). *Ningún esfuerzo cortante se desarrolla a lo largo de una línea que biseque el espesor t de la barra.* Los esfuerzos cortantes máximos a lo largo de los lados cortos son pequeños. El volumen encerrado por la membrana es directamente proporcional al par de torsión que el miembro puede tomar bajo un esfuerzo máximo dado. Por esta razón, las secciones mostradas en la figura 6-37 pueden tomar aproximadamente el mismo par de torsión bajo el mismo esfuerzo cortante máximo (misma pendiente máxima de la membrana) ya que el volumen encerrado por las membranas sería aproximadamente el mismo en todos los casos. (Para todas esas formas, $b = L$ y las t son iguales.) Sin embargo, con algo de imaginación, el lector se convencerá de que las líneas de contorno de una película de jabón se “apilarán” en puntos a de esquinas reentrantes. Por consiguiente, ocurrirán altos esfuerzos locales en esos puntos. Un círculo inscrito dentro del área transversal de una sección es tangente al esfuerzo máximo en una frontera.

Otra analogía, llamada *analogía del montón de arena*, ha sido desarrollada para la torsión plástica.¹⁸ Se vierte arena seca sobre una superficie plana que tenga la forma de la sección transversal del miembro. La superficie del montón de arena que se forma tiene una pendiente constante. Por ejemplo, se forma un cono sobre un disco circular o una pirámide sobre una base cuadrada. La pendiente máxima constante de la arena corresponde a la superficie límite de la membrana en la analogía previa. El volumen del montón de arena, y por consiguiente su peso, es proporcional al par de torsión totalmente plástico tomado por una sección. Los otros conceptos

¹⁸A. Nadai, *Theory of Flow and Fracture of Solids*, vol. 1, 2a. ed., Nueva York: McGraw-Hill, 1950.

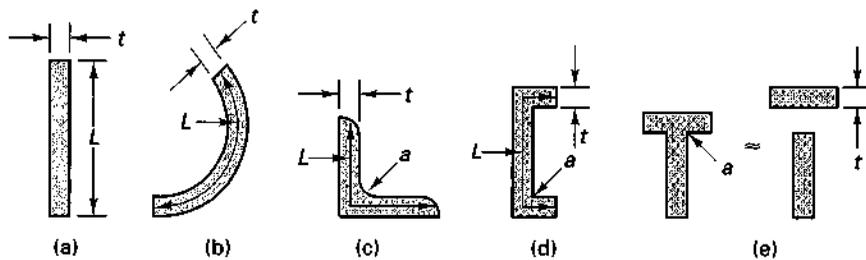


Fig. 6-37 Miembros de igual área transversal y del mismo espesor que toman el mismo par de torsión.

en conexión con la superficie de la arena tienen la misma interpretación que aquellos en la analogía de la membrana.

Las barras estáticamente indeterminadas con cualquier sección transversal pueden analizarse con los procedimientos vistos en la sección 6-9.

Ejemplo 6-15

Usando la analogía de la membrana, determine un valor aproximado para la constante de torsión $(I_p)_{equiv}$ para una viga de acero $W12 \times 65$; véase la figura 6-38. Compare el valor calculado con el valor de 2.18 in^4 dado en el *Manual AISC de construcción en acero*. (Véase la Tabla 4A en el Apéndice.)

SOLUCIÓN

Comparando las ecuaciones dadas para ϕ para una sección circular, ecuación 6-16, con las de una barra rectangular, ecuación 6-30, puede concluirse que $(I_p)_{equiv} = \beta b r^3$. Además, una sección $W12 \times 65$ puede aproximarse, como es sugerido por la figura 6-37(e), por tres barras delgadas separadas: dos patines y un alma. Como b/t para los patines es $12/0.605 = 19.8$ y para

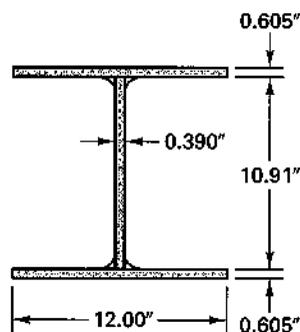


Fig. 6-38

el alma es $10.91/0.390 = 28.0$, de las tablas para ambos casos, $\beta \approx \frac{1}{3}$. Por consiguiente,

$$(I_p)_{\text{equiv}} = \frac{1}{3}(2 \times 12 \times 0.605^3 + 10.91 \times 0.390^3) = 1.99 \text{ in}^4$$

El valor dado en el *Manual AISC* es mayor (2.18 in^4). La discrepancia puede atribuirse a que se han despreciado los filetes en las cuatro esquinas interiores.

Este problema puede resolverse desde un punto de vista diferente, usando la ecuación 6-21. El trabajo numérico es idéntico.

6-15. Alabeo de secciones abiertas de pared delgada¹⁹

La resolución del problema general de la torsión elástica visto en la sección precedente está asociada con el nombre de Saint-Venant. Las soluciones basadas en este enfoque riguroso (que incluye la analogía de la membrana) para secciones abiertas de pared delgada²⁰ pueden incurrir en importantes inexactitudes en algunas aplicaciones de la ingeniería. Como se señaló en conexión con la torsión de una barra rectangular estrecha, figura 6-36, ningún esfuerzo cortante se desarrolla a lo largo de una línea que biseque el espesor t . Esto significa que *ninguna deformación en el plano puede tener lugar a lo largo de todo el ancho y la longitud de la superficie media de la barra*. Lo mismo es cierto para superficies medias de barras curvas, así como para un ensamble de barras. En este sentido, una sección I como la mostrada en la figura 6-39, que consiste en tres barras planas, *no desarrolla deformaciones en el plano en las tres superficies medias de esas barras durante la torsión*.

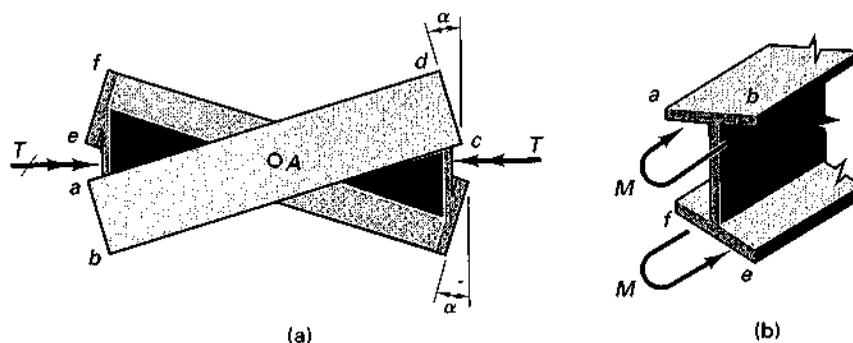


Fig. 6-39 Alabeo transversal debido a un par de torsión aplicado.

¹⁹Esta sección presenta sólo un análisis cualitativo de este importante tema.

²⁰En matemáticas, las fronteras de tales secciones se denominan simplemente conectadas (es decir, tales secciones no son ni tubulares ni huecas).

Por virtud de la simetría, esta sección I se tuerce alrededor de su eje centroidal, que en este caso es también el centro de torsión. Durante la torsión, cuando los patines de la viga se desplazan lateralmente, la superficie media *no deformada* $abcd$ gira respecto al punto A , figura 6-39(a). Un comportamiento similar es exhibido por la superficie media del otro patín. De esta manera, las secciones planas de una viga I se alabean (es decir, dejan de ser planas) durante la torsión. Por el contrario, para miembros circulares, las secciones perpendiculares al eje permanecen planas durante la torsión (véase la Sección 6-3, hipótesis 1). Aunque el alabeo de la sección transversal tiene lugar en otras secciones *gruesas*, incluyendo barras rectangulares, este efecto es despreciable. Por otra parte, para miembros en torsión de *pared delgada*, usados comúnmente en aviones, automóviles, barcos, puentes, etc. el alabeo de las secciones transversales, o bien su restricción, puede tener un efecto importante²¹ sobre la resistencia del miembro y particularmente en su rigidez.

El alabeo de las secciones transversales en torsión es restringido en muchas aplicaciones de la ingeniería. Por ejemplo, al soldar un extremo de una viga I de acero a un soporte rígido, la sección transversal unida no puede alabearse. Para mantener la compatibilidad requerida de las deformaciones, deben desarrollarse momentos M en los patines en el plano, mostrados en la figura 6-39(b).²² Tal restricción obligada rigidiza efectivamente una viga y reduce su torsión. Este efecto es local y, a cierta distancia del soporte, pierde su importancia. Sin embargo, en vigas cortas, el efecto restrictivo del alabeo es dominante. Este importante tema va más allá del alcance de este texto.²³

Parte D TORSIÓN DE MIEMBROS TUBULARES DE PARED DELGADA

6-16. Miembros huecos de pared delgada

A diferencia de los miembros macizos no circulares, los tubos de *pared delgada* de cualquier forma pueden analizarse fácilmente respecto a la magnitud de los esfuerzos cortantes y el ángulo de torsión causado por un par de torsión aplicado al tubo. Considere un tubo de forma arbitraria con espesor de pared variable, como el mostrado en la figura 6-40(a), y un elemento tomado de este tubo en el que actúan las fuerzas F_1 , F_2 , F_3 y F_4 , que se muestra en la figura 6-40(b). Esas fuerzas son iguales a los esfuerzos cor-

²¹V. Z. Vlasov en una serie de artículos presentados en 1940, hizo contribuciones básicas a este tema. Véase su libro *Thin-walled Elastic Beams*, 2a. ed., Washington, D.C.: Israel Translations, Office of Technical Services, 1961.

²²Los cortantes que tienen lugar en los patines y toman eficientemente parte del par de torsión aplicado no se muestran en el diagrama.

²³Para detalles, véase, por ejemplo, J. T. Oden y E. A. Ripperger, *Mechanics of Elastic Structures*, 2a. ed., Nueva York: McGraw-Hill, 1981.

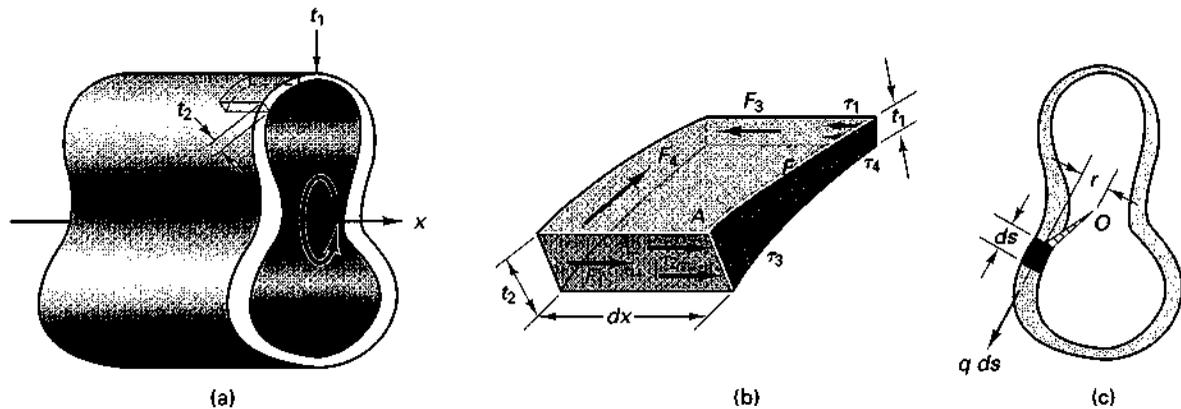


Fig. 6-40 Miembro tubular de pared delgada y de espesor variable.

tantes que actúan sobre los planos cortados multiplicados por las áreas respectivas.

De $\sum F_x = 0$, $F_1 = F_3$, pero $F_1 = \tau_2 t_2 dx$ y $F_3 = \tau_1 t_1 dx$, donde τ_2 y τ_1 son esfuerzos cortantes que actúan sobre las áreas respectivas $t_2 dx$ y $t_1 dx$. Por consiguiente, $\tau_2 t_2 dx = \tau_1 t_1 dx$ o bien $\tau_1 t_1 = \tau_2 t_2$. Sin embargo, como las secciones longitudinales se tomaron a una distancia arbitraria entre sí, se infiere de las relaciones previas que el producto del esfuerzo cortante y el espesor de la pared es el mismo (es decir, constante) sobre cualesquiera de los planos. Esta constante se denotará por q , que es medida en unidades de fuerza entre distancia unitaria a lo largo del perímetro. Por tanto, sus unidades son N/m o lb/in.

En la ecuación 1-2 de la sección 1-4, se estableció que los esfuerzos cortantes sobre planos mutuamente perpendiculares son iguales en una esquina de un elemento. Por consiguiente, en una esquina como la A en la figura 6-40(b), $\tau_2 = \tau_3$; similarmente, $\tau_1 = \tau_4$. Por tanto, $\tau_4 t_1 = \tau_3 t_2$, o, en general, q es constante en el plano de una sección perpendicular al eje del miembro. Con base en esto puede formularse una analogía. Las fronteras interiores y exteriores de la pared pueden imaginarse como las fronteras de un canal. Puede uno entonces imaginarse una cantidad constante de agua circulando continuamente en este canal. En este arreglo, la cantidad de agua que fluye a través de un plano transversal del canal es constante. Debido a esta analogía, la cantidad q se ha llamado *flujo cortante*.

A continuación consideremos la sección transversal del tubo como se muestra en la figura 6-40(c). La fuerza por distancia unitaria del perímetro de este tubo, en virtud del razonamiento previo, es constante y es el flujo cortante q . Este flujo cortante multiplicado por la longitud ds del perímetro da una fuerza $q ds$ por longitud diferencial. El producto de esta fuerza infinitesimal $q ds$ y r alrededor de algún punto conveniente como el O , figura 6-40(c), da la contribución de un elemento a la resistencia del par de torsión aplicado T . Sumando o integrando esto,

$$T = \oint r q ds \quad (6-32)$$

donde el proceso de integración se lleva a cabo alrededor del tubo a lo largo de la línea central del perímetro. Como para un tubo, q es constante, esta ecuación puede escribirse como

$$T = q \oint r ds \quad (6-33)$$

En vez de efectuar la integración, se dispone de una simple interpretación de la integral. Puede verse en la figura 6-40(c) que $r ds$ es dos veces el valor del área sombreada de un triángulo infinitesimal de altura r y base ds . Por consiguiente, la integral completa es dos veces toda el área limitada por la línea central del perímetro del tubo. Si se define esta área por el símbolo \textcircled{A} , obtenemos

$$T = 2\textcircled{A}q \quad \text{o} \quad q = \frac{T}{2\textcircled{A}} \quad (6-34)$$

Esta ecuación²⁴ se aplica sólo a tubos de *pared delgada*. El área \textcircled{A} es aproximadamente el promedio de las dos áreas encerradas por las superficies interior y exterior de un tubo, o como se indicó antes, es el área encerrada por la línea central del perfil de la pared. La ecuación 6-34 no es aplicable en absoluto si el tubo está escindido y deben en cambio usarse las ecuaciones 6-30.

Como para cualquier tubo, el flujo cortante q dado por la ecuación 6-34 es constante, de la definición de flujo cortante, el esfuerzo cortante en cualquier punto de un tubo donde el espesor de la pared es t , es

$$\tau = \frac{q}{t} \quad (6-35)$$

En el rango elástico, las ecuaciones 6-34 y 6-35 son aplicables a cualquier forma de tubo. Para un comportamiento inelástico, la ecuación 6-35 se aplica sólo si el espesor t es constante. El análisis de tubos de más de una celda está más allá del alcance de este libro.²⁵

Para materiales linealmente *elásticos*, el ángulo de torsión para un tubo hueco puede encontrarse aplicando el principio de conservación de la energía dado por la ecuación 3-16. En esta deducción es conveniente introducir el ángulo de torsión por unidad de longitud de tubo definido por $\theta = d\phi/dx$. La energía de deformación unitaria cortante elástica para el tubo debe también ser por unidad de longitud del tubo. Por lo tanto, la ecuación 5-5 para la energía de deformación unitaria elástica se reduce aquí a $U_{sh} = \int_{vol} (\tau^2/2G) dV$, donde $dV = 1 \times t ds$. Sustituyendo la ecuación 6-35 y luego la ecuación 6-34 en esta relación y simplificando, obtenemos

$$\bar{U}_{sh} = \oint \frac{T^2}{8\textcircled{A}^2 G t} ds = \frac{T^2}{8\textcircled{A}^2 G} \oint \frac{ds}{t} \quad (6-36)$$

donde, en la última expresión, las constantes se han sacado de la integral.

²⁴La ecuación 6-34 se llama a veces fórmula de Bredt en honor del ingeniero alemán que la desarrolló.

²⁵J. T. Oden y E. A. Ripperger, *Mechanics and Elastic Structures*, 2a. ed., Nueva York: McGraw-Hill, 1981.

Igualando esta relación con el trabajo externo por unidad de longitud del miembro expresado como $\bar{W}_e = T\theta/2$, la ecuación diferencial que rige es

$$\theta = \frac{d\phi}{dx} = \frac{T}{4(\mathcal{A})^2 G} \oint \frac{ds}{t} \quad (6-37)$$

Aquí nuevamente es útil reescribir la ecuación 6-37 para expresar la rigidez torsional k_t para un tubo hueco de pared delgada. Como para un tubo prismático sometido a un par de torsión constante, $\phi = \theta L$,

$$k_t = \frac{T}{\phi} = \frac{4(\mathcal{A})^2 G}{\oint ds/t} L \quad (6-38)$$

El alabeo de la sección transversal visto en la sección 6-15 no es muy importante para miembros tubulares. El análisis de miembros tubulares estáticamente indeterminados se lleva a cabo de acuerdo con los procedimientos vistos antes.

Ejemplo 6-16

Resuelva el ejemplo 6-3 usando las ecuaciones 6-34 y 6-35. El tubo tiene radios exterior e interior de 10 y 8 mm, respectivamente, y el par de torsión aplicado es de 40 N · m.

SOLUCIÓN

El radio medio del tubo es de 9 mm y el espesor de la pared es de 2 mm. Por tanto,

$$\tau = \frac{q}{t} = \frac{T}{2(\mathcal{A})t} = \frac{40 \times 10^3}{2\pi \times 9^2 \times 2} = 39.3 \text{ MPa}$$

Nótese que usando las ecuaciones 6-34 y 6-35, sólo se obtiene un esfuerzo cortante y que éste es casi justamente igual al promedio de los dos esfuerzos calculados en el ejemplo 6-3. Entre más delgadas son las paredes, más exacta es la respuesta, o viceversa.

Es interesante notar que un tubo rectangular, mostrado en la figura 6-41, con un espesor de pared de 2 mm, tendrá casi el mismo esfuerzo cortante que el de un tubo circular para el mismo par de torsión aplicado. Esto se debe a que el área encerrada es aproximadamente la misma que la \mathcal{A} del tubo circular. Sin embargo, estarán presentes algunas concentraciones de esfuerzos en las esquinas interiores (reentrantes) del tubo cuadrado.

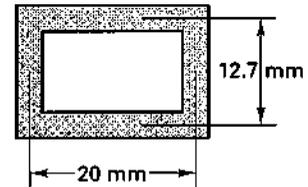


Fig. 6-41

Ejemplo 6-17

Una pieza extruida de aluminio tiene la sección transversal mostrada en la figura 6-42. Si se aplica el par de torsión $T = 300 \text{ N}\cdot\text{m}$, (a) determine los esfuerzos cortantes máximos que se desarrollarán en las tres partes diferentes del miembro y (b) encuentre la rigidez torsional del miembro. No tome en cuenta las concentraciones de esfuerzos.

SOLUCIÓN

La sección transversal consiste esencialmente en tres partes: una región circular ①, una barra rectangular ② y una caja hueca rectangular con espesor de pared variable ③. Durante la aplicación del par de torsión T , cada uno de esos elementos gira el mismo ángulo ϕ y, por tanto, cada elemento resiste un par $(k_i)\phi$. Por consiguiente, de acuerdo con la ecuación 6-21, el par de torsión total resistido por el miembro es la suma de esas cantidades para las tres partes. Las expresiones (k_i) , para las partes están dadas, respectivamente, por las ecuaciones 6-17, 6-31 y 6-38. Esas constantes son

$$(k_1)_1 = I_p \frac{G}{L} = \frac{\pi \times 10^4 G}{2 L} = 1.57 \times 10^4 \frac{G}{L}$$

$$(k_1)_2 = \beta b t^3 \frac{G}{L} = 0.263 \times 30 \times 10^3 \frac{G}{L} = 0.789 \times 10^4 \frac{G}{L}$$

$$(k_1)_3 = \frac{4 \textcircled{A}^2 G}{\oint ds/t} = \frac{4 \times (40 \times 20)^2 G}{(40 + 2 \times 20)/3 + 40/4 L} = 6.98 \times 10^4 \frac{G}{L}$$

donde todos los valores numéricos están en milímetros. Al evaluar la integral de la última ecuación, se supone que el espesor de 4 mm de la caja se extiende 40 mm.

Sumando las rigideces de las partes, la rigidez torsionante del miembro es $\sum (k_i) = 9.34 \times 10^4 G/L$.

El par de torsión aplicado se distribuye entre las tres partes según la razón $(k_i)/\sum (k_i)$. Los pares de torsión son entonces $300 \times (1.57 \times 10^4 G/L) / (9.34 \times 10^4 G/L) = 50.4 \text{ N}\cdot\text{m}$ para la porción circular, $25.3 \text{ N}\cdot\text{m}$ para la barra y $224 \text{ N}\cdot\text{m}$ para la caja. Los esfuerzos máximos en cada una de las partes se determinan usando, respectivamente, las ecuaciones 6-3, 6-30 y 6-34.

$$\tau_{1-\text{máx}} = \frac{Tc}{I_p} = \frac{50.4 \times 10^3 \times 10}{\pi \times 10^4/2} = 32.1 \text{ MPa}$$

$$\tau_{2-\text{máx}} = \frac{T}{\alpha b t^2} = \frac{25.3 \times 10^3}{0.267 \times 30 \times 10^2} = 31.6 \text{ MPa}$$

$$\tau_{3-\text{máx}} = \frac{T}{2 \textcircled{A} t} = \frac{224 \times 10^3}{2 \times 40 \times 20 \times 3} = 46.7 \text{ MPa}$$

El esfuerzo $\tau_{1-\text{máx}}$ ocurre a lo largo del perímetro de la porción circular, $\tau_{2-\text{máx}}$ a la mitad de la altura de la barra y $\tau_{3-\text{máx}}$ en las paredes de 3 mm del tubo. Debido a las aproximaciones hechas, esos esfuerzos no pueden considerarse precisos. En aplicaciones mecánicas, las concentraciones de esfuerzos pueden ser particularmente importantes. La analogía de la membrana puede usarse convenientemente para determinar la posición de las concentraciones de esfuerzos. Un remedio para esto puede ser usar filetes de buen tamaño en las esquinas reentrantes.

La rigidez torsional de un miembro, encontrada de esta manera, tal como se necesita en los análisis de vibraciones y para la resolución de problemas elásticos estáticamente indeterminados, es suficientemente exacta ya que los efectos locales, como las concentraciones de esfuerzos, juegan en ella un papel menor.

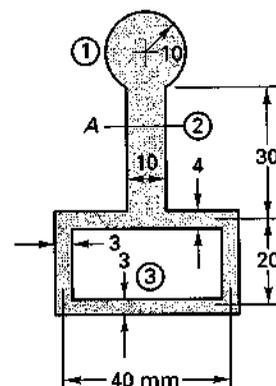


Fig. 6-42

PROBLEMAS

Sección 6-2

6-1. La flecha maciza cilíndrica de tamaño variable, como se muestra en mm en la figura, está sometida a los pares de torsión indicados. ¿Cuál es el esfuerzo torsionante máximo en la flecha y entre qué poleas ocurre éste?

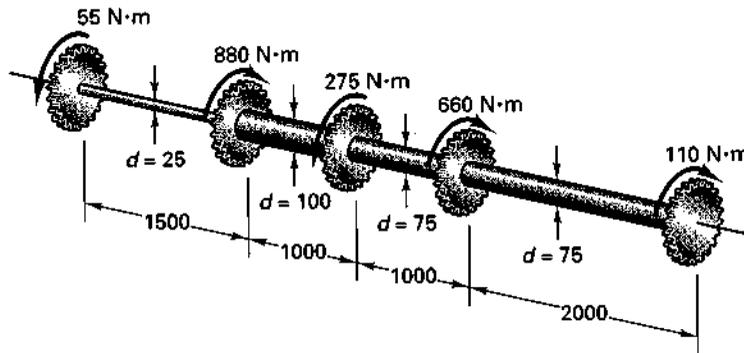


Fig. P6-1

Secciones 6-4 y 6-5

6-2. Se taladra un agujero de 100 mm de diámetro en una flecha circular maciza de 200 mm de diámetro. ¿Qué porcentaje de resistencia torsional se pierde debido a esta operación?

6-3. Una flecha circular maciza de 40 mm de diámetro va a ser reemplazada por un tubo circular hueco. Si el diámetro exterior del tubo está limitado a 60 mm, ¿cuál debe ser el espesor del tubo hecho del mismo material finalmente elástico para que el esfuerzo máximo de trabajo sea el mismo que en la flecha? Determine la razón de los pesos de ambas flechas.

6-4. Una flecha redonda de 20 mm de diámetro y 500 mm de longitud está empotrada en un extremo y sometida a un par de torsión T en su extremo libre, como se muestra en la figura. Si un extensómetro colocado sobre la superficie a 45° con la horizontal registra una deformación unitaria de 4×10^{-3} mm/mm cuando se aplica el par, ¿cuál es el ángulo de torsión presente en la flecha? Sea $E = 180$ GPa y $G = 70$ GPa. (Sugerencia: Nótese la información dada en la figura 6-8.)

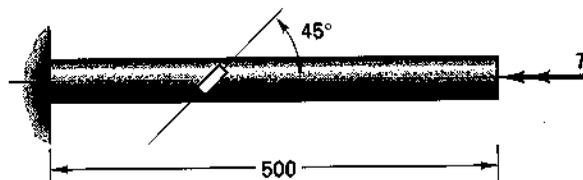


Fig. P6-4

Sección 6-6

6-5. Una flecha maciza de acero de 100 mm de diámetro transmite 400 kW a 2 Hz. (a) Determine el esfuerzo cortante máximo. (b) ¿Cuál es el diámetro requerido para que la flecha opere a 4 Hz bajo el mismo esfuerzo cortante?

6-6. Un motor impulsa una flecha por medio de un conjunto de engranes a 630 rpm, como se muestra en la figura. Se suministran treinta caballos (hp) a una máquina situada a la derecha y 90 hp a otra a la izquierda. Seleccione una flecha maciza redonda del mismo tamaño en toda su longitud. El esfuerzo cortante permisible es de 5750 psi.

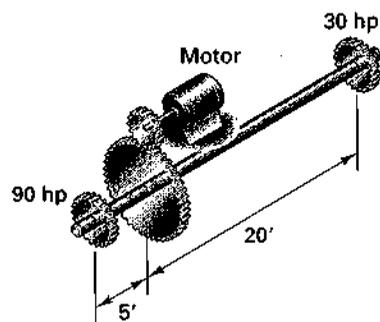


Fig. P6-6

6-7. En un torno, uno de los trenes de engranes está hecho como se muestra en la figura. El pequeño engrane cilíndrico impulsor montado sobre una flecha de 12 mm e impulsado por un motor de 2 kW tiene 28 dientes. El engrane impulsado tiene 90 dientes. Esto reduce efectivamente la velocidad del engrane grande por un factor de 28/90. ¿Cuál debe ser el tamaño de la flecha del engrane grande si se fabrica con el mismo material que el engrane pequeño?

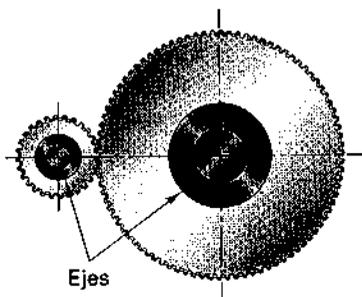


Fig. P6-7

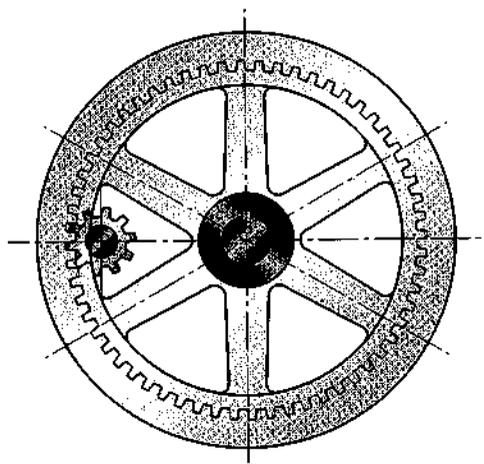


Fig. P6-8

6-8. El pequeño engrane de un tren interno de engranes mostrado en la figura es impulsado por un motor de 500 kW a 30 Hz. El pequeño engrane tiene 10 dientes y el mayor, que es impulsado, tiene 30. Por tanto, el engrane mayor gira a 10 Hz. Si el esfuerzo cortante permisible es de 60 MPa, ¿cuáles son los tamaños requeridos para las flechas?

6-9. Una flecha de aluminio de 40 mm de diámetro con carga cíclica de amplitud constante soporta 5×10^8 ciclos de servicio con un factor de seguridad de 1.8. Use los datos en la figura 2-26 y divida el esfuerzo normal dado en esta figura entre 2. Como se muestra en el capítulo 12, esta es una buena hipótesis conservadora (es decir, $\tau = \sigma/2$). Encuentre el par de torsión que puede aplicarse a esta flecha.

6-10. (a) Diseñe una flecha hueca de acero para transmitir 300 hp a 75 rpm sin exceder un esfuerzo cortante de 8000 psi. Use 1.2:1 como relación del diámetro exterior al diámetro interior. (b) ¿Qué flecha maciza podría usarse en vez de la hueca?

6-11. Un motor de 100 hp impulsa una flecha por medio de un engrane en *A* a 26.3 rpm. Engranajes cónicos en *B* y *C* impulsan mezcladoras de cemento. Si la potencia requerida de la mezcladora impulsada por el engrane *B* es de 25 hp y para la mezcladora impulsada por *C* es de 75 hp, ¿cuáles son los diámetros requeridos para las flechas? El esfuerzo cortante permisible en la flecha es de 6000 psi. Un número suficiente de chumaceras se proporciona para evitar la flexión.

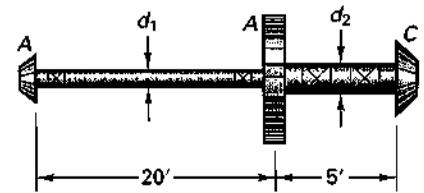


Fig. P6-11

Sección 6-7

6-12. Una flecha circular maciza de 150 mm de diámetro se maquina a un diámetro de 75 mm a lo largo de una parte de la flecha. Si en el punto de transición de los dos diámetros el radio del filete es de 12 mm, ¿qué esfuerzo cortante máximo se desarrolla cuando se aplica un par de torsión de 2700 N·m a la flecha? ¿Cuál será el esfuerzo cortante máximo si el radio del filete se reduce a 3 mm?

6-13. Encuentre el radio requerido de un filete para la unión de una flecha de 6 in de diámetro con otra flecha de 4 in de diámetro si el conjunto transmite 110 hp a 100 rpm y el esfuerzo cortante máximo está limitado a 8000 psi.

6-14. Dos flechas escalonadas de diferentes tamaños están hechas del mismo acero al níquel. En una de ellas el diámetro mayor de 40 mm se reduce a 20 mm. En la transición entre las dos flechas, se introduce un filete semicircular con radio de 1 mm (véase la figura). La segunda flecha, igualmente maquinada tiene 30 mm de diámetro en su parte mayor y 18 mm en la otra. Un filete en la transición tiene un radio de 2 mm. ¿Cuál ensamble de flechas es más adecuado desde el punto de vista del esfuerzo?

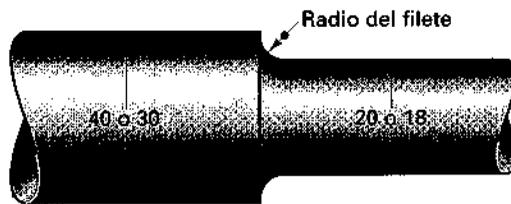


Fig. P6-14

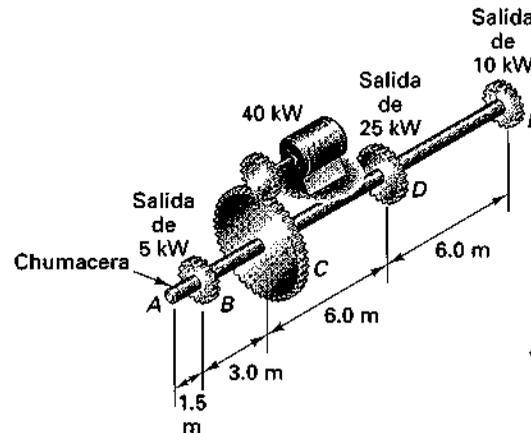


Fig. P6-16

Sección 6-8

6-15. ¿Cuál debe ser la longitud de un alambre de aluminio de 6 mm de diámetro para que pueda ser torcido una vuelta completa sin exceder un esfuerzo cortante de 42 MPa? $G = 27$ GPa.

6-16. La flecha maciza de acero de 50 mm de diámetro mostrada en la figura es impulsada por un motor de 40 kW a 3 Hz. (a) Encuentre los esfuerzos torsionantes máximos en las secciones *AB*, *BC*, *CD* y *DE* de la flecha. (b) Determine el ángulo total de torsión entre *A* y *E*. Sea $G = 84$ GPa.

6-17. Una barra hueca de acero de 6 in de longitud se usa como resorte torsional. La razón de los diámetros interior a exterior es de 0.5. La rigidez requerida para este resorte es de 0.10 de grado por 1 lb-in de par de torsión. (a) Determine el diámetro exterior de esta barra. $G = 12 \times 10^6$ psi. (b) ¿Cuál es la constante torsional de resorte para esta barra?

6-18. Una flecha maciza de aluminio de 60 mm de diámetro y 1000 mm de longitud va a ser reemplazada por una flecha tubular de acero con el mismo diámetro exterior tal que la nueva flecha ni exceda el doble del esfuerzo cortante máximo ni el ángulo de torsión de la flecha de aluminio. (a) ¿Cuál debe ser el radio interior de la flecha tubular de acero? Sean $G_{Al} = 28$ GPa y $G_{Ac} = 84$ GPa. (b) ¿Cuál de los dos criterios es válido?

6-19. Dos engranes están unidos a dos flechas de acero de 60 mm de diámetro, como se muestra en la figura. El engrane en *B* tiene un diámetro de paso de 200 mm; el engrane en *C* tiene un diámetro de paso de 400 mm. ¿Qué ángulo girará el extremo *A* si en *A* se aplica un par de torsión de 600 N·m y el extremo *D* de la segunda flecha no puede girar? $G = 84$ GPa.

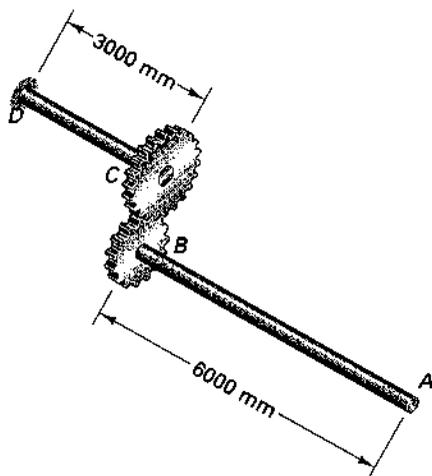


Fig. P6-19

6-20. Una flecha circular de acero con las dimensiones mostradas en la figura está sometida a tres pares de torsión: $T_1 = 28$ k-in, $T_2 = -8$ k-in y $T_3 = 10$ k-in. (a) ¿Cuál es el ángulo de torsión del extremo derecho debido a los pares aplicados? (b) Dibuje el diagrama del ángulo de torsión a lo largo de la flecha. Sea $G = 12 \times 10^6$ psi.

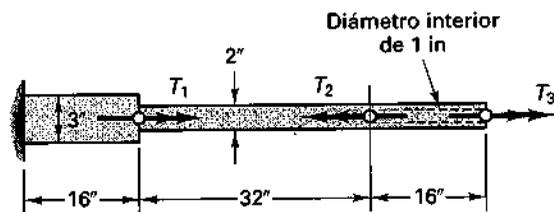


Fig. P6-20

6-21. Un dinamómetro se emplea para calibrar la entrada requerida de potencia para operar un ventilador a 20 Hz. El dinamómetro consta de una flecha maciza de 12 mm de diámetro y de dos discos a 300 mm entre sí unidos a la flecha, como se muestra en la figura. Un disco está unido a través de un tubo al extremo de entrada; el otro está cerca del extremo de salida. El desplazamiento relativo de esos dos discos registrado por luz estroboscópica es de $6^\circ 0'$. Calcule la entrada de potencia en hp requerida para operar el ventilador a la velocidad dada. Sea $G = 84 \text{ GPa}$.

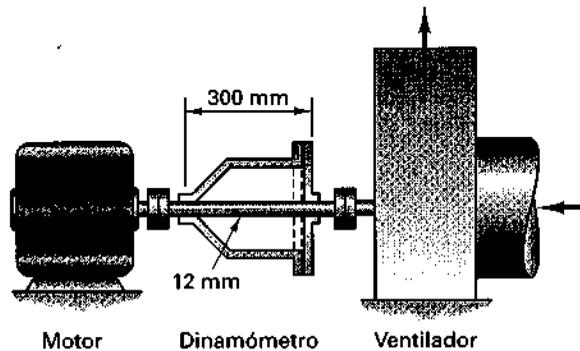


Fig. P6-21

6-22. Un tubo de aleación de níquel tiene 30 mm de diámetro exterior y 20 mm de diámetro interior. El material tiene una $G = 70 \text{ MPa}$. Determine la flexibilidad torsional para un tubo de 1 m de longitud.

6-23. Un disco circular delgado con masa $m = 2 \text{ kg}$ está unido a una flecha vertical de 500 mm de longitud que cuelga desde un extremo fijo en la parte superior, como se muestra en la figura. (a) Si la flecha está hecha de acero ($G = 83 \text{ MPa}$) y tiene 24 mm de diámetro, ¿cuál es la frecuencia de vibración torsional del sistema? La ecuación para la frecuencia fundamental de vibración es $f_n = (1/2\pi)\sqrt{k_t/I_{mz}}$, donde el momento de inercia de masa del disco respecto al eje z es $I_{mz} = m R^2/2$. (b) ¿Cuál es el diámetro requerido de la flecha para que ésta desarrolle la misma frecuencia de vibración si está hecha de aluminio ($G = 26 \text{ GPa}$)?

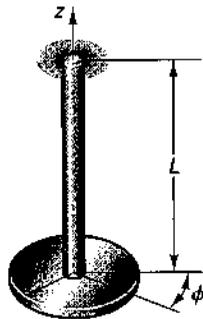


Fig. P6-23

6-24. Una flecha maciza de acero ahusada está fija rígidamente a un soporte en un extremo y en el otro está sometida a un par de torsión T (véase la figura). Encuentre la rotación del extremo libre si $d_1 = 150$ mm, $d_2 = 50$ mm, $L = 500$ mm y $T = 3$ kN·m. Suponga que son aplicables las hipótesis usuales relativas a la deformación unitaria en flechas circulares prismáticas sometidas a un par de torsión, y sea $G = 200$ GPa. (b) Determine la flexibilidad torsional de la flecha.

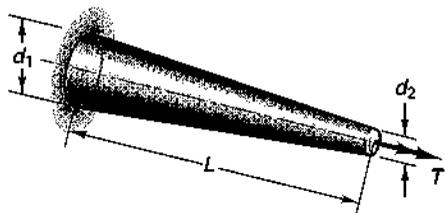


Fig. P6-24

6-25. Un cono truncado elástico de pared delgada tiene las dimensiones mostradas en la figura. (a) Determine la rigidez torsionante de este miembro (es decir, la magnitud del par de torsión por unidad de ángulo de torsión). El módulo cortante para el material es G . (b) ¿Cuál es la flexibilidad torsionante de este miembro?

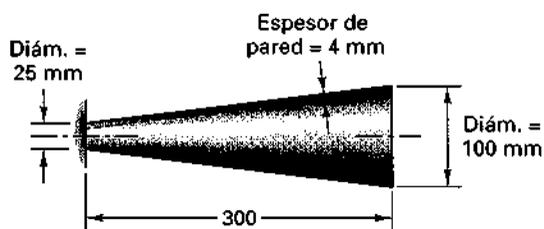


Fig. P6-25

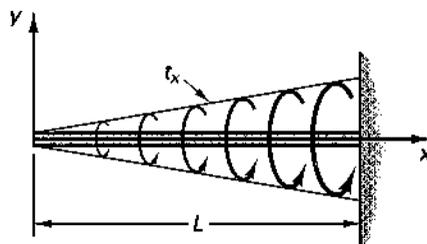


Fig. P6-26

6-26. La carga sobre un tubo de control del alerón de un avión puede idealizarse por un par de torsión $t_x = kx$ in-lb/in uniformemente variable, en donde k es una constante (véase la figura). Determine el ángulo de torsión del extremo libre. Suponga $I_p G$ constante.

6-27. Un par de torsión aplicado a una flecha circular es idealizado como uniformemente variable desde el extremo empotrado; véase la figura. Determine el ángulo de torsión del extremo derecho. La rigidez torsional $I_p G$ de la flecha es constante.

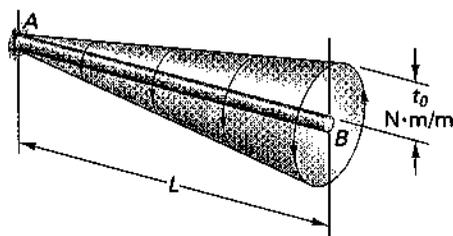


Fig. P6-27

6-28. Una flecha circular de 2000 mm de longitud empotrada en un extremo y libre en el otro, está sometida a un par de torsión variable distribuido linealmente que actúa a lo largo de su longitud, como se muestra en la figura. La rigidez torsional $I_p G$ de la flecha es constante. Determine el ángulo de torsión en el extremo libre debido al par de torsión aplicado.

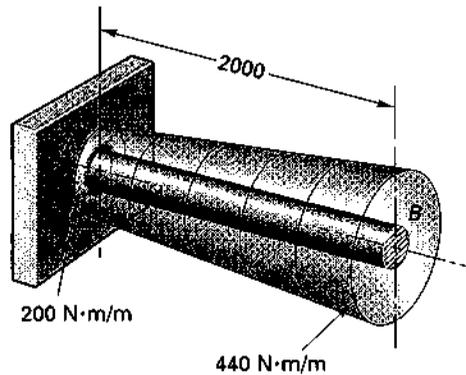


Fig. P6-28

Sección 6-9

6-29. Un tubo de aluminio se ajusta a presión sobre una barra de acero, formando una flecha que actúa como una unidad. Esta flecha tiene 1 m de largo y la sección transversal mostrada en la figura. Suponga comportamiento elástico y sea $E_{ac} = 3E_{Al} = 210$ GPa. (a) ¿Qué esfuerzos se generan al aplicar un par de torsión $T = 20$ kN·m? Muestre la distribución del esfuerzo cortante sobre una gráfica. (b) Determine la rigidez y flexibilidad torsionales de la flecha.

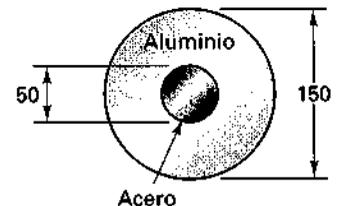


Fig. P6-29

6-30. Un tubo de 50 mm de diámetro exterior y 2 mm de espesor está unido en sus extremos por medio de bridas rígidas a una flecha maciza de 25 mm de diámetro, como se muestra en la figura. Si el tubo y la flecha están hechos del mismo material linealmente elástico, ¿qué parte del par de torsión aplicado T es tomada por el tubo?

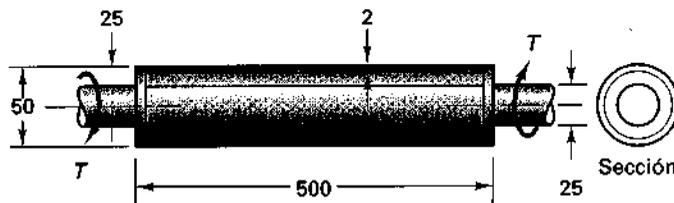


Fig. P6-30

6-31. Suponga que en el problema 6-30, antes de soldar las placas de extremo rígidas, la flecha está sometida a un par de torsión de 200 N·m y se mantiene en esta condición durante el proceso de soldado. ¿Qué par de torsión residual permanecerá en la flecha al liberar el par?

6-32. Usando el método del desplazamiento, determine las reacciones para la flecha mostrada en la figura 6-21 para los siguientes datos: $T = 40$ k-in, $L_1 = 15$ in, $L_2 = 10$ in, $(I_p)_1 = 2\pi$ in⁴, $(I_p)_2 = \pi/2$ in⁴ y $G_1 = G_2 = G = 12 \times 10^3$ ksi. Dibuje también el diagrama del ángulo de torsión para la flecha a lo largo de su longitud.

6-33. Considere la misma flecha circular elástica escalonada mostrada en las dos figuras alternativas. Usando el método de las fuerzas, determine el ángulo de torsión ϕ_{ab} en a causado por la aplicación de un par de torsión unitario en b y demuestre que es igual a ϕ_{ba} , que es el ángulo de torsión en b debido a la aplicación de un par de torsión unitario en a . Sea $(I_p)_1 = 3(I_p)_2$. (Véase el problema 4-6.)

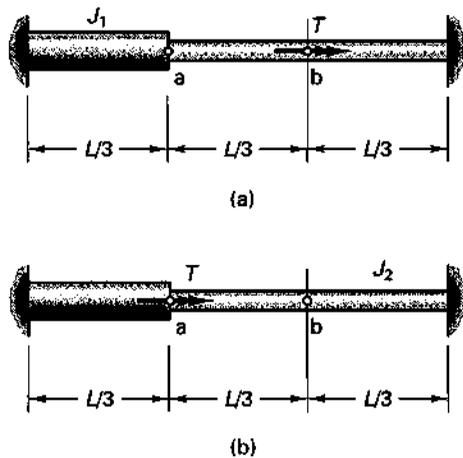


Fig. P6-33

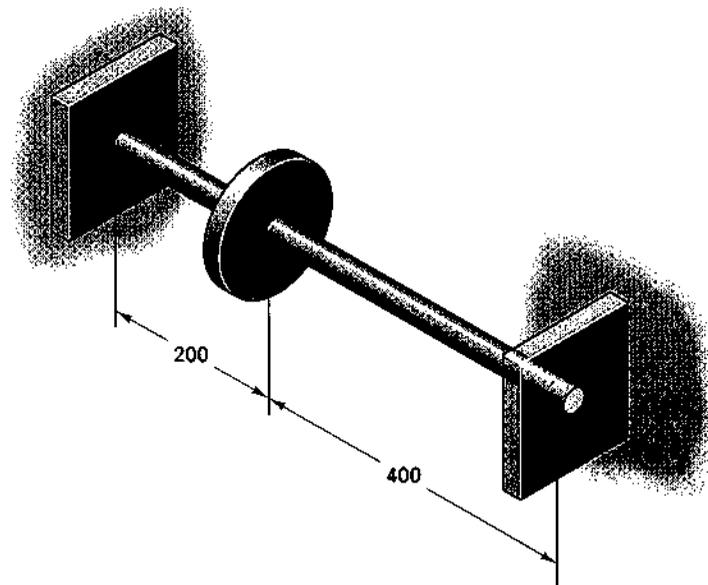


Fig. P6-34

6-34. Un disco circular con masa de 50 lb está unido en un punto situado en el tercio del claro de una flecha maciza de acero de 600 mm de longitud, fija en ambos extremos como se muestra en la figura. La flecha tiene 40 mm de diámetro. Determine la frecuencia torsional fundamental del sistema. Desprecie el peso de la flecha. Para la fórmula de la frecuencia, véase el problema 6-23.

6-35. (a) Usando el método de las fuerzas, determine las reacciones en la flecha circular escalonada mostrada en la figura. Los pares de torsión aplicados son $T_1 = 600$ lb-in, $T_2 = 500$ lb-in y $T_3 = 200$ lb-in. Los diámetros de la flecha son $d_1 = 2.83$ in y $d_2 = 2.38$ in. (b) Dibuje el diagrama de ángulo de torsión para la flecha a lo largo de su longitud. Sea $E = 10 \times 10^3$ ksi.

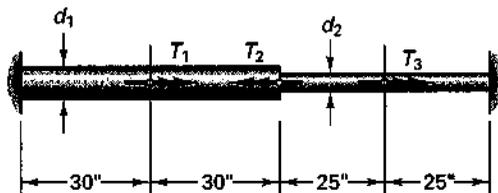


Fig. P6-35

6-36. Una flecha circular elástica fija en ambos extremos está sometida a un par de torsión uniformemente distribuido t_0 por unidad de longitud a lo largo de la mitad de su claro, como se muestra en la figura. (a) Usando el método de las fuerzas, encuentre las reacciones. (b) Determine el ángulo de torsión máximo y dibuje el diagrama del ángulo de torsión a lo largo de la longitud de la flecha. La rigidez torsional $I_p G$ de la flecha es constante.

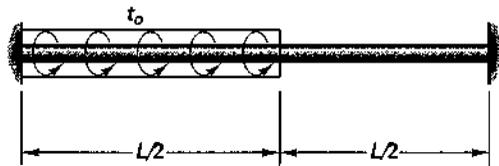


Fig. P6-36

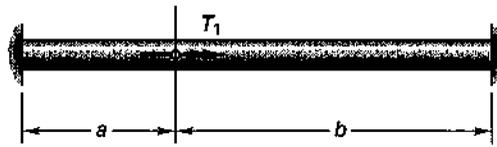


Fig. P6-40

6-37. Suponga que la flecha en el problema 6-27 está fija en ambos extremos. (a) Usando el método de las fuerzas, determine las reacciones. (b) Encuentre el ángulo de torsión máximo y dibuje el diagrama del ángulo de torsión a lo largo de la longitud de la flecha.

Sección 6-10

6-38. Resuelva el problema 6-27 usando la ecuación 6-26.

6-39. Resuelva el problema 6-28 usando la ecuación 6-26.

6-40. Usando la ecuación 6-26 y las condiciones de continuidad (véase la Sección 4-7) o las funciones de singularidad, determine las reacciones en los extremos empotrados causadas por la aplicación del par de torsión T_1 ; véase la figura. Dibuje los diagramas del par $T(x)$ y del ángulo de torsión $\varphi(x)$.

6-41. Usando la ecuación 6-26 y las condiciones de continuidad (véase la Sección 4-7) o las funciones de singularidad, determine las reacciones causadas por un par de torsión uniformemente distribuido t_0 a lo largo de media longitud de flecha, como se muestra en la figura para el problema 6-36. Dibuje el diagrama del ángulo de torsión a lo largo de la longitud de la flecha.

Sección 6-11

6-42. Una flecha circular escalonada tiene las dimensiones mostradas en la figura. (a) Usando un método de energía, determine el ángulo de torsión en el extremo cargado. Se da G . (b) Verifique el resultado usando la ecuación 6-16.

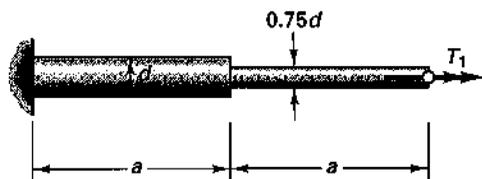


Fig. P6-42

Sección 6-12

6-43. Un cople está hecho con ocho pernos de alta resistencia de $\frac{3}{4}$ in de diámetro localizados sobre un círculo de 10 in de diámetro. (a) Calcule el par de torsión que puede transmitirse por este cople si el esfuerzo cortante permisible en los pernos es de 10.5 ksi. (b) Encuentre los hp que pueden transmitirse cuando la flecha y los coples están girando a 300 rpm.

6-44. Un cople bridado tiene seis pernos con área transversal de 0.2 in^2 cada uno, localizados en un círculo de 8 in de diámetro, más seis pernos con área transversal de 0.5 in^2 cada uno, localizados en un círculo de 5 in de diámetro. Si el esfuerzo cortante permisible en cada perno es de 16 ksi, ¿cuál es la capacidad por par de torsión de este cople?

Sección 6-13

6-45. Una probeta hecha con una barra de acero SAE 1060 de 20 mm de diámetro y 450 mm de longitud falló bajo un par de torsión de 800 N·m. ¿Cuál es el módulo de ruptura de este acero en torsión?

6-46. Una flecha maciza de acero de 20 mm de diámetro y 1000 mm de longitud es torcida de manera que le queda un núcleo elástico de 16 mm de diámetro; véase la figura. (a) Determine el par de torsión aplicado que causa el estado de fluencia. (b) Encuentre la distribución del esfuerzo residual que se tendrá al retirar el par. Dibuje el patrón de esfuerzo residual con los valores críticos. Suponga las propiedades mecánicas idealizadas para el material dadas en la figura 6-30(b) del ejemplo 6-13.

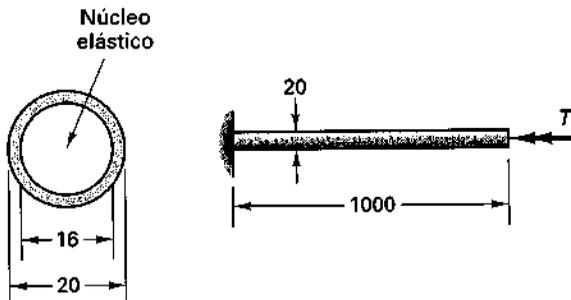


Fig. P6-46

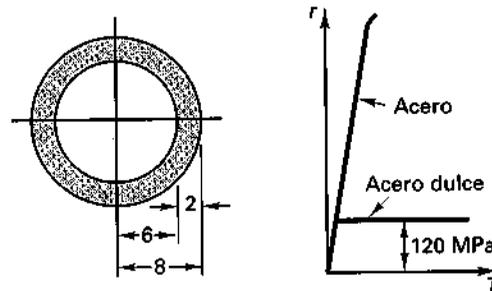


Fig. P6-48

6-47. Si la flecha en el problema 6-46 es torcida en su extremo libre un ángulo $\phi = 25 \text{ rad}$ y luego es liberada, ¿cuál será el ángulo residual ϕ ? Encuentre también los esfuerzos cortantes residuales. Dibuje el patrón de esfuerzos residuales con los valores críticos.

6-48. Un tubo delgado de acero al níquel es ajustado en caliente sobre una barra circular maciza de acero dulce. Las dimensiones transversales de la flecha compuesta se muestran en mm en la figura. Determine el par de torsión desarrollado por esta flecha si el esfuerzo cortante máximo medido sobre la superficie es de 480 MPa. Para ambos aceros, $G = 120 \text{ GPa}$. Sin embargo, el acero dulce fluye en cortante a 120 MPa, mientras que el acero al níquel permanece esencialmente linealmente elástico en el rango de 600 MPa. Diagramas idealizados τ - γ para los dos materiales están ilustrados en la figura.

6-49. Si en el problema 6-48 es liberado el par de torsión aplicado, (a) ¿cuál será el patrón de esfuerzos residuales? Dibuje los resultados con los valores críticos. (b) Determine el ángulo de torsión residual por unidad de longitud de la flecha.

Sección 6-14

6-50. Compare el esfuerzo cortante máximo y el ángulo de torsión para miembros de iguales longitudes y áreas transversales con sección cuadrada, sección rectangular y sección circular. Todos los miembros están sometidos al mismo par de torsión. La sección circular tiene 100 mm de diámetro y la sección rectangular tiene 25 mm de ancho.

6-51. Compare la resistencia torsional y la rigidez de tubos de pared delgada de sección transversal circular con material linealmente elástico con y sin una ranura longitudinal (véase la figura).

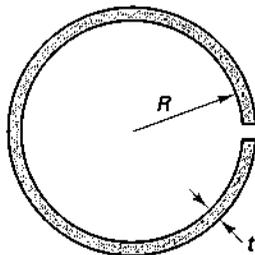


Fig. P6-51

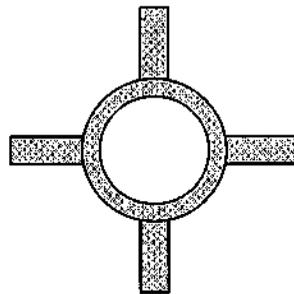


Fig. P6-52

6-52. Una flecha agitadora está hecha con cuatro barras rectangulares soldadas a un tubo circular, como se muestra en la figura. El tubo tiene 4 in de diámetro exterior y $\frac{1}{2}$ in de espesor de pared; cada una de las barras rectangulares es de 1×2 in. Si el esfuerzo cortante elástico máximo, despreciando las concentraciones de esfuerzos, está limitado a 10 ksi, ¿qué par de torsión T puede aplicarse a este miembro?

6-53. Usando la analogía del montón de arena, determine el momento de torsión último de resistencia para una sección rectangular de a por $2a$. (Sugerencia: Primero, usando la analogía, verifique la ecuación 6-29 para una flecha circular maciza, donde la altura del montón es $c\tau_{yp}$. Dos veces el volumen incluido por el montón da los resultados requeridos.)

6-54. Un miembro sometido a torsión tiene la sección transversal mostrada en la figura. Estime la constante de torsión I_p equiv.

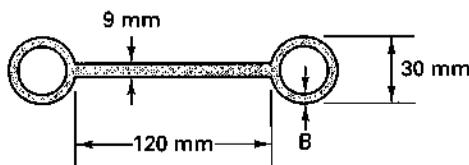


Fig. P6-54

6-55. Considere tres secciones transversales: un círculo, una elipse y un triángulo equilátero con las dimensiones mostradas. (a) Aplique la analogía de la membrana y localice los puntos de esfuerzo máximo. (b) Determine τ_{\max} y ϕ para las secciones. Sea $T = 1000 \text{ N}\cdot\text{m}$. Las fórmulas para la sección elíptica son $\tau_{\max} = 2T/(\pi ab^2)$ y $\phi = TL/KG$, donde $K = \pi a^3 b^3/(a^2 + b^2)$; para la sección triangular equilátera son $\tau_{\max} = 20T/a^3$ y $K = a^4\sqrt{3}/80$; para ambos casos, $\phi = TL/KG$. (Según R. J. Roark en *Formulas for Stress and Strain*, Nueva York: McGraw-Hill, 1943.) Sean $a = 20 \text{ mm}$, $b = r = 15 \text{ mm}$.

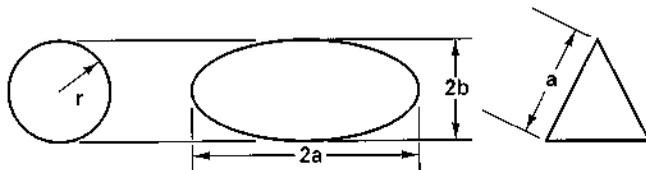


Fig. P6-55

6-56. Sean cada una de las tres áreas transversales de los miembros en el problema 6-55 iguales a 1200 mm^2 . Determine τ_{\max} en cada caso. Recuerde que el área de una elipse es $A = \pi ab$.

6-57. Determine los tamaños relativos de las secciones transversales en el problema 6-55 para que tengan la misma rigidez torsional. Recuerde, como en el problema precedente, que el área de una elipse es $A = \pi ab$.

Sección 6-16

6-58. Para un miembro con la sección transversal mostrada en la figura, encuentre los esfuerzos cortantes máximos y el ángulo de torsión por unidad de longitud debido a un par de torsión aplicado de $1000 \text{ lb}\cdot\text{in}$. Desprecie la concentración de esfuerzos. Comente sobre las ventajas ganadas al incrementar el espesor de la pared sobre parte de la sección transversal.

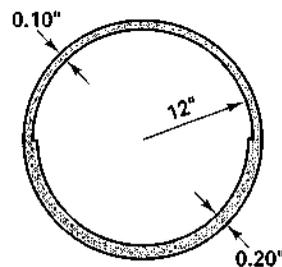


Fig. P6-58

6-59. Una sección transversal de pared delgada en forma de una superficie de sustentación simplificada se muestra en la figura. Determine el par que ella puede soportar bajo un esfuerzo cortante máximo de 20 MPa . Desprecie el efecto de las concentraciones de esfuerzos. ¿Se tiene alguna ventaja al aumentar el espesor de las placas inclinadas? Use las dimensiones de las líneas centrales.

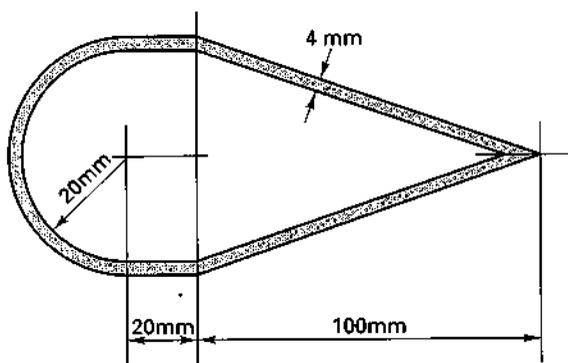


Fig. P6-59

6-60. Una flecha con la sección transversal mostrada en la figura está sometida a un par de torsión $T = 150 \text{ N}\cdot\text{m}$. (a) Estime el porcentaje de par tomado por cada una de las dos componentes transversales y calcule los esfuerzos cortantes máximos en cada parte, despreciando concentraciones de esfuerzos. (b) Encuentre el ángulo de torsión por unidad de longitud generado por el par de torsión aplicado. Sea $G = 25 \times 10^3 \text{ GPa}$.

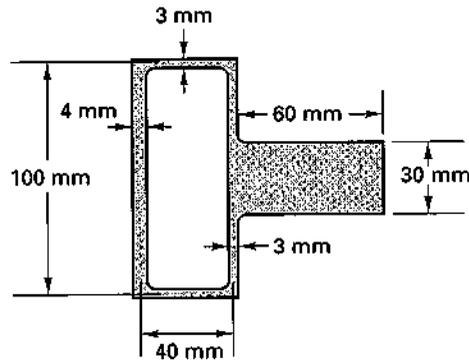


Fig. P6-60

6-61. Una pieza de aluminio extruido está hecha en forma de caja rectangular. Determine la resistencia elástica torsional de este miembro si el esfuerzo cortante está limitado a 120 MPa . ¿Cuál es la flexibilidad torsional de una caja con 400 mm de longitud?

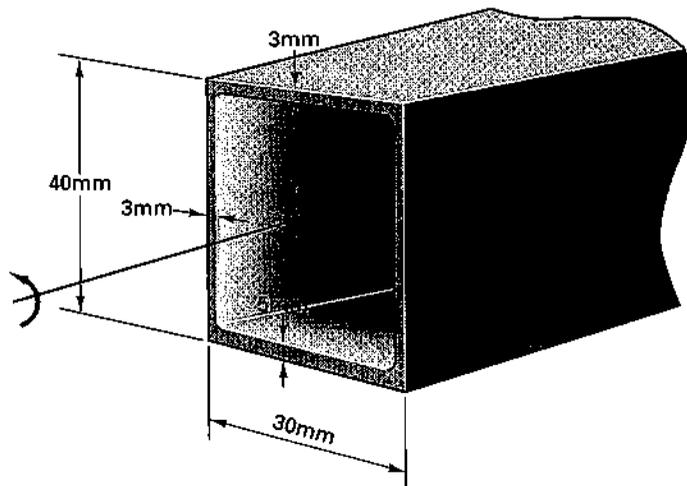


Fig. P6-61

6-62. Una flecha empotrada en ambos extremos está hecha con una barra cuadrada maciza de 20 mm por lado y un tubo cuadrado de 30 mm por lado soldados en la unión de las dos secciones a una placa que forma un apuntador volado en la dirección horizontal; véase la figura. El tubo cuadrado tiene un espesor de pared de 1.5 mm. Determine el desplazamiento vertical de la punta del apuntador causado por la aplicación de los dos pares de torsión T_1 y $2T_1$ cuando el esfuerzo cortante máximo en la flecha es de 40 MPa. Desprecie las concentraciones de esfuerzos y sea $G = 200$ GPa.

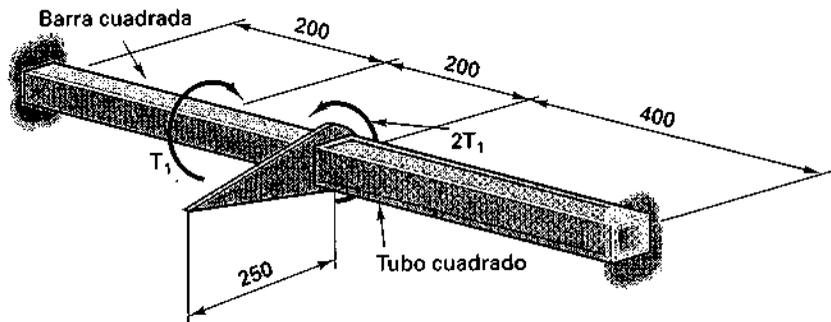


Fig. P6-62